

**TERMODINÁMICA DE AGUJEROS NEGROS CON COMPORTAMIENTO
ASINTÓTICO NO ESTÁNDAR**

MOISÉS FELIPE BRAVO GAETE ¹

Una tesis presentada en cumplimiento parcial de
los requisitos para el grado de
Doctor en Matemáticas

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca



MAYO 2015

¹ Sostenido en parte por Beca Doctorado Nacional 2012-CONICYT N° 21120271.

CONSTANCIA

La Dirección del Sistema de Bibliotecas a través de su unidad de procesos técnicos certifica que el autor del siguiente trabajo de titulación ha firmado su autorización para la reproducción en forma total o parcial e ilimitada del mismo.



Talca, 2019

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	6
2.1. Geometría Diferencial	6
2.1.1. Espacio tangente	7
2.1.2. Espacio dual	8
2.1.3. Tensores y operaciones con tensores	8
2.1.4. Métrica	9
2.1.5. Derivada covariante	10
2.1.6. Geodésicas	11
2.1.7. Curvatura, tensores de Riemann y Ricci	12
2.1.8. Formas diferenciales	14
2.1.9. Derivada de Lie y vectores de Killing	16
2.2. Relatividad General	17
2.2.1. Principio de Equivalencia	18
2.2.2. Tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ y las ecuaciones de Einstein	19
2.2.3. Formulación Lagrangiana	20
2.3. Agujeros negros clásicos	21
2.3.1. Agujero negro de Schwarzschild	21
2.3.2. Agujero negro de Reissner-Nordström	32
2.3.3. Agujero negro de Kerr	36
3. Agujeros negros en presencia de un campo escalar no mínimamente acoplado a la curvatura escalar	44
3.1. Agujeros negros en presencia de un campo escalar no mínimamente acoplado a la curvatura escalar conforme	46
3.1.1. Agujeros negros en presencia de $(D - 1)$ -formas	50
3.2. Gravedad de Lovelock	52
3.3. Agujeros negros asintóticamente AdS con horizonte planar en presencia de un campo escalar no mínimamente acoplado a la curvatura escalar	54

4. Primera ley de la termodinámica para agujeros negros asintóticamente Lifshitz	82
4.1. Termodinámica de los agujeros negros	83
4.1.1. Leyes de la termodinámica de los agujeros negros	84
4.1.2. Entropía de Wald	85
4.1.3. Formalismos para obtener la masa de soluciones de agujeros negros	87
4.2. Teorías gravitatorias masivas	94
4.2.1. Acción de Fierz-Pauli	95
4.2.2. Gravedad masiva topológica	96
4.2.3. Nueva gravedad masiva	98
4.3. Cálculo de la masa de agujeros negros considerando el formalismo cuasilocal	100
4.4. Primera ley y fórmula de Cardy generalizada para agujeros negros de Lifshitz en tres dimensiones	105
4.5. Agujeros negros asintóticamente Lifshitz en presencia de un campo eléctrico	115
5. Teoría de Horndeski	126
5.1. Agujeros negros en presencia de una fuente particular de la teoría de Horndeski	127
5.2. Agujeros negros de Lifshitz con un campo escalar dependiente del tiempo en una teoría de Horndeski	132
5.3. Termodinámica de un agujero negro BTZ con una fuente de Horndeski	137
6. Conclusiones y comentarios	146
7. Apéndice	149

AGRADECIMIENTOS

Sinceramente, es difícil escribir estas líneas pues son variadas las personas e instituciones que, de alguna u otra forma, han sido importantes a lo largo de estos casi cuatro años de trabajo. En primer lugar, quisiera agradecer al Instituto de Matemática y Física por darme la oportunidad de continuar mis estudios. Asimismo, a la Universidad de Talca y la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) por su financiamiento. A modo personal, quisiera dar infinitas gracias a mi tutor, Doctor Mokhtar Hassaïne, por enseñarme que el trabajo duro genera, tarde o temprano, resultados fructíferos.

También quisiera dar mi agradecimiento a los profesores: Doctor Ricardo Baeza, Doctor Luis Huerta, Doctor Mikhail S. Plyushchay y Doctor Jorge Zanelli, por ser una parte esencial dentro de mi proceso doctoral.

Agradezco también a mis amigos y compañeros de postgrado, tanto de Magíster como de Doctorado, así como también de todos los profesores y personas que forman parte del Instituto y de la Universidad, por sus valiosos consejos y enseñanzas.

Por último, y no menos importante, quisiera dar mi incondicional gratitud a mi familia y seres queridos, en especial a mis padres, María y Moisés, por cultivarme la constancia y, a modo personal, obsequiarme lo más valioso que se puede entregar a un hijo: el amor y deseo de aprender. A mi querida hermana, María Alicia, por sus incontables y valiosas conversaciones. A Catherine, por su amor, paciencia, y ser un pilar fundamental en mi vida. Finalmente, a mi tío, Patricio Manuel, que dejó este mundo hace diez años, su apoyo y convicción fueron las bases para seguir este camino.

A mi familia y seres queridos.

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de esta tesis es la búsqueda y el análisis de soluciones de agujeros negros, considerando teorías que modifican las ecuaciones de Einstein presentes en los artículos [1–6]. Estas ecuaciones forman parte de la teoría de la Relatividad General [7–9], descubierta en 1915 por Albert Einstein, luego de un laborioso trabajo. Su esencia se encuentra en que sus ecuaciones, además de su belleza y simplicidad, permiten estudiar la interacción entre la materia y la gravedad, asociando esta última a un concepto puramente geométrico. Es más, esta teoría ha incorporado una unidad denominada espacio-tiempo, la cual ha pasado de ser un escenario estático donde ocurre la física a ser una parte más de la física [10]. En estricto rigor, en las ecuaciones aparece un tensor $G_{\mu\nu}$ (que determina la geometría) conocido como tensor de Einstein, construido mediante el escalar de Ricci (o curvatura escalar), y el tensor de Ricci; ambos se pueden definir como una medida de la curvatura del espacio-tiempo. La componente asociada en describir la fuente de materia, que induce esta curvatura, se encuentra definida por el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Cada uno de estos tensores se obtienen por medio de una acción funcional S , donde se presenta una sección correspondiente al campo gravitacional, conocida como acción de Einstein-Hilbert, y una contribución proveniente de los campos de materia [79].

Modificaciones a las ecuaciones de Einstein contemplan, por ejemplo, la inclusión de una constante cosmológica Λ [11,12], así como la introducción de términos de curvaturas superiores a la gravedad [54,98,121]. En este contexto, estudiaremos cada una de estas ideas encontrando interesantes familias de soluciones de agujeros negros. Éstos los podemos definir intuitivamente como una región finita del espacio-tiempo capaz de generar un campo gravitatorio tal que ninguna partícula (ni siquiera la luz) puede escapar, envuelta por una región denominada horizonte de eventos.

Por otra parte, el estudio de teorías gravitatorias nos entrega información sobre teorías cuánticas de campos fuertemente acopladas (TCC). En particular, las TCC's relevantes en muchas aplicaciones presentes en física corresponden a aquellas invariantes bajo el grupo conforme, esto es: escalamiento, transformaciones de Lorentz y traslaciones de la teoría de la Relatividad Especial. A estas clases de TCC's se les denominan teorías de campos conformes (CFT por sus siglas en inglés). Esta invariancia conforme nos permite traducirla a una simetría geométrica de un espacio-tiempo denominado anti-de Sitter (AdS) [21–24], el cual junto con el espacio-tiempo de Sitter (dS) y Minkowski, corresponden a los tres espacio-tiempos maximalmente

simétricos [12]. Esta dualidad se conoce en la literatura como correspondencia AdS/CFT. Asimismo, la presencia de agujeros negros en las ecuaciones de Einstein son trascendentales en esta correspondencia. Gracias a los trabajos elaborados por J. Bardeen, B. Carter y S. Hawking [78] en la década de 1970, nos permiten dar luces al hecho que los agujeros negros se comportan como un sistema termodinámico, y que existen cuatro leyes que gobiernan su comportamiento, las cuales poseen una similitud con las cuatro leyes de la termodinámica clásica. Más aún, S. Hawking mostró que los agujeros negros son capaces de emitir radiación, con una temperatura característica [76]; y J. Bekenstein se percató que poseen una entropía, la cual es proporcional al área del horizonte de eventos [77]. Cada una de estas propiedades está ligada a la geometría de los agujeros negros, permitiendo obtener la termodinámica de teorías cuánticas de campos fuertemente acopladas, las cuales son en general difíciles de trabajar [24]. De lo anterior, resulta necesaria la búsqueda y el estudio de mecanismos que nos permitan calcular los parámetros termodinámicos asociados a los agujeros negros.

Desde hace algunos años se ha tratado de extender la correspondencia AdS/CFT estudiando teorías de campos fuertemente acopladas con escalamiento anisotrópico, tales como en física de materia condensada [70], donde la gravedad dual de estos sistemas corresponde a los denominados espacio-tiempos de Lifshitz [71], admitiendo una simetría de escala distinta entre las coordenadas espaciales y temporales por medio de un parámetro conocido como exponente dinámico z , donde el caso $z = 1$ corresponde a AdS. La extensión natural de la construcción de [71] corresponde a buscar configuraciones que sean asintóticamente el espacio-tiempo de Lifshitz, siendo conocidos con el nombre de agujeros negros de Lifshitz, encontrándose una variedad importante de estas soluciones en la literatura, ver por ejemplo [72–75].

En la correspondencia AdS/CFT estándar, se ha mostrado que la métrica AdS resuelve las ecuaciones de Einstein con una constante cosmológica negativa sin la necesidad de una fuente de materia [25, 35]. Sin embargo, de manera de sostener la métrica de Lifshitz con $z \neq 1$, estas ecuaciones no son suficientes. Lo anterior conlleva la introducción de fuentes extra de materia, tales como un campo de Proca [72], modelos electrodinámicos más generales [73], o considerar correcciones de curvaturas cuadráticas a la gravedad de Einstein [74, 75].

Por otra parte, desde el punto de vista de la termodinámica de agujeros negros, en la década de 1990, R. Wald [80, 81] construyó una forma diferencial que se identifica a una carga de Noether, la cual está íntimamente vinculada a la entropía de un agujero negro. De la misma manera, se estudiaron formalismos para obtener la masa de estas soluciones. Uno de los primeros acercamientos fue escribir la acción de Einstein-Hilbert en términos de una formulación Hamiltoniana, conocida en la literatura como formalismo ADM (R. Arnowitt, S. Deser y C. Misner) [83], donde la acción gravitacional se encuentra complementada con un término de superficie [79, 84], el cual es esencial para calcular la masa de soluciones asintóticamente planas, tales como el agujero negro de Schwarzschild; sin embargo, para espacio-tiempos más generales se ha mostrado que es insuficiente. Otro procedimiento corresponde al formalismo ADT (L. Abbott, S. Deser y B. Tekin) [86–88], por medio de la construcción de un potencial denominado ADT y de la linealización de las ecuaciones de movimiento, permitiendo calcular la masa de soluciones tales como la de Schwarzschild-AdS [25, 35], cuyo comportamiento asintótico es de curvatura constante negativa. Recientemente, se ha

formulado un nuevo método que considera una generalización cuasilocal del formalismo ADT [92, 93] cuyo resultado principal corresponde al hecho que el potencial ADT *fuera de la cáscara* (en el sentido que la métrica base obtenida de la linealización no necesariamente debe satisfacer las ecuaciones de movimiento en el vacío) se puede expresar en función de un término de superficie, y un potencial denominado de Noether *fuera de la cáscara*. A modo de ejemplo, este formalismo ha sido eficiente con el fin de obtener la masa de soluciones de agujeros negros de Lifshitz considerando correcciones de curvaturas cuadráticas a la gravedad de Einstein [74, 75], donde por medio de la temperatura de Hawking [76] y entropía de Wald [80, 81], se verifica que se sostiene la primera ley de la termodinámica de agujeros negros.

En la práctica, considerar teorías con una fuente de materia es un problema no trivial, debido fundamentalmente a la conjetura de no-pelo [36, 40], la cual establece que todas las soluciones de agujeros negros en las ecuaciones de Einstein-Maxwell de gravitación y electromagnetismo, pueden ser caracterizadas solamente por la masa, carga y momento angular. Una manera de evitar tal conjetura es agregando un campo escalar no mínimamente acoplado a la gravedad, descubierto en la década de 1970 por N. Bocharova, K. Bronnikov y V. Melnikov [41], y J. Bekenstein [42]. Al estudiar campos escalares no mínimamente acoplados, nos referimos a un campo escalar Φ con término cinético $-\frac{1}{2}\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Phi$, junto con un término acoplado al escalar de Ricci de la forma $\xi R\Phi^2$, donde ξ es el parámetro de acoplamiento no minimal. Esta teoría es capaz de sostener configuraciones de agujeros negros, cuyo primer resultado conocido es la solución BBMB (Bocharova-Bronnikov-Melnikov-Bekenstein). No obstante, esta solución posee como deficiencia el hecho que el campo escalar diverge en el horizonte. Una manera de eludir este inconveniente es mediante la inclusión de una constante cosmológica a las ecuaciones de movimiento, cuyo efecto es impulsar esta singularidad detrás del horizonte de eventos [47]. Además, es posible extender la topología del horizonte de eventos, cuyas soluciones son conocidas como agujeros negros topológicos, encontrándose configuraciones con una topología esférica o hiperbólica dependiendo del signo de la constante cosmológica [48, 50]. Hay que tener presente que para todos estos casos, la dimensión del espacio-tiempo es cuatro y el parámetro de acoplamiento no minimal ξ es siempre conforme ($\xi = 1/6$); esto significa que la sección de materia, asociada al campo escalar, posee una invariancia conforme. A su vez, esto conlleva a que la curvatura escalar R puede ser constante, o incluso nula, dependiendo de la teoría, simplificando sustancialmente las ecuaciones de campo. Asimismo, la introducción de dos 3-formas no trivialmente acopladas al campo escalar [51, 52] permite extender esta construcción para un parámetro de acoplamiento no minimal ξ y dimensión del espacio-tiempo D arbitrarios [53]. Desde el punto de vista de la correspondencia AdS/CFT, lo anterior es providencial para la construcción de agujeros negros con un horizonte planar, debido a que estas soluciones han recibido un gran interés en la búsqueda de un mejor entendimiento en superconductores no convencionales [67–69]. Bajo este contexto, en orden de reproducir el diagrama de fase de estos superconductores, el sistema debe admitir agujeros negros con un *pelo escalar* a baja temperatura, el cual debe desaparecer a una alta temperatura.

El modelo asociado a un campo escalar no mínimamente acoplado, expuesto en el párrafo anterior, forma parte de una teoría conocida como la acción de Horndeski [119], correspondiente a la acción tensor-escalar más general cuyas ecuaciones de movimiento respecto a la métrica y al campo escalar son a lo más ecuaciones diferenciales de segundo orden en dimensión cuatro. En particular, estudiamos otra subclase de esta teoría

donde la fuente de materia se encuentra conformada por un campo escalar Φ junto con su término cinético usual, además de un acoplamiento cinético no minimal de la forma $G_{\mu\nu}\nabla^\mu\Phi\nabla^\nu\Phi$. Una de las primeras soluciones de agujeros negros sin constante cosmológica fue encontrada en [125], donde el cuadrado de la derivada del campo escalar es negativo fuera del horizonte de eventos. Tal como en el caso no mínimamente acoplado, este problema ha sido evitado mediante la inclusión de una constante cosmológica, obteniendo en [127] soluciones asintóticamente localmente AdS (o incluso planar). La versión eléctricamente cargada de estos agujeros negros fue estudiada en [128]. A su vez, esta teoría admite soluciones estáticas no triviales con simetría esférica considerando un campo escalar dependiente del tiempo [129]. Más aún, para una elección adecuada de las constantes de acoplamiento, se obtiene una configuración stealth, esto es, una solución no trivial donde tanto la sección gravitatoria como de materia son idénticamente nulas, sobre la métrica de Schwarzschild. En todos estos ejemplos, a fin de eludir el teorema de no-pelo presente en [124], se estudian soluciones donde la componente radial de la corriente conservada se anula, simplificando considerablemente las ecuaciones de campo.

El esquema de esta tesis es como sigue y explica de manera más profunda cada una de las ideas expuestas anteriormente. En el capítulo 2 exponemos, en primer lugar, ciertas nociones correspondientes a una importante rama de la matemática conocida como Geometría Diferencial. Posteriormente, estudiamos la Relatividad General [7–9] y las ecuaciones de Einstein. Finalizando el capítulo, damos a conocer agujeros negros clásicos presentes en la literatura en dimensión cuatro, comenzando con la solución de Schwarzschild [15] (correspondiente a la única solución estática con simetría esférica en el vacío), luego examinaremos soluciones cargadas eléctricamente (conocidas usualmente como de Reissner-Nordström [17, 18]), y el agujero negro de Kerr [19, 20] descubierto en la década de los sesenta, el cual incluye un momento angular.

En el capítulo 3 analizamos de manera concreta la teoría asociada a un campo escalar no mínimamente acoplado a la curvatura escalar, su evolución a lo largo del tiempo y su implicancia en la búsqueda de agujeros negros. Asimismo, estudiamos cómo la inclusión de $(D - 2)$ -campos, correspondientes a $(D - 1)$ -formas, permiten extender la constante de acoplamiento no minimal ξ , encontrando configuraciones planares para las ecuaciones de Einstein [53]. Luego, exponemos un caso particular de la teoría gravitatoria de Lovelock [55, 56]. Para ser más precisos, los coeficientes que aparecen en la gravedad de Lovelock se fijan para que la teoría posea un único vacío de AdS, fijando la constante cosmológica, generando un conjunto de teorías gravitatorias indexadas por un entero k [61], donde $k = 1$ corresponde al Lagrangiano de Einstein-Hilbert con una constante cosmológica. Al final del capítulo, damos a conocer nuestros resultados descubiertos en [1, 2].

El capítulo 4 hace referencia a la termodinámica asociada a los agujeros negros. Una parte importante de este trabajo se concentra en la primera ley de la termodinámica y en formalismos que nos permitan obtener tanto la masa como la entropía de estas soluciones. Adicionalmente, mostramos teorías gravitatorias alternativas mediante la inclusión de términos de curvatura superior a las ecuaciones de Einstein. En particular, estamos interesados en una teoría tridimensional denominada nueva gravedad masiva [108], la cual ha sido estudiada intensamente durante los últimos años y ha permitido la obtención de dos interesantes clases de soluciones de agujeros negros, caracterizadas por un exponente dinámico $z = 1$ [114], la cual corresponde a una solución asintóticamente AdS, y una solución con $z = 3$ [74]. Asimismo, presentamos algunos ejemplos

concretos del cálculo de la masa de agujeros negros conocidos en la literatura por medio del formalismo cuasilocal. Posteriormente, damos a conocer nuestras soluciones presentes en [3, 4].

El capítulo 5 revela la subclase de la teoría de Horndeski [119] dada por la acción de Einstein-Hilbert junto a una constante cosmológica, además de un campo escalar conformado por su término cinético usual y un acoplamiento cinético no minimal. Adicionalmente, mostramos soluciones de agujeros negros recientemente descubiertos, entregando las bases para dar a conocer nuestros resultados presentes en [5, 6].

Finalmente, en el capítulo 6 consideramos las conclusiones y comentarios finales. Se ha agregado también un apéndice para explicar de mejor forma algunas fórmulas de la sección 4.5.

Artículos aceptados y publicados presentes en la tesis:

1. M. Bravo Gaete and M. Hassaine, *Topological black holes for Einstein-Gauss-Bonnet gravity with a nonminimal scalar field*, Phys. Rev. D **88**, 104011 (2013) [arXiv:1308.3076 [hep-th]].
2. M. Bravo Gaete and M. Hassaine, *Planar AdS black holes in Lovelock gravity with a nonminimal scalar field*, JHEP **1311**, 177 (2013) [arXiv:1309.3338 [hep-th]].
3. E. Ayón-Beato, M. Bravo Gaete, F. Correa, M. Hassaine, M. M. Juárez-Aubry and J. Oliva, *First law and anisotropic Cardy formula for three-dimensional Lifshitz black holes*, Phys. Rev. D **91**, 064006 (2015) [arXiv:1501.01244 [gr-qc]].
4. M. Bravo Gaete and M. Hassaine, *Thermodynamics of charged Lifshitz black holes with quadratic corrections*, Phys. Rev. D **91**, 064038 (2015)[arXiv:1501.03348 [hep-th]].
5. M. Bravo Gaete and M. Hassaine, *Lifshitz black holes with a time-dependent scalar field in Horndeski theory*, Phys. Rev. D **89**, 104028 (2014) [arXiv:1312.7736 [hep-th]].
6. M. Bravo Gaete and M. Hassaine, *Thermodynamics of a BTZ black hole solution with an Horndeski source*, Phys. Rev. D **90**, 024008 (2014) [arXiv:1405.4935 [hep-th]].

Capítulo 2

Preliminares

En todos los sentidos, tanto la matemática como la física son dos disciplinas hermanas que se necesitan una de la otra, pues para analizar cualquier fenómeno resulta necesario un conjunto de reglas que traten de explicarlo, así como también de expresiones matemáticas que las sostengan. En particular, la teoría de la Relatividad General no se encuentra ajena a esta alianza. Es por ello que este capítulo se centra en estos temas y está organizado como sigue. En la sección 2.1 estudiamos los conceptos asociados a la Geometría Diferencial, cimentando las bases para las ecuaciones de Einstein, para luego en la sección 2.2 dar a conocer el Principio de Equivalencia, junto con la formulación Lagrangiana de la gravedad de Einstein. Finalmente, en la sección 2.3 se exponen soluciones de agujeros negros clásicos presentes en la literatura.

2.1. Geometría Diferencial

Antes de tener en consideración los conceptos físicos relacionados a la Relatividad General y las ecuaciones de Einstein, se debe tener en cuenta ciertas nociones de carácter matemático, tales como por ejemplo el concepto de variedad diferenciable, el cual, intuitivamente, es un conjunto que localmente puede ser descrito como \mathbb{R}^n . Formalmente tenemos [12, 13]

Definición 1 *Una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff \mathcal{M} , tal que para todo punto $p \in \mathcal{M}$ existe un entorno \mathcal{U} homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n . Algunos ejemplos de variedades son*

1. *El mismo \mathbb{R}^n , incluyendo la recta \mathbb{R} y el plano \mathbb{R}^2 .*
2. *La n -esfera S^n , la cual puede ser vista como el lugar geométrico de todos los puntos de una cierta distancia fija desde el origen en \mathbb{R}^{n+1} .*
3. *El N -Toro T^n , el cual resulta tomando un cubo n -dimensional e identificando sus lados opuestos.*

Definición 2 *Una carta, denotada por (\mathcal{U}, ϕ) , de la variedad topológica \mathcal{M} es un par compuesto por un abierto \mathcal{U} de \mathcal{M} y un homeomorfismo $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$.*

Definición 3 Un atlas \mathcal{C}^∞ de la variedad \mathcal{M} es un conjunto de cartas $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ tal que

1. Cubre completamente a la variedad \mathcal{M} , esto es $\mathcal{M} = \bigcup_\alpha U_\alpha$.
2. Satisfacen la compatibilidad de cartas, esto es, si $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$, entonces la función de transición entre ambas $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ corresponde a una función \mathcal{C}^∞ entre abiertos en \mathbb{R}^n .

Definición 4 Una variedad diferenciable \mathcal{C}^∞ es una variedad topológica \mathcal{M} que posee un atlas \mathcal{C}^∞ .

Definición 5 Llamaremos a las coordenadas x^μ del punto p de la variedad \mathcal{M} , asociada a una carta $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ que la contenga, a las coordenadas de $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$.

Definición 6 Consideremos una función $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, denotaremos de la misma forma a su correspondiente en coordenadas locales, esto es $f(x^\mu) := f \circ \phi^{-1}(x^\mu) = f(p)$. Una función f es \mathcal{C}^∞ si y sólo si $f \circ \phi^{-1}$ lo es.

Una vez elaborado este trabajo preparatorio, a continuación estudiaremos varios tipos de estructuras asociadas a la variedad \mathcal{M} .

2.1.1. Espacio tangente

Consideremos una parametrización $\gamma(t)$ de clase \mathcal{C}^∞ de una curva en la variedad \mathcal{M} , esto es una aplicación

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M},$$

con $\gamma(t_0) = p \in \mathcal{M}$. Sea \mathcal{D} el conjunto de funciones diferenciables sobre \mathcal{M} en p .

Definición 7 El vector tangente a la curva γ en t_0 es una aplicación $v(f)|_{\gamma(t_0)} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v(f)|_{\gamma(t_0)} = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t_0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Definición 8 Un vector tangente en p es el vector tangente en $t = t_0$ para alguna curva γ sobre \mathcal{M} , con $\gamma(t_0) = p$.

Definición 9 El conjunto de todos los vectores tangentes a la variedad \mathcal{M} de dimensión n en el punto p es un espacio vectorial cuya dimensión coincide con la de la variedad, denominado espacio vectorial tangente al punto p , el cual lo denotaremos como $T_p\mathcal{M}$. Dada su condición de espacio vectorial, un punto $p = \gamma(t_0)$ se puede escribir como

$$p = \sum_{\mu=1}^n v^\mu e_\mu|_p := v^\mu e_\mu|_p,$$

donde utilizaremos el convenio de sumación de Einstein y el conjunto de vectores $e_\mu|_p$ corresponden a una base coordenada del espacio $T_p\mathcal{M}$, dada por

$$e_\mu|_p = \left. \frac{d(f \circ \phi^{-1})}{dx^\mu} \right|_p.$$

De ahora en adelante, salvo que existan confusiones, omitiremos el término $e_\mu|_p$ y lo escribiremos simplemente como e_μ .

2.1.2. Espacio dual

Una vez que hemos establecido el concepto de espacio vectorial tangente, podemos definir otro espacio vectorial asociado de igual dimensión.

Definición 10 *El espacio vectorial dual, el cual denotaremos como $T_p^*\mathcal{M}$, es el espacio de todas las aplicaciones lineales ω del espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ a \mathbb{R} , esto es*

$$\omega : T_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (2.1.1)$$

Definición 11 *Dada una base e_μ del espacio tangente $T_p\mathcal{M}$, podemos construir un conjunto de vectores duales θ^ν de $T_p^*\mathcal{M}$ tal que*

$$\theta^\nu(e_\mu) = \delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu, \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Este conjunto es linealmente independiente y, por lo tanto, forman una base, conocida como base dual. Por consiguiente, todo vector dual ω de $T_p^\mathcal{M}$ puede ser escrito como $\omega = \omega_\mu \theta^\mu$.*

En la literatura, es común que los elementos de $T_p\mathcal{M}$ también sean conocidos como *vectores covariantes* y los elementos del espacio vectorial dual $T_p^*\mathcal{M}$ como *vectores contravariantes*.

2.1.3. Tensores y operaciones con tensores

Una generalización de los vectores y vectores duales corresponde a la noción de *tensor*.

Definición 12 *Un tensor T de tipo (k, l) es una aplicación multilinear sobre una colección de vectores duales y vectores a \mathbb{R}*

$$T : \underbrace{T_p^*\mathcal{M} \times \dots \times T_p^*\mathcal{M}}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \times \dots \times T_p\mathcal{M}}_{l \text{ veces}} \longrightarrow \mathbb{R},$$

donde \times denota el producto Cartesiano, mientras que la multilinealidad corresponde al hecho que el tensor actúa linealmente sobre cada uno de sus argumentos.

Con la definición anterior, tenemos que un tensor tipo $(0, 0)$ corresponde a un escalar, un $(1, 0)$ -tensor es un vector y un $(0, 1)$ -tensor es un vector dual.

El espacio de todos los (k, l) -tensores es un espacio vectorial, sumando tensores y multiplicando un tensor por un escalar real. Dado lo anterior, es necesaria la definición de una base, para ello utilizaremos la operación conocida como *producto tensorial*, denotada como \otimes .

Definición 13 *Sea T un (k, l) -tensor y S un (m, n) -tensor, definimos un $(k + m, l + n)$ -tensor $T \otimes S$ como*

$$\begin{aligned} T \otimes S(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k+m)}, v^{(1)}, \dots, v^{(l+n)}) &:= T(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, v^{(1)}, \dots, v^{(l)}) \\ &\times S(\omega^{(k+1)}, \dots, \omega^{(k+m)}, v^{(l+1)}, \dots, v^{(l+n)}), \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

donde los $\omega^{(i)}$ y $v^{(j)}$ son distintos vectores y vectores duales, con

$$i = \{1, \dots, k + m\}, \quad j = \{1, \dots, l + n\}.$$

Ahora, es posible construir la base para el (k, l) -tensor considerando el siguiente conjunto

$$\{e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_k} \otimes \theta^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \theta^{\nu_l}\}. \quad (2.1.3)$$

Notemos que si la dimensión de la variedad es n , entonces la base tendrá n^{k+l} elementos. Los tensores del tipo $(k, 0)$ corresponden a tensores contravariantes, mientras que los tensores $(0, l)$ son tensores covariantes. Finalmente, podemos escribir un (k, l) -tensor arbitrario como

$$T = T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_k} \otimes \theta^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \theta^{\nu_l}. \quad (2.1.4)$$

De ahora en adelante denotaremos el tensor T por sus componentes $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}$. Asimismo, podemos realizar operaciones a estos tensores de tal manera que mantengan el carácter tensorial:

1. Dados dos (k, l) -tensores T y S podemos considerar la suma y la multiplicación por un escalar, esto es debido a su condición de espacio vectorial.
2. Dado un tensor T de componentes $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}$ en una base arbitraria, se define su *parte simétrica* en los índices covariantes al tensor de componentes

$$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{(\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l)} := \frac{1}{l!} \sum_{\sigma} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\sigma(\nu_1) \sigma(\nu_2) \dots \sigma(\nu_l)}, \quad (2.1.5)$$

donde la suma se extiende a todas las permutaciones σ de los índices $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l$. Análogamente, su *parte antisimétrica* en los índices covariantes es

$$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{[\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l]} := \frac{1}{l!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\sigma(\nu_1) \sigma(\nu_2) \dots \sigma(\nu_l)}, \quad (2.1.6)$$

y $(-1)^{\sigma}$ toma valores positivos o negativos dependiendo si la permutación es par o impar.

3. Dado un tensor T de componentes $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}$, podemos realizar la operación *contracción* con respecto al índice i -ésimo como el tensor de componentes $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \alpha_i \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \alpha_i \dots \nu_l}$. Notemos que si tenemos un (k, l) -tensor, la operación contracción lo convierte en un $(k-1, l-1)$ -tensor.

2.1.4. Métrica

Dados los conceptos y definiciones anteriores, veremos a continuación un tensor muy especial conocido como tensor métrico, el cual representa el campo gravitacional en las ecuaciones de Einstein.

Definición 14 *Un tensor métrico, denotado por $g_{\mu\nu}$, en un $(0, 2)$ -tensor simétrico no degenerado, esto es, el determinante de la métrica $|g| := |g_{\mu\nu}|$ es no nulo.*

Esto nos permite definir la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ de la siguiente forma

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} = g_{\tau\sigma} g^{\tau\mu} = \delta_{\sigma}^{\mu}, \quad (2.1.7)$$

la cual es simétrica, debido a la definición de $g_{\mu\nu}$. Esta nueva herramienta nos permite realizar la operación de subir y bajar índices, convirtiendo tensores contravariantes en covariantes y viceversa. Además, es posible

representar el tensor métrico de la forma $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, el cual se conoce en la literatura como *elemento de línea*.

Llamaremos la *signatura* de un tensor métrico a la diferencia entre los valores propios positivos y negativos que posea. Cuando el signo de la métrica para una variedad de dimensión n es de la forma $(+, +, \dots, +)$ la métrica se conoce como *Riemanniana*, mientras que si el signo es $(-, +, \dots, +)$ decimos que es *Lorentziana*. Notemos que para la primera métrica su signatura es n , mientras que la segunda es $n - 2$.

Dada una variedad \mathcal{M} y un vector $v^\mu \in T_p\mathcal{M}$, una *métrica Lorentziana* permite separar este espacio en tres tipos de vectores, estos son:

1. Temporales, tales que $v^\mu v_\mu = g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu < 0$.
2. Espaciales, tales que $v^\mu v_\mu = g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu > 0$.
3. Nulos, tales que $v^\mu v_\mu = g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0$.

Lo anterior define un *cono de luz* en un punto p de la variedad, esquematizado en la Figura 2.1.

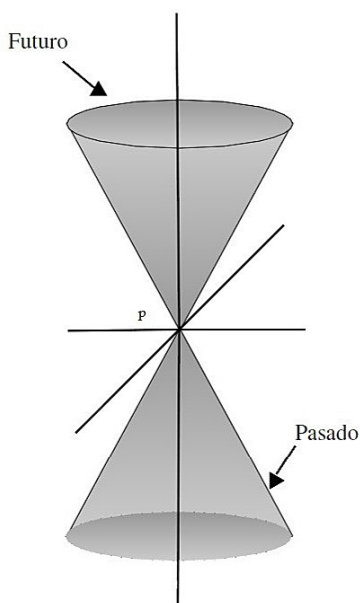


Figura 2.1: Cono de Luz.

2.1.5. Derivada covariante

Una conexión afín ∇ , conocida como derivada covariante, es una asignación que permite relacionar a cada (k, l) - tensor en otro tensor de tipo $(k, l + 1)$, la cual debe tener las siguientes propiedades:

1. Linealidad: $\nabla(aT + bS) = a\nabla T + b\nabla S$.
2. Regla de Leibniz: $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$.

3. Conmuta con la contracción, esto es $\nabla_\mu (T^\lambda_{\lambda\rho}) = (\nabla T)^\lambda_{\lambda\rho}$.

4. Sobre una función ϕ , tenemos que $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$.

Donde $a, b \in \mathbb{R}$ y T, S son tensores. Formalmente, para un tensor T cuyas componentes son $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}$, la derivada covariante es

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} &= \partial_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ &+ \dots + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_k} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \lambda}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l} \\ &- \dots - \Gamma_{\sigma\nu_l}^\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \lambda}, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

y la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ se conoce como los *Símbolos de Christoffel*, los cuales están en función de la métrica $g_{\mu\nu}$ y sus primeras derivadas, esto es

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (2.1.9)$$

2.1.6. Geodésicas

En el espacio \mathbb{R}^n , las rectas son curvas preferidas por dos razones. La primera de ellas es que estas curvas corresponden a la distancia más corta entre dos puntos. La segunda es el hecho que las rectas son las únicas donde el vector tangente es transportado paralelamente a lo largo de la misma curva [10]. Cada uno de estos conceptos se pueden generalizar considerando una variedad \mathcal{M} y la métrica $g_{\mu\nu}$.

Si nos enfocamos en primer lugar en la distancia más corta entre dos puntos, debemos tener presente la siguiente definición:

Definición 15 Una geodésica métrica es la curva $x^\mu(t)$ entre dos puntos p y q cuya longitud s , expresada como

$$s = \int_p^q dt \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}}, \quad (2.1.10)$$

es estacionaria bajo pequeñas variaciones tanto de la curva como de la métrica. Esta geodésica corresponde a la curva por la cual $\delta s = 0$, representada por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_t \left[\frac{\delta L}{\delta (\partial_t x^\mu)} \right] - \frac{\delta L}{\delta x^\mu} = 0, \quad (2.1.11)$$

con $L = \frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}}$ y $\partial_t = \frac{d}{dt}$.

Ahora, consideremos la siguiente acción

$$S = \frac{1}{2} \int_p^q dt g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (2.1.12)$$

donde, por motivos de simplicidad, se define $\dot{x}^\mu := \frac{dx^\mu}{dt}$. Notemos que la acción (2.1.12) es justamente la ecuación de distancia (2.1.10) sin la raíz cuadrada. Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.1.11) obtenemos

$$\partial_t \left(\frac{\delta S}{\delta \dot{x}^\mu} \right) = \frac{1}{2} (\partial_\beta g_{\mu\lambda} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\beta + \partial_\alpha g_{\tau\nu} \dot{x}^\tau \dot{x}^\alpha + g_{\mu\lambda} \ddot{x}^\lambda + g_{\tau\nu} \ddot{x}^\tau), \quad (2.1.13)$$

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = \frac{1}{2} \partial_\tau g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (2.1.14)$$

Reordenando y re-indexando los términos, tenemos que

$$g_{\tau\sigma}\ddot{x}^\sigma + \frac{1}{2}(\partial_\sigma g_{\tau\rho} + \partial_\rho g_{\sigma\tau} - \partial_\tau g_{\rho\sigma})\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho = 0. \quad (2.1.15)$$

Si multiplicamos por la componente métrica $g^{\mu\tau}$ y recordamos la definición de los símbolos de Christoffel (2.1.9) obtenemos

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho = 0. \quad (2.1.16)$$

Por otro lado, para la generalización del concepto del transporte paralelo, consideremos lo siguiente:

Definición 16 Una geodésica afín es aquella curva $x^\mu(t)$ donde su vector tangente $u^\mu = \dot{x}^\mu(t)$ es transportado paralelamente a lo largo de la curva, esto es

$$u^\nu\nabla_\nu u^\mu = \ddot{x}^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho = 0. \quad (2.1.17)$$

Notemos que las ecuaciones (2.1.17) y (2.1.16) son equivalentes, dado que hemos considerando una conexión de la forma (2.1.9). En otras palabras, se tiene que las geodésicas métricas y afines coinciden.

2.1.7. Curvatura, tensores de Riemann y Ricci

De manera natural, tenemos una idea vaga del concepto de lo que es curvatura, nos es intuitivo si lo consideramos en el plano cartesiano, pero en un espacio de dimensiones mayores y en una variedad el concepto ya es difícil. En primer lugar, consideremos la siguiente definición:

Definición 17 Una variedad \mathcal{M} se dice curva si el transporte paralelo de un vector a través de una curva cerrada resulta un vector diferente al retornar al punto de salida.

Dado que tenemos la definición del transporte paralelo dada por la ecuación (2.1.17), la curvatura debe estar en función de la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Para obtener una visión más directa, la curvatura de la variedad la consideraremos como el transporte paralelo de un vector a lo largo de un paralelogramo infinitesimal definido por los vectores x^μ y x^ν .

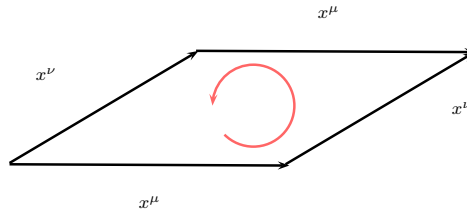


Figura 2.2: Lazo infinitesimal definido por los vectores x^μ y x^ν .

La idea es calcular la diferencia en trasladar un vector, al que denotaremos como v^ρ , infinitesimalmente primero a lo largo de x^μ y luego a lo largo de x^ν , tal como lo muestra la Figura 2.2. Matemáticamente,

corresponde a calcular el conmutador $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ de derivadas covariantes actuando sobre v^ρ , es decir:

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]v^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu v^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu v^\rho, \\
&= \partial_\mu(\nabla_\nu v^\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda v^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \nabla_\nu v^\sigma - (\mu \leftrightarrow \nu), \\
&= \partial_\mu \partial_\nu v^\rho + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho)v^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu v^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda v^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho v^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu v^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma v^\lambda - (\mu \leftrightarrow \nu), \\
&= R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} v^\sigma - 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda \nabla_\lambda v^\rho, \\
&= R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} v^\sigma - T_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda v^\rho,
\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

donde $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ corresponde al *tensor de Riemann*, el cual mide la diferencia del transporte paralelo a lo largo de un paralelogramo infinitesimal, y es una medida de la curvatura encerrada en el paralelogramo. Mientras que $T_{\mu\nu}^\lambda$ es el *tensor de Torsión*, que es la parte antisimétrica y mide hasta qué punto el paralelogramo se encuentra cerrado. Dado lo anterior, el *tensor de Riemann* es dado por

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \tag{2.1.19}$$

Asimismo, dada una métrica $g_{\mu\nu}$, podemos realizar la operación tensorial de bajar índices de la forma

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}, \tag{2.1.20}$$

obteniéndose las siguientes propiedades:

1. De las ecuaciones (2.1.19) y (2.1.20), tenemos que $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico al intercambiar los dos primeros índices, así como también los dos últimos:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}, \tag{2.1.21}$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}. \tag{2.1.22}$$

Además de ser invariante al intercambiar simultáneamente el primer par de índices con los segundos, esto es $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$.

2. Si sumamos las permutaciones cíclicas de los últimos tres índices de $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ el resultado es cero:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0. \tag{2.1.23}$$

3. Finalmente, podemos establecer una relación entre la derivada covariante y el tensor de Riemann a través de lo siguiente

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0. \tag{2.1.24}$$

Lo anterior, se conoce como la *Identidad de Bianchi*.

Realizando una contracción de (2.1.19) obtenemos el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}, \tag{2.1.25}$$

mientras que la traza o curvatura escalar viene dada por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{2.1.26}$$

Tenemos que el escalar de Ricci y la curvatura escalar nos entregan la información correspondiente a la traza del tensor de Riemann, dejando las secciones libres de traza. Éstas son capturadas por el tensor de Weyl

$$W_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{2}{(n-2)}(g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma}R. \quad (2.1.27)$$

Aquí, n corresponde a la dimensión de la variedad. Cabe destacar que una de las propiedades más importantes del tensor de Weyl es ser invariante bajo transformaciones conformes, esto quiere decir que el tensor $W_{\rho\sigma\mu\nu}$ es el mismo al calcularlo bajo la métrica $g_{\mu\nu}$ ó $\omega^2(x)g_{\mu\nu}$, donde $\omega(x)$ es una función no nula de la variedad. Es por esto que este tensor también se le denomina *tensor conforme* [12].

2.1.8. Formas diferenciales

A continuación daremos a conocer una clase especial de tensor conocido como *forma diferencial* (o p -forma).

Definición 18 Una forma diferencial es un $(0, p)$ -tensor completamente antisimétrico.

De lo anterior, es posible concluir que los escalares son 0-forma, así como también los espacios vectoriales duales son 1-forma.

Definición 19 El espacio vectorial de todas las p -formas la denotaremos por Λ^p y el espacio de todas las p -formas sobre una variedad \mathcal{M} la escribiremos como $\Lambda^p(\mathcal{M})$.

Notemos que si n es la dimensión del espacio vectorial, tenemos que $p \leq n$ y el número de p -formas linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión n es

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}. \quad (2.1.28)$$

Definición 20 Dada una p -forma A de componentes $A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p}$ y una q -forma B de componentes $B_{\nu_1\nu_2\dots\nu_q}$, podemos formar una $(p+q)$ -forma a través del producto exterior, el cual lo denotaremos por $A \wedge B$, cuyas componentes son

$$(A \wedge B)_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} A_{[\mu_1\mu_2\dots\mu_p} B_{\mu_{p+1}\mu_2\dots\mu_{p+q}]}. \quad (2.1.29)$$

Notemos que el producto exterior satisface la propiedad $(A \wedge B) = (-1)^{pq}(B \wedge A)$.

Definición 21 La derivada exterior, la cual la denotaremos por d , es una operación que permite diferenciar una p -forma, obteniéndose una $(p+1)$ -forma. Sea A una p -forma, entonces la derivada exterior correspondiente es

$$(dA)_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{p+1}} = (p+1)\partial_{[\mu_1} A_{\mu_2\dots\mu_{p+1}]}, \quad (2.1.30)$$

donde la derivada del producto exterior satisface:

Definición 22 Sea ω una p -forma y σ una q -forma, entonces tenemos que

$$d(\omega \wedge \sigma) = (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^p \omega \wedge (d\sigma). \quad (2.1.31)$$

Notemos que si tenemos una p -forma A arbitraria y aplicamos la diferencial de su diferencial, ésta se anula, es decir, $d(dA) = 0$, el cual se escribe frecuentemente como $d^2 = 0$. Esto nos permite definir:

Definición 23 Una p -forma A se dice cerrada si su diferencial se anula, es decir $dA = 0$, mientras que una p -forma A se dice exacta si $dA = B$ para alguna $(p-1)$ -forma B .

De lo anterior, tenemos que toda forma exacta es cerrada, pero no siempre el recíproco es cierto. Ahora, sobre una variedad \mathcal{M} podemos definir un nuevo espacio vectorial, el cual denominaremos $H^p(\mathcal{M})$, como las formas cerradas módulo las formas exactas [12]

$$H^p(\mathcal{M}) = \frac{Z^p(\mathcal{M})}{B^p(\mathcal{M})}, \quad (2.1.32)$$

cuyos elementos son conocidos como *clases de cohomología*. Las p -formas cerradas se encuentran en el espacio vectorial $Z^p(\mathcal{M})$ y las p -formas exactas en $B^p(\mathcal{M})$. Además, de la ecuación (2.1.32) tenemos que dos p -formas cerradas definen la misma clase de cohomología si la diferencia corresponde a una forma exacta.

Para finalizar, a continuación daremos a conocer el operador $(*)$ de Hodge. Para ello, necesitamos las siguientes definiciones:

Definición 24 El símbolo de Levi-Civita se define como:

$$\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} = \begin{cases} +1, & \text{si } \mu_1 \dots \mu_n \text{ es una permutación par sobre } (1, 2, \dots, n-1, n), \\ -1, & \text{si } \mu_1 \dots \mu_n \text{ es una permutación impar sobre } (1, 2, \dots, n-1, n), \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Definición 25 El tensor de Levi-Civita, se define como:

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sqrt{|g|} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n},$$

donde $|g|$ corresponde al determinante de la métrica.

Con lo anterior, estamos en condiciones de definir:

Definición 26 El operador de Hodge $(*)$ sobre una variedad \mathcal{M} de dimensión n es una aplicación $\Lambda^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^{(n-p)}(\mathcal{M})$ dado por:

$$(*A)_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_p}{}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} A_{\nu_1 \dots \nu_p}. \quad (2.1.33)$$

Notemos que si aplicamos el operador dos veces, tenemos que $**A = (-1)^{s+p(n-p)} A$. Es decir, retornamos a la p -forma original, salvo por un signo. Aquí s corresponde al número de signos negativos existentes en los valores propios de la métrica $g_{\mu\nu}$.

2.1.9. Derivada de Lie y vectores de Killing

Consideremos dos variedades \mathcal{M} y \mathcal{N} las cuales no necesariamente tienen la misma dimensión, con sistemas de coordenadas x^μ y y^ν respectivamente. Sea $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ una aplicación suave y $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, además de la composición $f \circ \varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. De manera natural, φ induce una aplicación tal que, si $V(p)$ es un vector en el punto $p \in \mathcal{M}$, el *pushforward* sobre el vector φ_*V en el punto $\varphi(p) \in \mathcal{N}$ viene dado por

$$(\varphi_*V)(f) = V(f \circ \varphi). \quad (2.1.34)$$

A su vez, podemos considerar el operador φ_* como

$$(\varphi_*V)^\nu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} V^\mu = (\varphi^*)^\nu_\mu V^\mu. \quad (2.1.35)$$

De manera análoga, la aplicación φ induce un *pullback* de vectores duales en $\varphi(p)$ a vectores duales en p de la forma

$$(\varphi^*\omega)(V) = \omega(\varphi_*V), \quad (2.1.36)$$

donde ω es una 1-forma sobre la variedad \mathcal{N} . Notemos que lo anterior lo podemos describir como

$$(\varphi^*\omega)_\mu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \omega_\nu = (\varphi^*)^\nu_\mu \omega_\nu. \quad (2.1.37)$$

Podemos extender las aplicaciones φ^* y φ_* sobre $(0, l)$ -tensores y $(k, 0)$ -tensores respectivamente. En efecto, sea $T_{\nu_1 \dots \nu_l}$ un $(0, l)$ -tensor sobre \mathcal{N} y $S^{\mu_1 \dots \mu_k}$ un $(k, 0)$ -tensor sobre \mathcal{M} , entonces tenemos

$$(\varphi^*T)(V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) = T(\varphi_*V^{(1)}, \dots, \varphi_*V^{(l)}), \quad (2.1.38)$$

$$(\varphi_*S)(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}) = S(\varphi^*\omega^{(1)}, \dots, \varphi^*\omega^{(k)}), \quad (2.1.39)$$

extendiendo las descripciones (2.1.35) y (2.1.37) de la forma

$$(\varphi^*T)_{\mu_1 \dots \mu_l} = \frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{\nu_l}}{\partial x^{\mu_l}} T_{\nu_1 \dots \nu_l}, \quad (2.1.40)$$

$$(\varphi_*S)^{\nu_1 \dots \nu_k} = \frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{\nu_k}}{\partial x^{\mu_k}} S^{\mu_1 \dots \mu_k}. \quad (2.1.41)$$

Consideremos ahora a φ como un difeomorfismo, entonces podemos usar las aplicaciones φ y φ^{-1} para definir el *pushforward* y el *pullback* para tensores arbitrarios. Específicamente, para un (k, l) -tensor $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ sobre la variedad \mathcal{M} , definimos el *pushforward* de la forma

$$(\varphi_*T)(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) = T(\varphi^*\omega^{(1)}, \dots, \varphi^*\omega^{(k)}, [\varphi^{-1}]_*V^{(1)}, \dots, [\varphi^{-1}]_*V^{(l)}). \quad (2.1.42)$$

Aquí, los $\omega^{(i)}$'s corresponden a 1-formas y los $V^{(j)}$'s son vectores, ambos sobre \mathcal{N} . En componentes:

$$(\varphi_*T)^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial y^{\beta_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}. \quad (2.1.43)$$

Además, de la ecuación (2.1.43) podemos definir el *pullback*, pues esta aplicación es la misma que el *pushforward* vía $[\varphi^{-1}]_*$.

Supongamos ahora que $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ es un difeomorfismo. Sea φ_t una familia uniparamétrica de difeomorfismos generados por un campo vectorial v^μ [14]. Para cada parámetro t , compararemos la diferencia

entre el *pullback* sobre un tensor en el punto p y su valor original en ese punto, y aplicaremos el límite cuando $t \rightarrow 0$. Lo anterior define la derivada de Lie respecto al vector v^μ como

$$\mathcal{L}_v T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\varphi_t^* [T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(\varphi_t(p))] - T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(p)}{t} \right\}, \quad (2.1.44)$$

la cual es una aplicación que transforma (k, l) -campos tensoriales a (k, l) -campos tensoriales, satisfaciendo las propiedades de linealidad y regla de Leibniz

$$\mathcal{L}_v (\alpha T + \beta S) = \alpha \mathcal{L}_v T + \beta \mathcal{L}_v S, \quad (2.1.45)$$

$$\mathcal{L}_v (T \otimes S) = (\mathcal{L}_v T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_v S), \quad (2.1.46)$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y T, S son tensores. En general, para un tensor $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ arbitrario, su respectiva derivada de Lie es dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} &= v^\sigma (\nabla_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}) - (\nabla_\sigma v^{\mu_1}) T^{\sigma \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} - \dots - (\nabla_\sigma v^{\mu_k}) T^{\mu_1 \dots \sigma}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\ &+ (\nabla_{\nu_1} v^\sigma) T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\sigma \dots \nu_l} + \dots + (\nabla_{\nu_l} v^\sigma) T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \sigma}. \end{aligned} \quad (2.1.47)$$

En particular, si consideramos el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, entonces

$$\mathcal{L}_v g_{\mu\nu} = v^\sigma (\nabla_\sigma g_{\mu\nu}) + (\nabla_\mu v^\sigma) g_{\sigma\nu} + (\nabla_\nu v^\sigma) g_{\mu\sigma} = \nabla_\mu v_\nu + \nabla_\nu v_\mu. \quad (2.1.48)$$

Definición 27 Un difeomorfismo φ es simétrico sobre un tensor T si

$$\varphi^* T = T. \quad (2.1.49)$$

Definición 28 Supongamos que tenemos una familia uniparamétrica de simetrías φ_t . Si esta familia está generada por un vector v^μ , entonces tenemos que

$$\mathcal{L}_v T = 0. \quad (2.1.50)$$

Las simetrías más importantes son las de la métrica, para lo cual $\varphi^* g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. Un difeomorfismo de este tipo se conoce como una *isometría*.

Definición 29 Si una familia uniparamétrica de isometrías está generada por un vector ξ^μ , este vector pasa a ser un campo vectorial de Killing, donde

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \quad (2.1.51)$$

2.2. Relatividad General

En la sección anterior estudiamos ciertos conceptos asociados a la matemática siendo de gran utilidad a lo largo de esta tesis, en particular en las ecuaciones de Einstein. A continuación daremos a conocer los principios fundamentales que cimentan estas ecuaciones, donde veremos una relación entre la materia y la gravedad, donde esta última corresponde a la manifestación de la curvatura de la variedad espacio-tiempo, es decir, está ligada a una propiedad geométrica.

2.2.1. Principio de Equivalencia

En la *mecánica newtoniana* aparecen dos tipos de masa, la primera de ellas definida como la resistencia de un objeto contra cambios de velocidad, conocida como masa inercial (m_i) y la otra que corresponde a una medida de cómo interaccionan los cuerpos gravitacionalmente, conocida como masa gravitacional (m_g). Dado los experimentos de personas como Galileo Galilei (1564-1642), se comenzaba a tener la noción de la independencia entre la velocidad que alcanzan los objetos en caída libre y las masas de éstos, idea opuesta a la intuición cotidiana. Lo anterior conlleva asumir un vínculo entre la masa inercial y gravitacional dada por [10]

$$\frac{m_g}{m_i} = \text{constante}, \quad (2.2.1)$$

donde los experimentos muestran que la razón m_g/m_i es una constante universal, la cual puede ser tomada como la unidad. Esta igualdad entre las masas inerciales y gravitacionales provocó gran impresión para Albert Einstein, donde en 1907 obtuvo lo que él denominó la *idea más feliz de su vida*. Se dio cuenta que un observador cuando se encuentra en caída libre, éste no siente su propio peso, llevándolo a pensar que se encuentra en una región donde no existe interacción con la gravedad. Lo anterior proporciona el surgimiento de los siguientes dos principios:

Principio 1 (*de equivalencia para campos homogéneos constantes*)

Es equivalente un observador en caída libre en un campo gravitatorio constante y un observador inercial en ausencia de gravedad. Es imposible determinar la diferencia (localmente) entre estas dos situaciones a base de experimentos.

Principio 2 (*para aceleraciones constantes*)

Un observador en movimiento uniformemente acelerado es equivalente a un observador inercial en un campo gravitatorio constante. Es imposible determinar la diferencia (localmente) de estas dos situaciones a base de experimentos.

Sin embargo, lo anterior sólo es válido si consideramos campos gravitatorios constantes, esto es, en regiones pequeñas cercanas a objetos de superficies grandes. Si ahora consideramos campos no homogéneos, no es posible validar la relación entre observadores inerciales y en caída libre. Los efectos que nota un observador en estos campos se conocen como *fuerzas de marea* [10], haciendo que logre diferenciar un sistema inercial de uno acelerado. No obstante, a escalas pequeñas estas fuerzas de marea también son pequeñas. Ello implica que, localmente el campo gravitatorio es constante y entrega el siguiente nuevo principio:

Principio 3 (*formulación general*)

Observadores en caída libre en un campo gravitatorio son localmente equivalentes a observadores inerciales. No hay experimentos que puedan distinguirlos (localmente).

Sin embargo, un mismo observador arbitrario podría estudiar un fenómeno físico en cualquier marco de referencia y debería obtener las mismas leyes físicas, aunque descritas en otras coordenadas, lo que se traduce en:

Principio 4 (de Covariancia)

Las leyes de la física deben ser las mismas en todos los sistemas de referencia.

En la práctica, ello implica que una ley es válida si es válida en la Relatividad Especial y debe ser escrita de manera covariante, es decir, en función de objetos que transformen bien bajo cambios de coordenadas. Dado estos principios, se levanta la idea de la condición de la gravedad como *universal*; la cual interactúa con todas las partículas de la misma forma y que corresponde a la manifestación de la curvatura de la variedad espacio-tiempo.

2.2.2. Tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ y las ecuaciones de Einstein

De la relación entre la gravedad y la curvatura del espacio-tiempo nace la interrogante, ¿qué provoca la curvatura de esta variedad?, de la gravedad newtoniana, sabemos que una de las fuentes es la masa de un cuerpo en el espacio. Lo anterior es cierto, pero existen otras fuentes que inducen la curvatura. De la teoría de Relatividad Especial se tiene que la masa corresponde a una manifestación de la energía. En general, tenemos que la gravedad se acopla a la energía y el momento del espacio-tiempo, incluida la energía de cualquier tipo de campos presentes o de la propia curvatura del espacio-tiempo [10]. Todo lo anterior se resume en el tensor conocido como *tensor de energía-momento* el cual lo denotaremos por $T_{\mu\nu}$, y dada una métrica $g_{\mu\nu}$ podemos realizar las operaciones de subir y bajar índices. Además, por la Ley de Conservación de la Energía tenemos que

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.2.2)$$

Con todo lo anterior, estamos en condiciones de mostrar las ecuaciones de Einstein. Dado que la gravedad está asociada a la geometría, por el Principio de Equivalencia tenemos en primera instancia una relación entre el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ y la métrica $g_{\mu\nu}$ (con sus derivadas), pues la curvatura corresponde a una propiedad geométrica del espacio-tiempo. Además, por el Principio de Covariancia, las ecuaciones deben ser válidas en todos los sistemas de referencia, siendo escritas en notación tensorial. Concretamente, tenemos

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.2.3)$$

donde $G_{\mu\nu}$ se conoce como *tensor de Einstein* y κ es una constante que corresponde a $\kappa = 8\pi G$. Notemos que la ecuación anterior nos dice justamente lo que se desea, *cómo la curvatura del espacio-tiempo reacciona ante la presencia del tensor de energía-momento*. Si consideramos un espacio-tiempo de dimensión cuatro, podemos multiplicar (2.2.3) por $g^{\mu\nu}$ y obtenemos que

$$-R = \kappa T, \quad (2.2.4)$$

y usando esto, podemos reescribir (2.2.3) como

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (2.2.5)$$

y las ecuaciones de Einstein en el vacío ($T_{\mu\nu} = 0$) corresponden a $R_{\mu\nu} = 0$.

2.2.3. Formulaci3n Lagrangiana

Si consideramos las ecuaciones de movimiento de una acci3n mediante t3cnicas variacionales, entonces podemos obtener un procedimiento para calcular el tensor de energ3a-momento $T_{\mu\nu}$. Por ejemplo, sea S la acci3n de un campo Φ y de su derivada covariante $\nabla_\mu\Phi$

$$S_M = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}(\Phi, \nabla_\mu\Phi) d^n x = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} \tilde{\mathcal{L}}(\Phi, \nabla_\mu\Phi) d^n x, \quad (2.2.6)$$

donde n es la dimensi3n del espacio-tiempo \mathcal{M} . Las ecuaciones de movimiento se pueden obtener mediante un principio variacional exigiendo que la acci3n sea estacionaria bajo variaciones de los campos $\delta\Phi$ y $\delta(\nabla_\mu\Phi)$, anul3ndose en la frontera. La variaci3n de la acci3n (2.2.6) es

$$\delta S_M = \int_{\mathcal{M}} \left[\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \Phi} \delta\Phi + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \nabla_\mu\Phi} \delta \nabla_\mu\Phi \right] \sqrt{-g} d^n x. \quad (2.2.7)$$

De la ecuaci3n anterior, notemos que es posible conmutar la variaci3n de los campos con la derivada covariante debido a que los campos din3micos son independientes del sistema de coordenadas. Integrando por partes, junto a la condici3n de la variaci3n de los campos en la frontera, se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \Phi} - \nabla_\mu \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \nabla_\mu\Phi} = 0. \quad (2.2.8)$$

En particular, si el campo Φ corresponde a la m3trica $g_{\mu\nu}$ el tensor de energ3a-momento se define como

$$T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.2.9)$$

A modo de ejemplo, si consideramos una acci3n de la forma

$$S_\Phi(g_{\mu\nu}, \Phi) = - \int_{\mathcal{M}} \left[\frac{1}{2} \nabla_\mu\Phi \nabla^\mu\Phi + V(\Phi) \right] \sqrt{-g} d^n x, \quad (2.2.10)$$

su respectivo tensor $T_{\mu\nu}^\Phi$ viene dado por

$$T_{\mu\nu}^\Phi = \nabla_\mu\Phi \nabla_\nu\Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\sigma\Phi \nabla^\sigma\Phi - g_{\mu\nu} V(\Phi). \quad (2.2.11)$$

Adicionalmente, de las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.2.8) tenemos que

$$\square\Phi := \nabla^\mu \nabla_\mu\Phi = \frac{dV(\Phi)}{d\Phi}. \quad (2.2.12)$$

La idea ahora es encontrar una acci3n que nos permita obtener las ecuaciones (2.2.3), casualmente no fue encontrada por Albert Einstein sino m3s bien por el matem3tico David Hilbert (1862-1942). La acci3n de Einstein-Hilbert es la siguiente:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (2.2.13)$$

El pr3ximo paso es hallar las ecuaciones de movimiento variando (2.2.13) con respecto a la m3trica, es decir, $\delta g_{\mu\nu}$. Por conveniencia trabajaremos con $\delta g^{\mu\nu}$, donde se tiene una relaci3n entre ambas variaciones dada por

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} \delta g^{\sigma\rho}. \quad (2.2.14)$$

Usando $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, tenemos que

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta\sqrt{-g} R + \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \quad (2.2.15)$$

donde

$$\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta\sqrt{-g} R = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.2.16)$$

$$\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma \left[g_{\mu\nu} \nabla^\sigma (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\lambda (\delta g^{\sigma\lambda}) \right]. \quad (2.2.17)$$

Notemos que (2.2.17) se puede escribir como una divergencia y, por lo tanto, sólo contribuye con un término de superficie, el cual podemos hacerlo cero si exigimos que la variación se anule en la frontera. Finalmente, tenemos que

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.2.18)$$

donde recuperamos las ecuaciones de Einstein como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\kappa} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = 0. \quad (2.2.19)$$

Pero en (2.2.19) sólo hemos incluido la parte gravitacional de la acción, no hemos adicionado términos de los campos materiales (proporcionales al tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$). Sin embargo, podemos considerar una acción total de la forma

$$S_{\text{T}} = S + S_{\text{M}}, \quad (2.2.20)$$

donde S_{M} corresponde a la acción para la materia. Realizando el mismo procedimiento anterior se obtiene que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{T}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\kappa} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{M}}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (2.2.21)$$

Finalmente, definiendo el tensor de energía-momento como (2.2.9) recuperamos las ecuaciones de Einstein de manera completa.

2.3. Agujeros negros clásicos

Albert Einstein pensaba que sus ecuaciones eran de una complejidad tal que nunca se encontraría una solución exacta. Sin embargo, en 1916 Karl Schwarzschild (1873-1916) halló una solución exacta de un objeto estático con simetría esférica [15] y en estos últimos 98 años, decenas de soluciones exactas han sido encontradas [10].

2.3.1. Agujero negro de Schwarzschild

El primer resultado que se estudiará, correspondiente a la *única solución estática con simetría esférica en el vacío*, es el agujero negro de Schwarzschild. Intuitivamente, el concepto de estático se refiere a que no hay una evolución con respecto al tiempo, existiendo un sistema de coordenadas tal que la métrica es

independiente de la coordenada temporal. A su vez, debido a su gran cantidad de simetrías, es la solución no trivial más sencilla. En coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) el elemento de línea es dado por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.3.1)$$

donde $d\Omega^2$ corresponde a la métrica sobre una dos-esfera unitaria S^2 , esto es:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.3.2)$$

mientras que M es una constante interpretada como la masa del agujero negro.

Estructura causal

Para visualizar la geometría de este espacio-tiempo, estudiaremos su respectiva estructura causal considerando las geodésicas radiales nulas. Si tomamos $ds = 0 = d\Omega$ tenemos que

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, \quad (2.3.3)$$

lo cual matemáticamente corresponde a la inclinación de los conos de luz en el plano $t - r$. Notemos que para valores muy grandes de la coordenada r

$$\frac{dt}{dr} = \pm 1. \quad (2.3.4)$$

Sin embargo, si $r \rightarrow 2GM$ entonces $\frac{dt}{dr} \rightarrow \pm\infty$, es decir, los conos de luz comienzan a cerrarse cada vez más, tal como lo muestra la Figura 2.3.

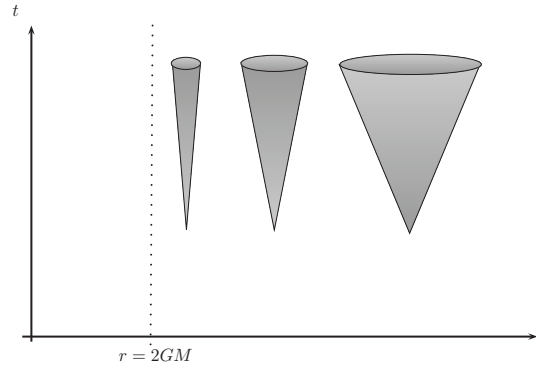


Figura 2.3: Comportamiento de Conos de Luz a lo largo de $r = 2GM$.

Con este sistema de coordenadas, los rayos de luz que se acercan a la superficie $r = 2GM$ nunca lo alcanzan. No obstante, de la ecuación (2.3.3) podemos definir una nueva coordenada radial r^* de la forma

$$(dr^*)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} dr^2, \quad (2.3.5)$$

donde las geodésicas radiales nulas estarán definidas por

$$t = \pm r^* + \text{constante.} \quad (2.3.6)$$

Integrando (2.3.5) se obtiene la *coordenada tortuga* r^*

$$r^* = r + 2GM \log \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right), \quad (2.3.7)$$

donde a lo largo de la tesis, consideraremos $\log := \ln$. En términos de esta nueva coordenada, la métrica de Schwarzschild toma la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2. \quad (2.3.8)$$

Debido a que la coordenada r toma valores $r > 2GM$, la *coordenada tortuga* r^* tomará valores $-\infty < r^* < \infty$. La ventaja ahora es que los conos de luz no se cierran, pero el precio a pagar es el hecho que la superficie $r = 2GM$ ha sido llevada al infinito, como lo muestra la Figura 2.4.

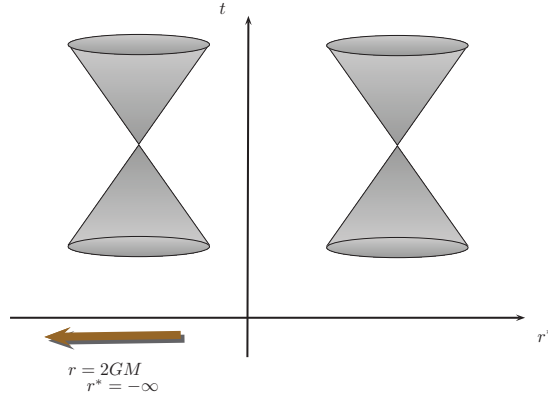


Figura 2.4: Conos de Luz de Schwarzschild en *coordenada tortuga*.

Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Con estas nuevas coordenadas, conviene hacer unas modificaciones para estudiar de una mejor forma la región $r \leq 2GM$. Definamos lo siguiente:

$$v = t + r^*, \quad (2.3.9)$$

$$u = t - r^*. \quad (2.3.10)$$

Las coordenadas (v, r, θ, ϕ) se conocen como de *Eddington-Finkelstein entrantes*. Notemos que v tomará valores $-\infty < v < +\infty$. Además, el elemento de línea (2.3.1) en estas coordenadas viene dado por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.3.11)$$

Es importante notar que en este caso la superficie $r = 2GM$ ya no es singular, debido a que el determinante de la métrica es $g = -r^4 \sin^2 \theta$ y el inverso del tensor métrico existe para este punto. Si consideramos ahora las geodésicas radiales nulas, obtenemos que

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 & \text{(entrantes),} \\ \frac{2}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} & \text{(salientes).} \end{cases}$$

Donde, aunque los conos de luz no se cierran, se puede observar que se inclinan hacia adentro, tal como lo muestra la Figura 2.5. Esto hace que ninguna trayectoria *tipo luz* o *tipo tiempo* dirigida al futuro pueda alcanzar $r > 2GM$ comenzando en $r \leq 2GM$. En efecto, supongamos $r \leq 2GM$, utilizando el elemento de línea dado en (2.3.11), tenemos que

$$2dvdr = -\left[-ds^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dv^2 + r^2d\Omega^2\right]. \quad (2.3.12)$$

Notemos que tanto para trayectorias *tipo tiempo* como de *tipo luz* se tiene que $ds^2 \leq 0$, ello implica que

$$2dvdr \leq 0. \quad (2.3.13)$$

No obstante, debido a la definición de v en (2.3.9), se tiene que $dv > 0$ para las trayectorias dirigidas hacia el futuro y, por lo tanto, se tiene que $dr \leq 0$ (la trayectoria se dirige hacia $r = 0$). Notemos que la igualdad en (2.3.12) se obtiene en $r = 2GM$ y $d\Omega = 0$. La superficie $r = 2GM$ actúa como un punto sin retorno, puesto que toda partícula que entre dentro de esta superficie no puede volver a salir. A este objeto se denomina *agujero negro* y a su superficie como *horizonte de eventos*.

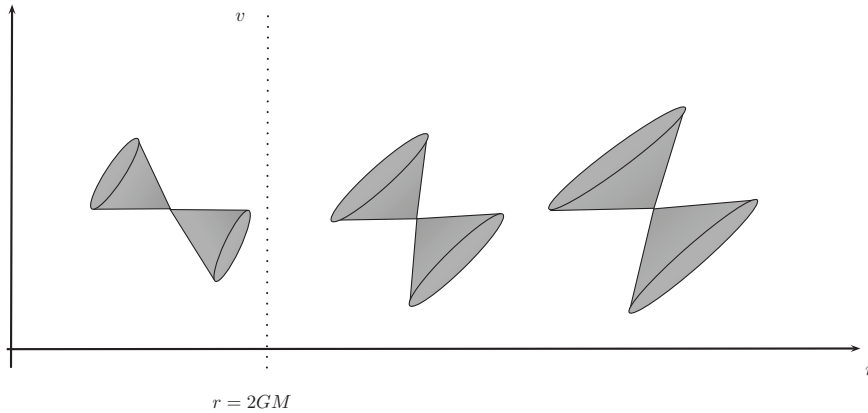


Figura 2.5: Conos de Luz cercanos a la superficie $r = 2GM$ en las coordenadas (v, r) de (2.3.11).

Las coordenadas (u, r, θ, ϕ) , con u dado en (2.3.10), se conocen como de *Eddington-Finkelstein salientes*. Notemos que en este caso la coordenada u también toma valores $-\infty < u < +\infty$. El elemento de línea para la métrica de Schwarzschild en estas coordenadas es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)du^2 - 2dudr + r^2d\Omega^2. \quad (2.3.14)$$

Análogo al caso anterior, $r = 2GM$ es no singularidad y el tensor inverso de la métrica en ese punto existe, es por ello que se puede extender el análisis para $r > 0$. En estas coordenadas, a diferencia de las de *Eddington-Finkelstein entrantes*, los conos de luz se inclinan hacia afuera, tal como lo muestra la Figura 2.6. En este caso se puede cruzar el horizonte, pero considerando solamente trayectorias dirigidas hacia el pasado, por lo que ninguna trayectoria *tipo luz* o *tipo tiempo* dirigida hacia el futuro puede alcanzar $r < 2GM$ comenzando en $r \geq 2GM$. En efecto, la idea es realizar un procedimiento similar al caso anterior, para $r \leq 2GM$

$$2dudr = -ds^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) du^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.3.15)$$

y si consideramos trayectorias *tipo luz* o *tipo tiempo* se tiene $ds^2 \leq 0$, es decir

$$2dudr \geq 0. \quad (2.3.16)$$

Debido a (2.3.10), para trayectorias dirigidas hacia el futuro se tiene $du > 0$, obteniéndose $dr \geq 0$. Por lo tanto, cualquier partícula que se encuentre en $r < 2GM$ se dirigirá hacia la región exterior. A este objeto se le conoce como *agujero blanco* y puede ser considerado como el inverso temporal de un *agujero negro*.

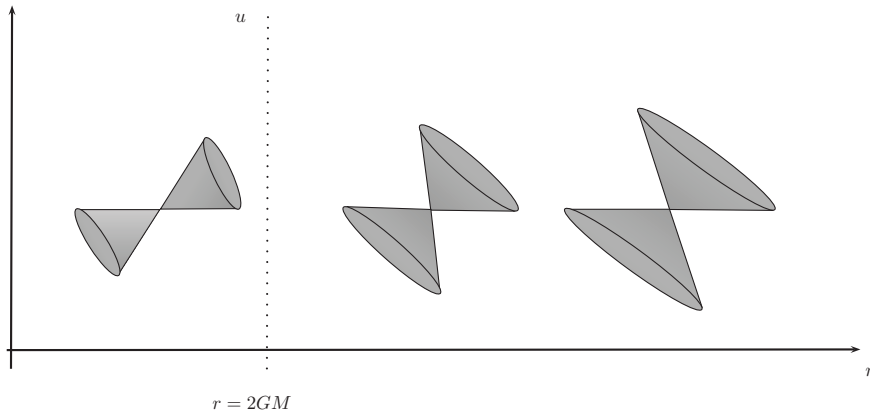


Figura 2.6: Conos de Luz cercanos a la superficie $r = 2GM$ en las coordenadas (u, r) de (2.3.14)

Coordenadas de Kruskal

De las coordenadas de Eddington-Finkelstein, tanto entrantes como salientes, se ha progresado bastante respecto al análisis de la solución de Schwarzschild. A continuación daremos a conocer sistemas de coordenadas que cubren completamente las regiones de esta solución. Comencemos el estudio escribiendo la métrica de Schwarzschild en las coordenadas (u, v, θ, ϕ)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dudv + r^2 d\Omega^2, \quad (2.3.17)$$

donde r está definido implícitamente en términos de v y u por

$$\frac{1}{2}(v - u) = r + 2GM \log\left(\frac{r}{2GM} - 1\right). \quad (2.3.18)$$

No obstante, notemos que g_{uv} se anula en la superficie $r = 2GM$ y, de acuerdo a la ecuación (2.3.18), tenemos que $v = -\infty$ ó $u = +\infty$. Por este motivo, se realizará un cambio de coordenadas que traiga esta superficie a una distancia finita. Uno de los posibles cambios corresponde a realizar

$$V = e^{\frac{v}{4GM}}, \quad (2.3.19)$$

$$U = -e^{-\frac{u}{4GM}}, \quad (2.3.20)$$

y en términos de las coordenadas (V, U, θ, ϕ) la métrica queda

$$ds^2 = -\frac{32G^3M^3}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} dUdV + r^2 d\Omega^2, \quad (2.3.21)$$

donde r queda definida de la forma

$$UV = -\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) e^{\frac{r}{2GM}}. \quad (2.3.22)$$

Debido a la definición de estas coordenadas, la métrica inicial para la cual $r > 2GM$ hace que el rango de estas nuevas coordenadas sean $U < 0$ y $V > 0$. Notemos además que en (2.3.21) no existe problema en $r = 2GM$ y, por lo tanto, podemos extenderla a los casos $U > 0$ y $V < 0$. De esta manera, podemos realizar un diagrama donde las coordenadas U y V se dibujan a un ángulo de 45° , como lo muestra la Figura 2.7. Adicionalmente, de la ecuación (2.3.22), tenemos que las curvas r constante corresponden a las hipérbolas $UV = \text{constante}$, mientras que la superficie $r = 2GM$ corresponde al conjunto $UV = 0$ y la singularidad $r = 0$ corresponde a las hipérbolas $UV = 1$. Por motivos de simplicidad, se ha suprimido las coordenadas angulares (θ, ϕ) y, por lo tanto, cada punto de la Figura 2.7 corresponde a una 2-esfera. Como podemos ver, la figura tiene cuatro regiones claramente definidas. La región *I* es la variedad de Schwarzschild inicial donde $U < 0$ y $V > 0$. Al extender $U > 0$ obtenemos la región *II*, donde su interior corresponde a un *agujero negro*. Notemos que si una partícula entra en la región *II*, no podrá regresar a la región *I* y el punto de *no retorno* $U = 0$ ($r = 2GM$) se denomina *horizonte de eventos futuro*. Asimismo, cualquier trayectoria *tipo tiempo* dirigida hacia el futuro que ingrese a la región, termina en la singularidad $r = 0$. Además de estas dos regiones, en el diagrama aparecen dos regiones adicionales al realizar la continuación analítica $V < 0$. La región *III* corresponde al inverso temporal de la región *II*, el cual es denominado *agujero blanco*, donde la superficie $V = 0$ se denomina *horizonte de eventos pasado* y es lo que nos separa de este agujero. Por último, la región *IV* está desconectada causalmente de *I* y corresponde a su inverso temporal.

Consideremos ahora un nuevo sistema en función de las coordenadas U y V con tal de obtener una coordenada *tipo tiempo* y que el resto de ellas sean *tipo espacio*:

$$T = \frac{1}{2}(U + V), \quad (2.3.23)$$

$$R = \frac{1}{2}(V - U), \quad (2.3.24)$$

o en términos de sus coordenadas originales

$$T = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{4GM}} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right), \quad (2.3.25)$$

$$R = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{4GM}} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right), \quad (2.3.26)$$

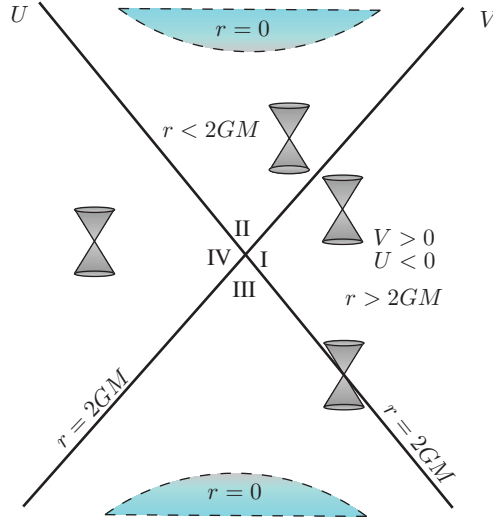


Figura 2.7: Diagrama de *Kruskal*.

donde la métrica toma la forma

$$ds^2 = \frac{32G^3 M^3}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (2.3.27)$$

con r definido de manera implícita como

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right) e^{\frac{r}{2GM}}. \quad (2.3.28)$$

En estas coordenadas, las curvas radiales nulas están dadas por la relación

$$T = \pm R + \text{constante}, \quad (2.3.29)$$

y la superficie $r = 2GM$ corresponde a

$$T = \pm R. \quad (2.3.30)$$

De la ecuación (2.3.28), las superficies para $r = \text{constante}$ corresponden a las hipérbolas

$$T^2 - R^2 = \text{constante}, \quad (2.3.31)$$

mientras que las superficies con t constante corresponden a las líneas rectas

$$\frac{T}{R} = \tanh\left(\frac{t}{4GM}\right). \quad (2.3.32)$$

Esquemáticamente, todo lo anterior se muestra en la Figura 2.8. En la literatura, las coordenadas (T, R, θ, ϕ) son conocidas como coordenadas de *Kruskal*.

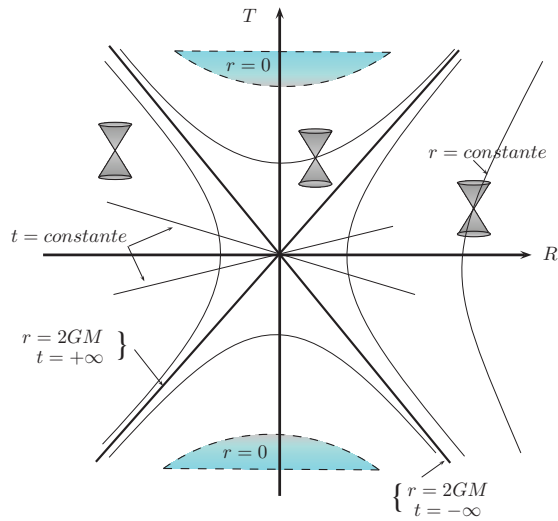


Figura 2.8: Diagrama de *Kruskal* en coordenadas T, R .

Diagrama de Carter Penrose

Con las coordenadas de *Kruskal* se ha recopilado una gran cantidad de información respecto a la métrica de Schwarzschild. Sin embargo, el infinito todavía se encuentra fuera de la variedad. Ahora el objetivo es encontrar una transformación que permita obtener toda la variedad en una región compacta, adicionando los puntos del infinito. Matemáticamente esta transformación se conoce como *compactificación conforme* y corresponde a realizar

$$ds^2 \rightarrow d\tilde{s}^2 = \omega^2(x^\mu) ds^2, \quad (2.3.33)$$

donde la función ω es no nula y debe cumplir la condición $\omega \rightarrow 0$ cuando tenemos infinito espacial $(x^i) \rightarrow \infty$ o infinito temporal $t = (x^0) \rightarrow \infty$. Como primer ejemplo, consideraremos la variedad de Minkowski. En coordenadas polares, este espacio-tiempo viene dado por

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.3.34)$$

con

$$-\infty < t < +\infty, \quad 0 \leq r < +\infty. \quad (2.3.35)$$

Realizando el siguiente cambio de coordenadas

$$u = t - r, \quad v = t + r, \quad (2.3.36)$$

tenemos que el nuevo elemento de línea es el siguiente

$$ds^2 = -dudv + \frac{1}{4}(v - u)^2 d\Omega^2, \quad (2.3.37)$$

y los rangos de estas nuevas coordenadas son

$$-\infty < u, v < +\infty, \quad (2.3.38)$$

con $v \geq u$, pues tenemos que $r = \frac{v-u}{2} \geq 0$. Ahora, notemos que tanto u como v tienen un rango que comprende de $-\infty$ a ∞ . El siguiente paso es realizar un cambio de coordenadas que transporte el infinito a un valor finito. La elección para este cambio es

$$u = \tan U, \quad v = \tan V, \quad (2.3.39)$$

donde ahora los rangos son

$$-\frac{\pi}{2} < U, V < \frac{\pi}{2}, \quad (2.3.40)$$

sujeto a $V \geq U$. Con estas nuevas coordenadas (U, V, θ, ϕ) , el elemento de línea (2.3.37) puede escribirse como

$$ds^2 = \frac{1}{(2 \cos U \cos V)^2} [-4 dU dV + \sin^2(V - U) d\Omega^2]. \quad (2.3.41)$$

De la ecuación (2.3.41), es natural elegir

$$\omega = 2 \cos U \cos V. \quad (2.3.42)$$

Realizando el límite $|U| \rightarrow \frac{\pi}{2}$ o $|V| \rightarrow \frac{\pi}{2}$, tenemos que $\omega \rightarrow 0$, es decir, cuando se va a infinito en las coordenadas iniciales (t, r, θ, ϕ) . Con lo anterior, podemos definir la métrica compactificada de la forma

$$d\tilde{s}^2 = \omega^2 ds^2 = -4 dU dV + \sin^2(V - U) d\Omega^2. \quad (2.3.43)$$

Finalmente, realizando un cambio de coordenadas

$$\eta = U + V, \quad \chi = V - U, \quad (2.3.44)$$

tenemos que sus respectivos rangos, de acuerdo a (2.3.40), están dados por

$$-\pi < \eta < \pi, \quad 0 \leq \chi < \pi, \quad (2.3.45)$$

donde el elemento de línea correspondiente es el siguiente

$$d\tilde{s}^2 = \omega^2 ds^2 = -d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2, \quad (2.3.46)$$

con

$$\omega^2 = \cos \eta + \cos \chi. \quad (2.3.47)$$

Si suprimimos las coordenadas angulares, obtenemos el respectivo diagrama de *Carter Penrose* tal como se observa en la Figura 2.9, el cual consiste en un triángulo que representa la variedad de Minkowski junto con los puntos de su infinito conforme, que corresponden a la frontera del diagrama, donde cada punto corresponde a una 2-esfera.

Notemos que en el diagrama anterior, luego de agregar el infinito al espacio-tiempo de Minkowski, existen cinco regiones claramente definidas, las cuales se explican en el Cuadro 2.1. Además, observemos que todas las trayectorias *tipo tiempo* comienzan en i_- y terminan en i_+ , mientras que las geodésicas radiales nulas comienzan en \mathcal{I}_- y terminan en \mathcal{I}_+ viajando a 45° . Además, todas las geodésicas *tipo espacio* comienzan y terminan en i_0 .

Luego de realizar la compactificación conforme en la variedad de Minkowski, podemos estudiar un análisis similar considerando la solución de Schwarzschild y la métrica dada en (2.3.17), donde las coordenadas toman

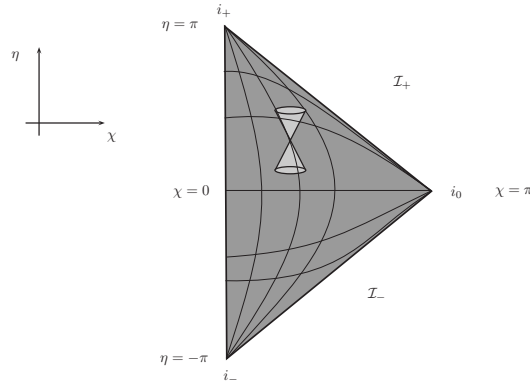


Figura 2.9: Diagrama de Carter Penrose para el espacio-tiempo de Minkowski.

	(η, χ)	(U, V)	(u, v)	(t, r)
i_0 <i>infinito espacial</i>	$\eta = 0$ $\chi = \pi$	$U = -\frac{\pi}{2}$ $V = \frac{\pi}{2}$	$u \rightarrow -\infty$ $v \rightarrow +\infty$	t finito $r \rightarrow +\infty$
i_+ <i>infinito futuro temporal</i>	$\eta = \pi$ $\chi = 0$	$U = \frac{\pi}{2}$ $V = \frac{\pi}{2}$	$u \rightarrow +\infty$ $v \rightarrow +\infty$	$t \rightarrow +\infty$ r finito
i_- <i>infinito pasado temporal</i>	$\eta = -\pi$ $\chi = 0$	$U = -\frac{\pi}{2}$ $V = -\frac{\pi}{2}$	$u \rightarrow -\infty$ $v \rightarrow -\infty$	$t \rightarrow -\infty$ r finito
\mathcal{I}_+ <i>infinito futuro nulo</i>	$\eta = \pi - \chi$ $0 < \chi < \pi$	$V = \frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}$	u finito $v \rightarrow +\infty$	$t \rightarrow +\infty$ $r \rightarrow +\infty$ $r - t$ finito
\mathcal{I}_- <i>infinito pasado nulo</i>	$\eta = -\pi + \chi$ $0 < \chi < \pi$	$U = -\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2}$	$u \rightarrow -\infty$ v finito	$t \rightarrow -\infty$ $r \rightarrow +\infty$ $r + t$ finito

Cuadro 2.1: Regiones del espacio de Minkowski al realizar Compactificación Conforme.

valores en los rangos (2.3.38). Mediante la compactificación conforme y el procedimiento anterior, junto con el cambio de coordenadas (2.3.39), donde estas nuevas variables toman los rangos (2.3.40), el nuevo elemento de línea viene dado por

$$ds^2 = \frac{1}{(2 \cos U \cos V)^2} \left[-4 \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dU dV + (2 \cos U \cos V)^2 r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (2.3.48)$$

Debido a este nuevo cambio, la *coordenada tortuga* (2.3.18) satisface la relación

$$r^* = \frac{\sin(V - U)}{2 \cos U \cos V}, \quad (2.3.49)$$

y la métrica pasa a ser

$$ds^2 = \frac{1}{(2 \cos U \cos V)^2} \left[-4 \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dU dV + \left(\frac{r}{r^*} \right)^2 \sin^2(V - U) d\Omega^2 \right]. \quad (2.3.50)$$

Finalmente, tenemos que

$$d\tilde{s}^2 = \omega^2 ds^2 = -4 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dU dV + \left(\frac{r}{r^*}\right)^2 \sin^2(V - U) d\Omega^2, \quad (2.3.51)$$

con

$$\omega = 2 \cos U \cos V, \quad (2.3.52)$$

donde el diagrama de *Carter Penrose* correspondiente es representado por la Figura 2.10.

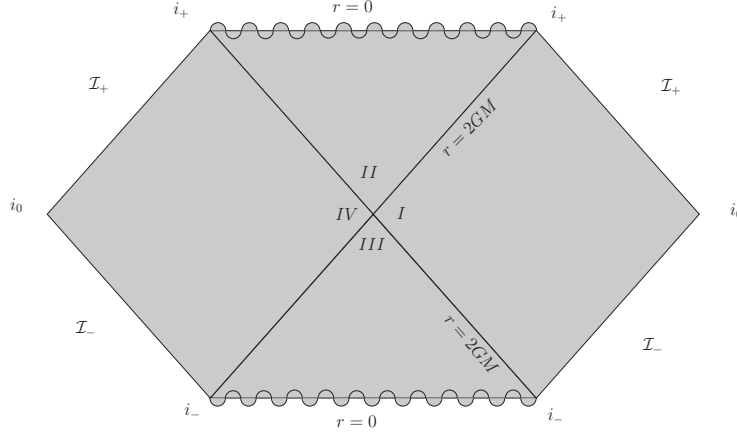


Figura 2.10: Diagrama de Carter Penrose para el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Notemos que la métrica es *asintóticamente plana*, es decir, en el infinito, la métrica pasa a ser de Minkowski. Dado lo anterior, las fronteras \mathcal{I}_\pm e i_0 son iguales al diagrama minkowskiano de la Figura 2.9. Además, observemos que los puntos i_+ y i_- son puntos distintos de la singularidad y por ello existen una gran cantidad de trayectorias *tipo tiempo* que terminan, por ejemplo, en i_+ pero no en la singularidad.

Siendo más explícitos sobre un espacio-tiempo asintóticamente plano, consideremos las siguientes definiciones [16]:

Definición 30 Una variedad $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ se dice *asintóticamente simple* si existe una variedad $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g}_{\mu\nu})$ con frontera $\partial\tilde{\mathcal{M}}$ y una inmersión continua $f: \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ tal que

1. $f(\mathcal{M}) = \tilde{\mathcal{M}} - \partial\tilde{\mathcal{M}}$.
2. Existe una función suave ω en la variedad $\tilde{\mathcal{M}}$ tal que
 - a) $\omega > 0$ en $f(\mathcal{M})$.
 - b) $\omega = 0$ en $\partial\tilde{\mathcal{M}}$.
 - c) $d\omega \neq 0$ en $\partial\tilde{\mathcal{M}}$.

d) Satisface $\tilde{g}_{\mu\nu} = \omega^2 g_{\mu\nu}$.

3. Toda geodésica nula en la variedad \mathcal{M} tiene dos puntos extremos en $\partial\tilde{\mathcal{M}}$.

Definición 31 Una variedad $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ se denomina *débil asintóticamente simple* si existe un abierto $U \subset \mathcal{M}$ que sea isométrico a una vecindad abierta de $\partial\tilde{\mathcal{M}}$, donde $\tilde{\mathcal{M}}$ corresponde a la compactificación conforme de alguna variedad asintóticamente simple.

Definición 32 Una variedad se denomina *asintóticamente vacía* si $R_{\mu\nu} = 0$ en alguna vecindad abierta de $\partial\tilde{\mathcal{M}}$, donde $\tilde{\mathcal{M}}$ es la compactificación conforme de alguna variedad asintóticamente simple.

Definición 33 Una variedad se denomina *asintóticamente plana* si es débil asintóticamente simple y asintóticamente vacía.

2.3.2. Agujero negro de Reissner-Nordström

A continuación estudiaremos soluciones que representan agujeros negros cargados eléctricamente. De las ecuaciones de Einstein (2.2.3), tenemos que el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ de la acción

$$-\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.3.53)$$

es dado por

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\sigma} F_{\nu}{}^{\sigma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho}, \quad (2.3.54)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ corresponde al tensor electromagnético y A_{μ} se conoce como *vector potencial*. Adicionalmente, al variar la acción respecto a $\partial_{\mu} A_{\nu}$ tenemos

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.3.55)$$

Dado que estamos enfocados en una solución con simetría esférica y con campo eléctrico, de la ecuación (2.3.55) tenemos que tensor $F_{\mu\nu}$ adquiere la forma

$$F_{rt} = \frac{Q}{r^2}, \quad (2.3.56)$$

donde la constante de integración Q corresponderá a la *carga eléctrica*. El objetivo ahora es encontrar la métrica de un agujero negro cargado eléctricamente tal que se reduzca a la solución de Schwarzschild cuando la carga sea nula. La solución es conocida usualmente como la métrica de *Reissner-Nordström* [17, 18]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.3.57)$$

donde podemos reescribir el elemento de línea de la forma

$$ds^2 = - \frac{\Delta}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.3.58)$$

con

$$\Delta = r^2 - 2GMr + GQ^2. \quad (2.3.59)$$

Notemos que la métrica (2.3.58) posee una singularidad de curvatura en $r = 0$. Sin embargo, la estructura del horizonte dependerá de aquellas regiones donde $\Delta = 0$. Por motivos de ubicación, podemos escribir (2.3.59) de la forma

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-), \quad (2.3.60)$$

donde

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - GQ^2}. \quad (2.3.61)$$

De lo anterior, tenemos que el comportamiento de la métrica dependerá del valor del discriminante, donde es posible considerar tres casos de interés. Esto último se puede visualizar por medio de la Figura 2.11. Cada uno de los casos serán analizados de manera separada.

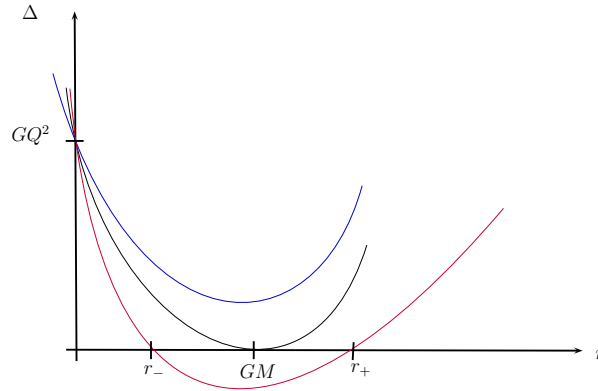


Figura 2.11: Soluciones de la función Δ para la métrica Reissner-Nordström.

Caso $GM^2 < Q^2$

Para este primer caso, las raíces r_{\pm} no son reales, la función Δ es siempre positiva y la métrica no posee singularidades en estos puntos, salvo el caso $r = 0$, como lo muestra la curva superior de la Figura 2.11. Dado lo anterior, la coordenada t es siempre *tipo tiempo* y la coordenada r es siempre *tipo espacio*. Como no hay presencia de horizontes de eventos, tenemos una *singularidad desnuda* y, de acuerdo a la conjetura del censor cósmico, podemos considerar que este caso no se presenta físicamente. Su respectivo diagrama de *Carter Penrose* se muestra en la Figura 2.12. Notemos que asintóticamente el espacio-tiempo es de Minkowski.

Caso $GM^2 > Q^2$

Para esta situación, notemos que $r_{\pm} \in \mathbb{R}$ y la función Δ tiene dos raíces en esos puntos. De la Figura 2.11, considerando la curva inferior, vemos que la función es positiva cuando $r > r_+$ y $r < r_-$ y toma valores negativos para $r_- < r < r_+$. Dado lo anterior, tenemos que la singularidad $r = 0$ es *tipo tiempo*, pero existen dos horizontes que la ocultan, en este caso, se realiza un cambio de coordenadas conveniente, parecido al caso

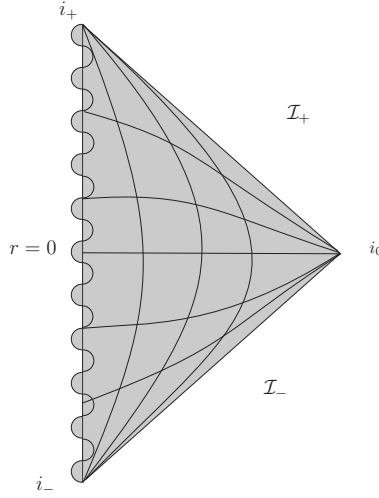


Figura 2.12: Diagrama de *Carter Penrose* considerando $GM^2 < Q^2$.

de Schwarzschild. Su respectivo diagrama de *Penrose* se grafica en la Figura 2.13, donde podemos diferenciar dos regiones claramente definidas, esquematizadas por medio de dos cuadros. El primero de ellos (el cuadro inferior) contiene una singularidad esencial en $r = 0$, donde se observa que ésta no es asintóticamente plana. Sin embargo, la segunda región (cuadro superior) posee una estructura igual a la de Minkowski en la frontera. Adicionalmente, podemos apreciar que cada una de estas dos regiones se repiten de manera infinita, es por eso que sólo se expuso un extracto del diagrama de *Carter Penrose*, donde el comportamiento de cada una de estas regiones depende de los valores de r_{\pm} .

Un fenómeno interesante ocurre en la Figura 2.13, el cual se representa por medio de una flecha. Supongamos que un observador comienza en la región la cual corresponde a la base de la flecha y cae hacia el horizonte $r = r_+$, cuando lo cruza, observamos que la coordenada temporal se vuelve *tipo espacio*, mientras que la coordenada espacial se vuelve *tipo tiempo*. Sin embargo, cuando cruza el horizonte $r = r_-$, ocurre un intercambio nuevamente entre las coordenadas espaciales y temporales, y la caída hacia la singularidad $r = 0$ puede evitarse, cruzando nuevamente el horizonte $r = r_-$, donde el observador es forzado a moverse para cruzar finalmente el horizonte $r = r_+$, esquematizado mediante la punta de la flecha. Lo anterior lo podemos interpretar como *un infinito número de regiones asintóticamente planas conectadas por túneles de agujeros negros*.

Caso $GM^2 = Q^2$

El último caso a considerar es cuando el discriminante de la función Δ es nulo, esto es

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-) = (r - GM)^2. \quad (2.3.62)$$

Particularmente, tenemos que la métrica de Reissner-Nordström es dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{GM}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{GM}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.3.63)$$

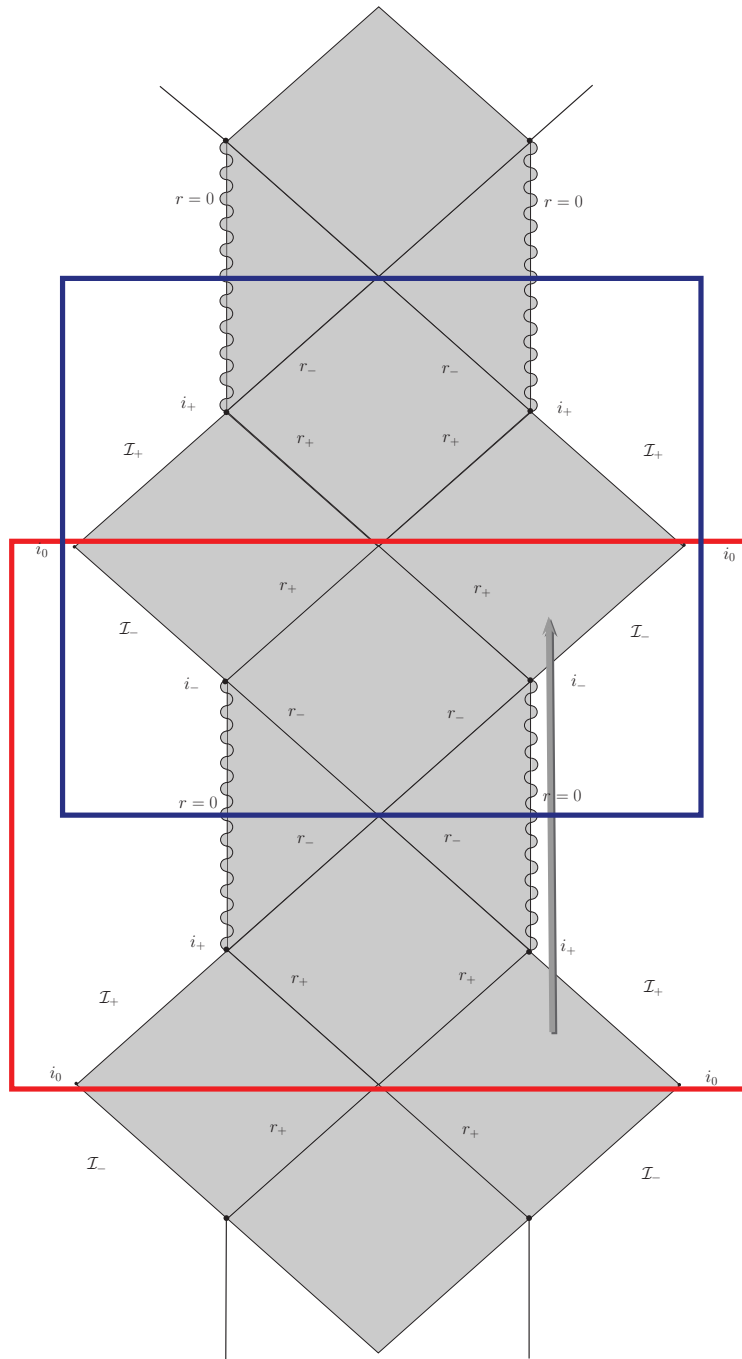


Figura 2.13: Diagrama de *Carter Penrose* considerando $GM^2 > Q^2$.

Este tipo de solución es frecuentemente examinado en gravedad cuántica [12], siendo conocida en la literatura como la solución de *Reissner-Nordström* extrema. Observemos que del elemento de línea (2.3.63) tenemos una singularidad en $r = GM$, el cual representa un horizonte de eventos. Sin embargo, notemos que la coordenada r en ningún momento es *tipo tiempo*; pasa a ser nula en $r = GM$ pero es *tipo espacio* en el resto de los casos. La singularidad en $r = 0$ es *tipo tiempo*, como en las situaciones estudiadas anteriormente. El

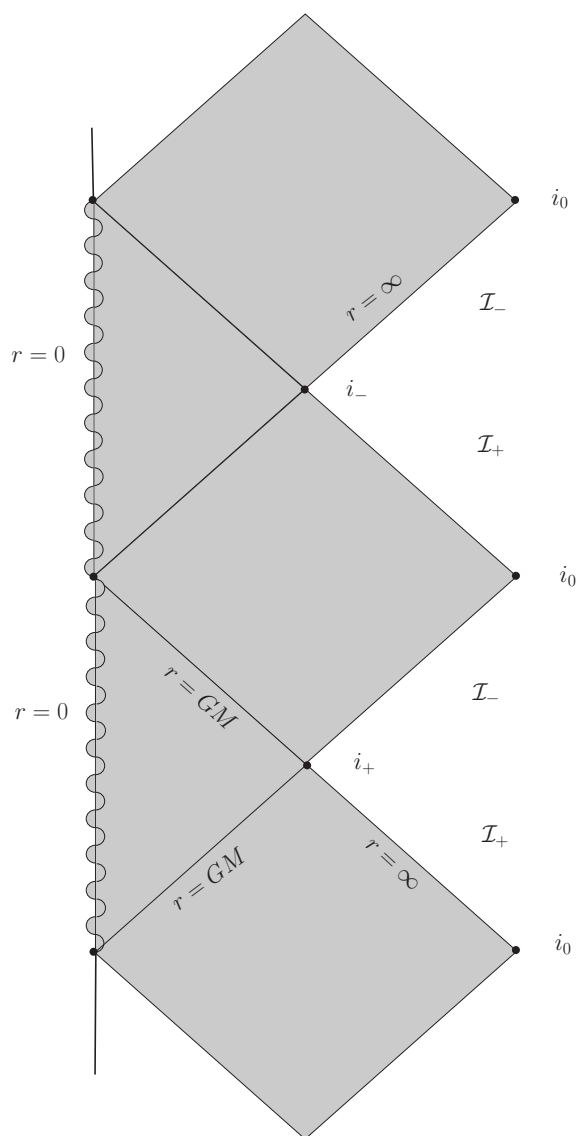


Figura 2.14: Diagrama de *Carter Penrose* considerando $GM^2 = Q^2$.

diagrama de *Carter Penrose*, esquematizado en la Figura 2.14, es similar al caso $GM^2 > Q^2$, con la diferencia que ahora la singularidad se encuentra siempre *a la izquierda*.

2.3.3. Agujero negro de Kerr

Aunque las soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström fueron descubiertas poco tiempo después de la Relatividad General de Einstein, sólo en el año de 1963 se encontró una solución para agujeros negros

con momento angular [19,20]. Consideremos el siguiente elemento de línea en coordenadas de *Boyer-Lindquist*

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho}\right) dt^2 - 2a \left(\frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\rho}\right) \sin^2 \theta dt d\varphi + \frac{\rho}{\Delta} dr^2 + \rho d\theta^2, \\ + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho}\right] \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.3.64)$$

donde tenemos que

$$\Delta = r^2 - 2GMr + a^2 - G(Q^2 + P^2), \quad (2.3.65)$$

$$\rho = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (2.3.66)$$

Para esta solución, M corresponde a la masa y a al momento angular por unidad de masa, esto es

$$a = \frac{J}{M}, \quad (2.3.67)$$

donde J es el momento angular total, mientras que las cargas eléctricas y magnéticas vienen representadas por las constantes Q y P . Esta solución se conoce como la *métrica de Kerr-Newman*, donde los respectivos vectores potenciales son

$$A_t = \frac{Qr - Pa \cos \theta}{\rho}, \quad A_\varphi = \frac{P(r^2 + a^2) \cos \theta - Qar \sin^2 \theta}{\rho}. \quad (2.3.68)$$

En el contexto astrofísico, la gran mayoría de los procesos estelares rotan, pero sin la presencia de cargas apreciables. El espacio-tiempo que describe el comportamiento de uno de estos objetos corresponde a la solución de *Kerr*, caracterizada por una masa M , momento angular a , $P = 0$ y $Q = 0$, la cual estudiaremos a continuación. Del elemento de línea (2.3.64) encontramos una singularidad esencial $\rho = 0$ cuando

$$r = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad (2.3.69)$$

y dos singularidades de coordenadas cuando

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-) = 0, \quad (2.3.70)$$

donde

$$r_\pm = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - a^2}. \quad (2.3.71)$$

De manera análoga a lo realizado en la solución de Reissner-Nordström, de las ecuaciones (2.3.69) y (2.3.71) podemos clasificar tres tipos de soluciones.

Caso $G^2 M^2 < a^2$

En este caso, tenemos que las raíces r_\pm son complejas y conjugadas. No obstante, el análisis correspondiente será considerando la singularidad esencial $\rho = 0$. Para estudiar este comportamiento, es necesario el uso de las coordenadas de *Kerr-Schild* (\tilde{t}, x, y, z) definidas por

$$\tilde{t} = \int \left[dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \right] - r, \quad (2.3.72)$$

$$x + iy = (r + ia) \sin \theta e^{i \int [d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr]}, \quad (2.3.73)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (2.3.74)$$

Usando la transformación de coordenadas anterior, tenemos que la métrica (2.3.64) se convierte en

$$ds^2 = -d\tilde{t}^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2GMr^3}{r^4 + a^2z^2} \left[\frac{r(xdx + ydy) - a(xdx - ydy)}{r^2 + a^2} + \frac{zdz}{r} + d\tilde{t}^2 \right]^2. \quad (2.3.75)$$

Del elemento de línea (2.3.75), al imponer $M = 0$ la métrica se reduce al espacio-tiempo de Minkowski. Notemos que a partir de la ecuación (2.3.73) se obtiene

$$x^2 + y^2 = (r^2 + a^2) \sin^2 \theta, \quad (2.3.76)$$

y utilizando (2.3.74)

$$z^2 = r^2 \cos^2 \theta = r^2 - r^2 \sin^2 \theta. \quad (2.3.77)$$

Combinando las ecuaciones (2.3.76) y (2.3.77)

$$r^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2) r^2 - a^2 z^2 = 0. \quad (2.3.78)$$

Ahora, suponiendo que el parámetro r es una constante no nula, podemos escribir (2.3.78) de la forma

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{z^2}{r^2} = 1 + \frac{a^2}{r^2}, \quad (2.3.79)$$

donde en \mathbb{R}^3 corresponden a elipsoides con focos $x = \pm a$. Volviendo a la singularidad esencial $\rho = 0$ de la métrica de *Kerr*, recordemos que éstas se encuentran en $r = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$ y al reemplazar estos valores en (2.3.76) tenemos que

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (2.3.80)$$

El resultado anterior nos dice que la singularidad $\rho = 0$ corresponde a un anillo de radio a , tal como lo muestra la Figura 2.15. Notemos que la métrica (2.3.75) es no singular en $r = 0$ y, por lo tanto, podemos extender el rango de la coordenada radial a valores negativos.

A diferencia de los diagramas de *Carter Penrose* de las métricas de Schwarzschild y Reissner-Nordström, que corresponden a simetrías esféricas, la métrica de *Kerr* presenta una simetría axial, lo anterior implica que no es posible la visualización de su respectivo diagrama en dos dimensiones. No obstante, es posible trabajar en una serie de cortes que permitan obtener una idea de la forma del diagrama tridimensional de manera completa.

Al realizar cortes angulares, se obtiene que las subvariedades $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$ son *geodésicamente completas*, esto quiere decir que cualquier geodésica, inicialmente tangente a la subvariedad permanecerá siempre tangente a ésta.

Para la subvariedad $\theta = \frac{\pi}{2}$ nos encontramos con la singularidad esencial $\rho = 0$, ubicada en $r = 0$, la cual es *tipo tiempo*. Adicionalmente, la variedad es asintóticamente plana, donde en el diagrama cada punto corresponde a una 1-esfera. Dado que no tenemos horizonte, la singularidad $\rho = 0$ se encuentra desnuda y toda geodésica radial entrante termina en ella, lo anterior se visualiza en la Figura 2.16.

Si consideramos al eje de simetría de la variedad, esto es $\theta = 0$, observamos que no tenemos la presencia de la singularidad $\rho = 0$. Debido a esto, podemos extender analíticamente la coordenada radial a valores negativos. Además, esta subvariedad es asintóticamente plana donde cada punto, análogo a la subvariedad anterior, corresponde a una 1-esfera y dado que $r = 0$ no es una singularidad, aparece en línea punteada, tal como lo muestra la Figura 2.17.

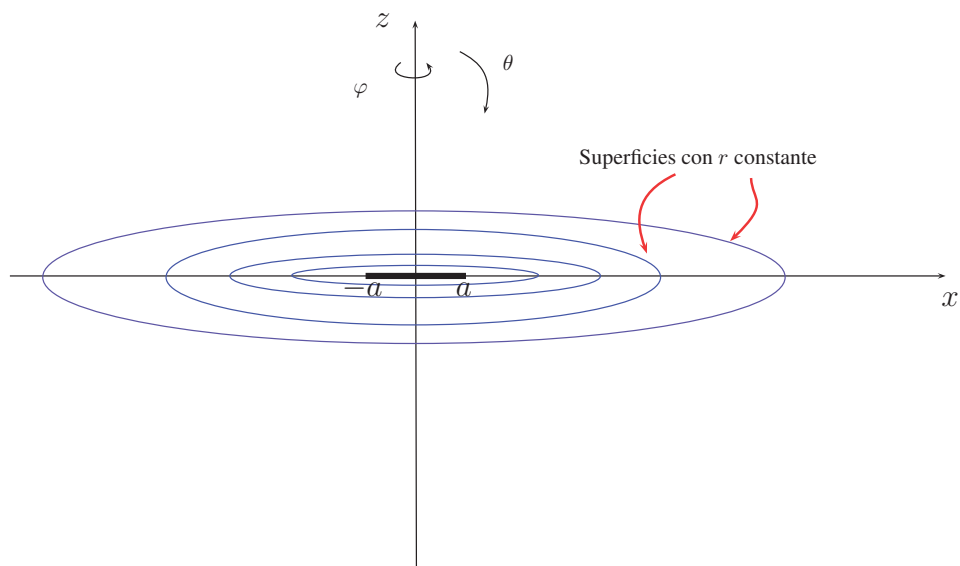


Figura 2.15: Superficies con r constante y singularidad esencial $\rho = 0$.

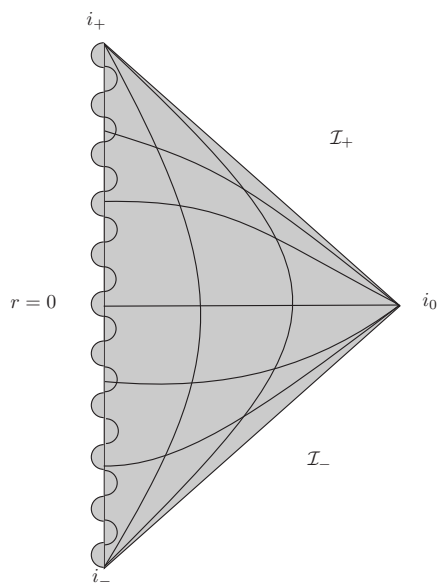


Figura 2.16: Diagrama de *Carter Penrose* considerando $\theta = \frac{\pi}{2}$ y la singularidad $\rho = 0$.

Caso $G^2M^2 > a^2$

El segundo caso a considerar es cuando tenemos dos raíces reales en (2.3.71), las cuales corresponden a singularidades de coordenadas, junto con la singularidad esencial $\rho = 0$. Notemos que la función Δ es positiva

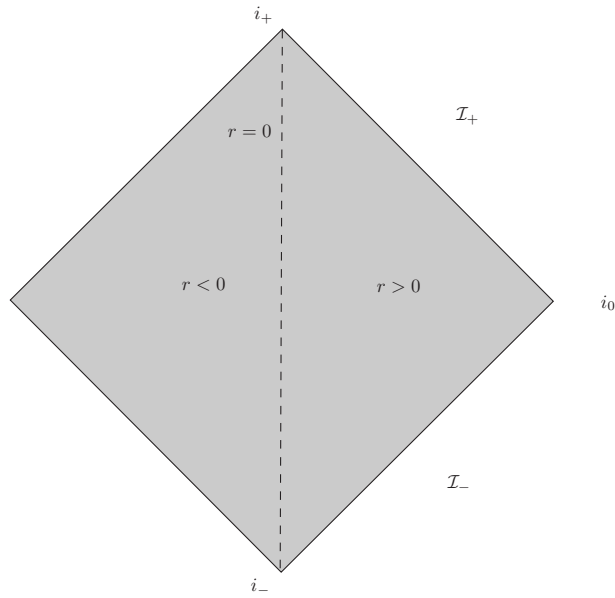


Figura 2.17: Diagrama de *Carter Penrose* considerando $\theta = 0$.

para $r > r_+$ y $r < r_-$, mientras que toma valores negativos en $r_- < r < r_+$. Por lo anterior, se tiene que la singularidad $r = 0$ es *tipo tiempo*. Mediante un cambio adecuado de coordenadas de Eddington-Finkelstein

$$dv = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad (2.3.81)$$

$$d\chi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr, \quad (2.3.82)$$

donde v corresponde a una coordenada temporal y χ angular, obtenemos que la métrica de Kerr toma la forma

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho} \right) dv^2 + 2dvdr - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\rho} dvd\chi - 2a \sin^2 \theta drd\chi \\ & + \rho d\theta^2 + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho} \right] \sin^2 \theta d\chi^2, \end{aligned} \quad (2.3.83)$$

donde se comprueba que $r = r_{\pm}$ son singularidades de coordenadas. En su respectivo diagrama de *Carter Penrose*, tenemos una singularidad esencial $\rho = 0$ la cual en coordenadas de Kerr-Schild (2.3.73) es $x^2 + y^2 = a^2$, además de dos horizontes que corresponden a $r = r_{\pm}$. De la misma manera que el caso anterior, debido a la simetría axial de la variedad, el diagrama de *Carter Penrose* debe realizarse en cortes asintóticamente planos. De esta manera, la singularidad $\rho = 0$ aparece en el corte ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$, pero no en el corte axial $\theta = 0$. Debido a ello, la variedad puede extenderse a los casos $r < 0$. Al fusionar los dos diagramas en una sola representación, obtenemos la Figura 2.18 donde la línea punteada corresponde a la singularidad esencial $\rho = 0$. Notemos que el diagrama se extiende de manera infinita en ambas direcciones.

Caso $G^2M^2 = a^2$

El último caso a estudiar corresponde a la métrica de *Kerr* extrema, esto es cuando

$$\Delta = (r - r_-)(r - r_+) = (r - GM)^2, \quad (2.3.84)$$

donde su respectivo diagrama de *Carter Penrose* está dado por la Figura 2.19. Observemos que la región asintóticamente plana se conecta con la región que posee la singularidad $\rho = 0$, la cual en coordenadas de Kerr-Schild (2.3.73) corresponde a $x^2 + y^2 = a^2$. Además, la región completa, la cual se extiende de manera infinita en ambas direcciones, está compuesta por el corte ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$, el cual posee la singularidad esencial $\rho = 0$, y el corte axial $\theta = 0$. Es importante notar que esta singularidad es *tipo tiempo*, siendo representada mediante una línea punteada.

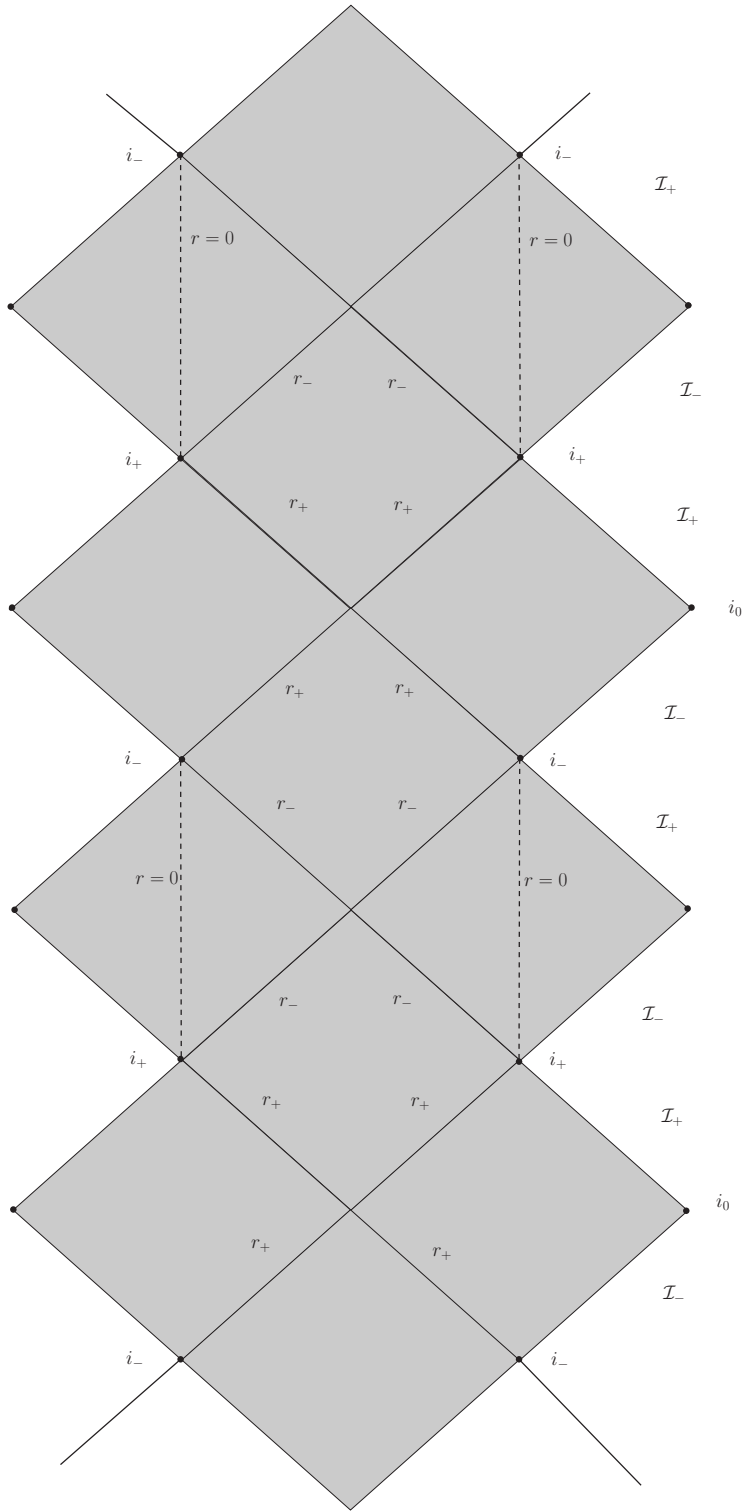


Figura 2.18: Diagrama de *Carter Penrose* considerando $G^2 M^2 > a^2$.

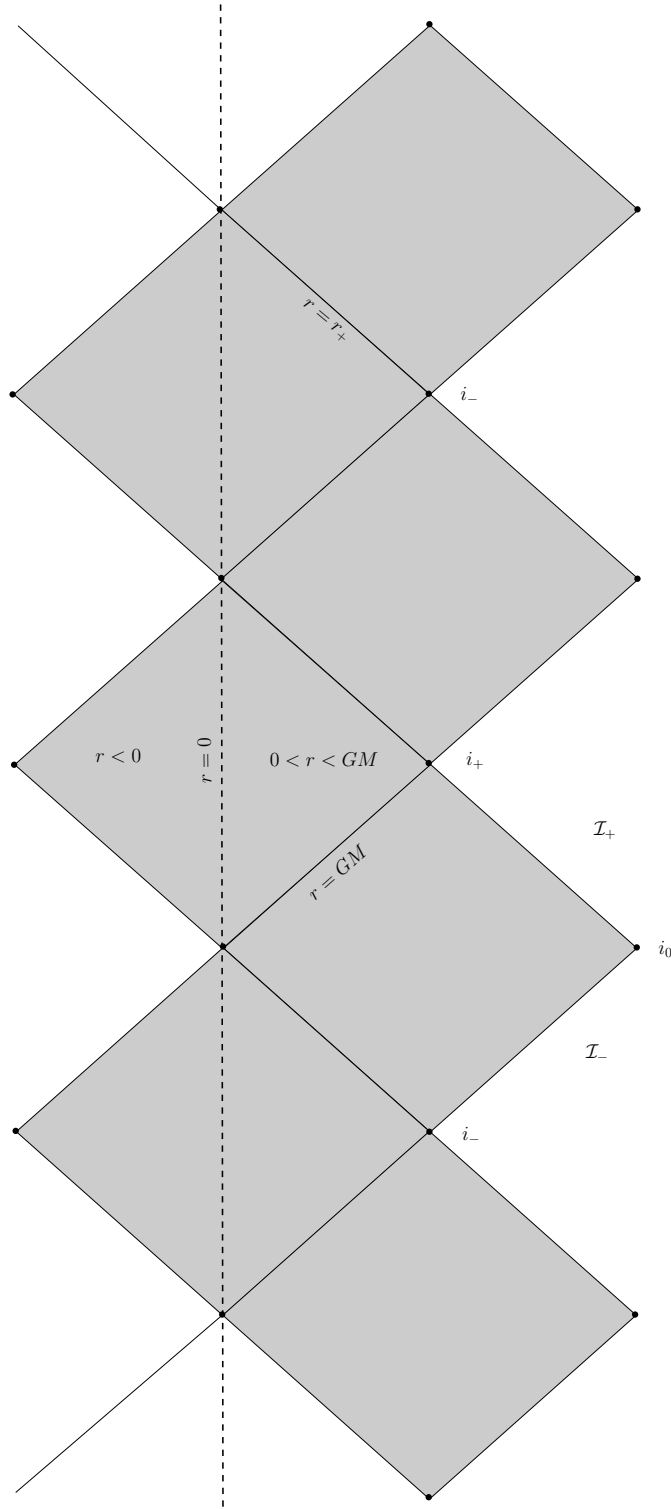


Figura 2.19: Diagrama de *Carter Penrose* considerando $G^2 M^2 = a^2$.

Capítulo 3

Agujeros negros en presencia de un campo escalar no mínimamente acoplado a la curvatura escalar

En la actualidad, teorías cuánticas de campos (TCC) fuertemente acopladas son problemas difíciles de resolver en física teórica. Sin embargo, hace 16 años se propuso una importante correspondencia entre la TCC y teorías gravitatorias, las cuales incluyen la Relatividad General de Einstein y su generalización en Teoría de Cuerdas [21–23], permitiendo encontrar nuevas direcciones que logren enlazar la Mecánica Cuántica con la gravedad [24].

En muchas aplicaciones, como por ejemplo en física de altas energías y teoría de cuerdas, se estudian TCC invariantes bajo transformaciones conformes, estas son aquellas invariantes bajo escalamiento, las transformaciones de Lorentz y las traslaciones de la teoría de la Relatividad Especial. Todas estas transformaciones forman el llamado grupo conforme y el espacio dual con la simetría apropiada para esta invariancia corresponde al espacio-tiempo anti-de Sitter (AdS) [24], es por este motivo que en la literatura es conocida comúnmente como correspondencia AdS/CFT (anti-de Sitter/Teoría de Campos Conforme) (ver por ejemplo la reseña [25]). A modo de introducción, comenzaremos nuestro estudio dando a conocer las variedades simétricas maximales, las cuales son aquellas cuya curvatura es la misma en todas partes, así como también en todas direcciones. Para estos casos, tenemos que el tensor de Riemann en estos ambientes en dimensión D , con una métrica $g_{\mu\nu}$, es de la forma

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = K(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}), \quad (3.0.1)$$

donde K corresponde a una medida normalizada de la curvatura escalar [12]

$$K = \frac{R}{D(D-1)}. \quad (3.0.2)$$

Ahora, tomando la traza del tensor de Riemann dado en (3.0.1), obtenemos una expresión para el tensor de

Ricci en D -dimensiones, el cual es proporcional a la métrica $g_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} = K(D - 1)g_{\mu\nu}. \quad (3.0.3)$$

De lo anterior, podemos clasificar tres espacio-tiempos maximalmente simétricos, el primero de ellos corresponde al de Minkowski, donde su curvatura es cero en todas partes ($K = 0$). Si $K > 0$ obtenemos el espacio-tiempo de Sitter (dS_D), mientras que si $K < 0$ tenemos anti-de Sitter (AdS_D).

Por otra parte, consideremos las ecuaciones de Einstein en el vacío con una constante cosmológica Λ [26], esto es

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.0.4)$$

Si tomamos la traza de (3.0.4) obtenemos que

$$R = \frac{2D}{(D - 2)}\Lambda. \quad (3.0.5)$$

Reemplazando (3.0.5) en (3.0.4) obtenemos una relación entre el tensor de Ricci y la constante cosmológica dada por

$$R_{\mu\nu} = \frac{2\Lambda}{(D - 2)}g_{\mu\nu}, \quad (3.0.6)$$

donde el signo de Λ clasifica cada uno de estos tres espacio-tiempos expuestos anteriormente. Si $\Lambda = 0$ obtenemos el caso de Minkowski, si $\Lambda > 0$ tenemos el caso dS_D y si $\Lambda < 0$ tendremos AdS_D .

Recordemos que para las soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström, estudiadas en el capítulo 2, la topología del horizonte es esférica, y son respaldadas por los teoremas de Hawking e Israel [27–29]. Más aún, para un espacio-tiempo de dimensión cuatro existen ciertos teoremas de censura topológica que restringen posibles geometrías de agujeros negros [30]. De lo anterior, cabe preguntarse si es posible encontrar otras configuraciones de tal manera de eludir estos teoremas. Una manera es trabajar en dimensiones superiores a cuatro, donde en [31] encuentran una solución cuya topología del horizonte no es esférica, conocida como *anillo negro*. Otra forma es considerar a la gravedad de Einstein una constante cosmológica, encontrando agujeros negros con horizontes no esféricos en dimensión cuatro [32–34], así como también extensiones para dimensiones superiores [35]. Estas soluciones se conocen como agujeros negros topológicos.

Considerar teorías en las cuales tenemos una fuente de materia son, en estricto rigor, un problema no trivial, debido básicamente a la conjetura del no-pelo (*no-hair conjecture*) [36] enunciado originalmente por John Archibald Wheeler, inspirado por los teoremas de unicidad de las soluciones de Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr y Kerr-Newman [28,29,37–39], postulando que *todas las soluciones de agujeros negros en las ecuaciones de Einstein-Maxwell de gravitación y electromagnetismo pueden ser caracterizadas solamente por tres parámetros observables de manera externa, correspondientes a la masa, carga y momento angular* (ver por ejemplo la reseña [40]). Sin embargo, en la década de 1970, los trabajos realizados por Bocharova, Bronnikov y Melnikov [41], y posteriormente por Bekenstein [42], mostraron que un campo escalar no mínimamente acoplado resulta un buen laboratorio en orden de evadir esta conjetura. Más aún, estas teorías sostienen una solución de agujero negro conocida como la solución BBMB (Bocharova-Bronnikov-Melnikov-Bekenstein), donde a lo largo de los años ha sido el pilar fundamental para nuevas soluciones que involucran un campo escalar con acoplamiento no minimal.

El plan de este capítulo está organizado como sigue. En la próxima sección se estudian soluciones considerando la acción gravitatoria de Einstein-Hilbert en presencia de un campo escalar no mínimamente acoplado conforme, explicando algunas soluciones clásicas presentes en la literatura, además de la inclusión de dos 3-formas no trivialmente acopladas al campo escalar, logrando así extender el caso conforme. En la sección 3.2 se considera un caso particular de una teoría gravitatoria conocida como gravedad de Lovelock, siendo la extensión más natural de la Relatividad General considerando un espacio-tiempo de dimensión superior, donde las ecuaciones de movimiento son a lo más de segundo orden. Finalmente, en la sección 3.3 se exponen los resultados presentes en [1, 2].

3.1. Agujeros negros en presencia de un campo escalar no mínimamente acoplado a la curvatura escalar conforme

Formalmente, consideremos la siguiente acción de materia en D -dimensiones

$$S_M[g_{\mu\nu}, \Phi] = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} d^D x [\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \xi R \Phi^2], \quad (3.1.1)$$

donde ξ es conocido como constante de acoplamiento no minimal y R es la curvatura escalar. Es importante notar que cuando la constante de acoplamiento no minimal ξ desaparece ($\xi = 0$), tenemos el caso de un campo escalar mínimamente acoplado. Para una constante ξ de la forma

$$\xi_D = \frac{D-2}{4(D-1)}, \quad (3.1.2)$$

la acción (3.1.1) es invariante conforme, esto quiere decir que bajo las transformaciones

$$\bar{g}_{\mu\nu} \mapsto \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad \bar{\Phi} \mapsto \Omega^{-(D-2)/2} \Phi, \quad (3.1.3)$$

se tiene que

$$S_M[g_{\mu\nu}, \Phi] = S_M[\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\Phi}] + \text{términos de frontera}, \quad (3.1.4)$$

donde Ω es una función diferenciable y estrictamente positiva.

Si variamos la acción (3.1.1) respecto a la métrica, así como también respecto al campo escalar Φ , tenemos

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \nabla_\sigma \Phi \nabla^\sigma \Phi \right) + \xi (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu + G_{\mu\nu}) \Phi^2, \quad (3.1.5)$$

$$\square \Phi = \xi R \Phi, \quad (3.1.6)$$

donde $\square := g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ y para una constante de acoplamiento no minimal de la forma (3.1.2), se obtiene que $T_\mu^\mu = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0$. Si consideramos una teoría de gravedad acoplada a un campo escalar no mínimamente acoplado en D dimensiones, esto es

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{-g} R - S_M[g_{\mu\nu}, \Phi], \quad (3.1.7)$$

al variar la acción respecto al campo escalar obtenemos la ecuación (3.1.6), mientras que variando la acción respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$ tenemos

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.1.8)$$

Aquí, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento calculado previamente en (3.1.5). Si calculamos la traza de (3.1.8), podemos concluir que para este tipo de teorías la curvatura escalar R se desvanece. Una solución de agujero negro a estas ecuaciones de movimiento, la cual es estática con simetría esférica, junto con un campo escalar de la forma

$$\Phi = \Phi(r),$$

es la solución BBMB [41, 42], la cual en dimensión cuatro, con $\xi = \xi_4 = \frac{1}{6}$, viene dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.1.9)$$

$$\Phi(r) = \sqrt{\frac{6}{\kappa}} \frac{M}{r - M}. \quad (3.1.10)$$

De la solución (3.1.9) podemos concluir que esta solución es asintóticamente plana. Más aún, Xanthopoulos y Zannias estudian la solución más general para una solución estática, asintóticamente plana, con simetría esférica de las ecuaciones de Einstein acoplada a un campo escalar conforme, demostrando que la única solución de agujero negro corresponde a la solución BBMB [43]. Además, en [44] analizan la teoría para una dimensión D arbitraria, encontrando soluciones para el caso conforme acoplado y extendiendo el método de transformación elaborado por Bekenstein por medio de soluciones mínimamente acopladas [42], mostrando que la solución de agujero negro BBMB solamente existe en dimensión cuatro. Sin embargo, a pesar de estos resultados, la deficiencia de esta solución está en el hecho que el campo escalar Φ diverge en el horizonte de eventos, haciendo su interpretación física y el problema de su estabilidad un problema de debate [45, 46]. Una manera de eludir este problema de divergencia es a través de la inclusión de una constante cosmológica a las ecuaciones de movimiento, donde la divergencia del campo escalar ocurre dentro del horizonte de eventos. Concretamente, en [47] consideran una teoría de gravedad con una constante cosmológica no negativa, donde además del acoplamiento conforme del campo escalar se incluye un potencial $U(\Phi)$ dado por

$$U(\Phi) = \alpha \Phi^4, \quad (3.1.11)$$

donde α corresponde a una constante, manteniendo la invariancia conforme del campo escalar. La teoría es presentada de la siguiente manera

$$S_{\text{MTZ}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) - S_{\text{M}}[g_{\mu\nu}, \Phi] - \alpha \int d^4x \sqrt{-g} \Phi^4, \quad (3.1.12)$$

con $\xi = \xi_4 = \frac{1}{6}$ y hemos reemplazado κ por $8\pi G$. Las ecuaciones de movimiento al variar respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$ y al campo escalar Φ son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G [T_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} \Phi^4], \quad (3.1.13)$$

$$\square \Phi = \xi R \Phi + 4\alpha \Phi^3. \quad (3.1.14)$$

Debido a la invariancia conforme de la sección asociada a la fuente de materia, la traza del nuevo tensor de energía momento también es nula, lo cual implica que, a diferencia de la solución BBMB, la curvatura escalar es una constante cuyo valor es

$$R = 4\Lambda, \quad (3.1.15)$$

y la solución, conocida en la literatura como agujero negro MTZ, viene dada por el elemento de línea

$$ds^2 = - \left[-\frac{r^2}{l^2} + \left(1 - \frac{GM}{r}\right)^2 \right] dt^2 + \left[-\frac{r^2}{l^2} + \left(1 - \frac{GM}{r}\right)^2 \right]^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.1.16)$$

junto a un campo escalar

$$\Phi(r) = \sqrt{\frac{3G}{4\pi}} \frac{M}{r - GM}, \quad (3.1.17)$$

mientras que el potencial adquiere la forma

$$U(\Phi) = -\frac{2}{3l^2} \pi G \Phi^4, \quad (3.1.18)$$

y la constante cosmológica se expresa como

$$\Lambda = \frac{3}{l^2}, \quad (3.1.19)$$

donde l corresponde al radio cosmológico [47] y $r \in [0, +\infty)$. Notemos que para esta solución, el horizonte de eventos se encuentra en

$$r_h = \frac{l}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4GM}{l}} \right), \quad (3.1.20)$$

donde M corresponde a una constante de integración asociada al parámetro de masa, con $GM \in (0, \frac{l}{4})$. Adicionalmente, vemos que

$$0 < GM < r_h, \quad (3.1.21)$$

donde podemos observar que la divergencia del campo escalar Φ se encuentra en una región al interior del horizonte. Asimismo, en [47] estudian soluciones de agujero negro cargados eléctricamente, esto es adicionar a la acción (3.1.12)

$$- \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.1.22)$$

donde la componente no nula del tensor de Maxwell es

$$F_{rt} = -F_{tr} = \partial_r A_t = \frac{Q}{r^2}. \quad (3.1.23)$$

Aquí, Q es una constante de integración asociada a la carga. Reemplazando en las ecuaciones de movimiento, podemos notar una restricción entre la masa M y la carga Q dada por

$$Q^2 = M^2 G \left(1 + \frac{2\pi G}{3\alpha l^2} \right), \quad (3.1.24)$$

donde la constante cosmológica Λ (3.1.19) y el elemento de línea (3.1.16) mantienen su estructura. Además, el parámetro α debe satisfacer

$$\alpha < -\frac{2\pi G}{3l^2}, \quad (3.1.25)$$

mientras que el campo escalar Φ toma la forma

$$\Phi(r) = \sqrt{-\frac{1}{2\alpha l^2}} \frac{GM}{r - GM}. \quad (3.1.26)$$

En el año 2006, Martínez, Staforelli y Troncoso [48] extienden este resultado por medio del siguiente ansatz métrico

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\sigma_\gamma^2, \quad (3.1.27)$$

donde $d\sigma_\gamma^2$ representa el elemento de línea de una variedad base 2-dimensional Σ , la cual asumen compacta, sin frontera y con curvatura constante asociada al parámetro γ , con $\gamma = \{-1, 0, +1\}$. Mientras que la teoría a estudiar corresponde a la acción (3.1.12) junto con (3.1.22). Una de las cosas interesantes de esta nueva solución, está en el hecho que tanto la función métrica $F(r)$ como la relación entre los parámetros de masa M y carga Q dependen de la constante γ , esto es

$$F(r) = -\frac{\Lambda r^2}{3} + \gamma \left(1 + \frac{GM}{r}\right)^2, \quad Q^2 = \gamma M^2 \left(1 + \frac{2\pi\Lambda G}{9\alpha}\right), \quad (3.1.28)$$

mientras que el campo escalar adquiere la forma

$$\Phi(r) = \sqrt{-\frac{\Lambda}{6\alpha}} \frac{GM}{r + GM}, \quad (3.1.29)$$

y el tensor de Maxwell es como (3.1.23).

Para $\gamma = 1$ logran reproducir la solución encontrada en [47] para una constante cosmológica Λ no negativa. Si consideramos un horizonte hiperbólico ($\gamma = -1$), la constante cosmológica es negativa, siendo

$$\Lambda = -\frac{3}{l^2}, \quad (3.1.30)$$

donde la solución posee una singularidad de curvatura en $r = 0$. Debido a esta estructura topológica, los autores separan el análisis en tres casos dependiendo del signo de la masa M , la cual para valores positivos se tiene que el horizonte de eventos se encuentra localizado en

$$r_h = \frac{l}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4GM}{l}}\right). \quad (3.1.31)$$

Aquí el campo escalar Φ y el tensor de Maxwell son dados por (3.1.29) y (3.1.23) respectivamente, y $\alpha \in (0, \frac{2\pi G}{3l^2}]$. Si la masa es nula, tenemos que tanto el campo escalar como el campo electromagnético desaparecen, produciendo una métrica de la forma

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2} - 1\right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} - 1\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma_{-1}^2. \quad (3.1.32)$$

Sin embargo, para una masa M negativa acotada en $-\frac{l}{4G} \leq M < 0$, el agujero negro posee tres horizontes, donde los autores lo catalogan como un *agujero negro dentro de un agujero negro* [48]. El horizonte más externo viene dado por (3.1.31), el cual rodea a la singularidad del campo escalar ubicada en $r = -GM$.

Para soluciones cuyo horizonte de eventos es planar ($\gamma = 0$), el campo electromagnético se desvanece, la constante cosmológica es de la forma (3.1.30) y la métrica es dada por

$$ds^2 = -\frac{r^2}{l^2} dt^2 + \frac{l^2}{r^2} dr^2 + r^2 d\sigma_0^2, \quad (3.1.33)$$

la cual corresponde al espacio-tiempo anti-de Sitter (AdS). Además, la masa desaparece y la constante de integración M es interpretada como *un pelo* en el campo escalar Φ , el cual mantiene la estructura estudiada

previamente en (3.1.29), así como también para el potencial (3.1.11). Cabe destacar que este tipo de soluciones son conocidas como *configuraciones stealth*, esto es una solución no trivial donde

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 = 8\pi G [T_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} \Phi^4]. \quad (3.1.34)$$

Es decir, son *soluciones en las cuales tanto la parte materia como la parte gravedad se desvanecen idénticamente* (ver por ejemplo la referencia [49], donde estudian estas clases de configuraciones en tres dimensiones). Adicionalmente, en [50] los autores encuentran nuevas clases de soluciones en dimensión cuatro considerando un potencial de la forma

$$U(\Phi) = -\frac{\Lambda\sqrt{6\kappa}}{9} \frac{\chi}{\chi^2 + 1} \left[-\frac{6}{\kappa} \Phi + \Phi^3 \right] - \frac{\kappa\Lambda}{36} \Phi^4, \quad (3.1.35)$$

donde χ es un parámetro arbitrario, Λ es la constante cosmológica y $\kappa = 8\pi G$. Concretamente, las ecuaciones de movimiento son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa [T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} U(\Phi)], \quad \square\Phi = \xi R\Phi + \frac{dU}{d\Phi}, \quad (3.1.36)$$

y, como antes, $\xi = \xi_4$. Dado lo precedente, tenemos que la solución adquiere la forma

$$ds^2 = \frac{(r + (\chi - 1)M)^2}{(r - M)^2} \left[- \left(\gamma \left(1 - \frac{M}{r} \right)^2 - \frac{\lambda r^2}{3} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\gamma \left(1 - \frac{M}{r} \right)^2 - \frac{\lambda r^2}{3} \right)} + r^2 d\sigma_\gamma^2 \right] \quad (3.1.37)$$

$$\Phi(r) = \left(\frac{6}{\kappa} \right)^{1/2} \frac{M(\chi - 1) - \chi r}{r + M(\chi - 1)}, \quad (3.1.38)$$

$$\lambda = \frac{\Lambda(\chi^2 - 1)^2}{\chi^2 + 1}, \quad (3.1.39)$$

donde ahora el elemento de línea $d\sigma_\gamma$ sólo puede tomar valores $\gamma = \pm 1$. Dependiendo del signo de la constante cosmológica Λ , así como también de la elección del parámetro γ , se logran clasificar nuevas clases de soluciones exactas. Por ejemplo, los casos $\Lambda > 0, \gamma = 1$ y $\Lambda < 0, \gamma = -1$ resultan soluciones de agujeros negros [50].

3.1.1. Agujeros negros en presencia de $(D - 1)$ -formas

Dados los resultados anteriores en dimensión cuatro, podemos observar que solamente se encuentran soluciones de agujeros negros considerando un acoplamiento no minimal conforme (3.1.2), así como también un horizonte esférico o hiperbólico. Una manera de encontrar configuraciones planares a las ecuaciones de Einstein, considerando un ansatz métrico (3.1.27) con $\gamma = 0$, es adicionar a la acción (3.1.12) dos 3-formas no trivialmente acopladas al campo escalar Φ [51, 52], esto es

$$S^{\text{axionic}} = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\epsilon(\Phi)}{12} \sum_{i=1}^2 \mathcal{H}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^{(i)} \mathcal{H}^{(i) \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \right], \quad (3.1.40)$$

junto con el término de Maxwell (3.1.22) y $\xi = \xi_4 = \frac{1}{6}$. Las ecuaciones de movimiento respecto a los diferentes campos dinámicos son de la forma

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G [T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} U(\Phi) + T_{\mu\nu}^{\text{Maxwell}} + T_{\mu\nu}^{\text{axionic}}], \quad (3.1.41)$$

$$\square\Phi = \xi R\Phi + \frac{dU}{d\Phi} + \frac{d\epsilon}{d\Phi} \left[\frac{1}{12} \sum_{i=1}^2 \mathcal{H}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{(i)} \mathcal{H}^{(i)\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \right], \quad (3.1.42)$$

$$\partial_\alpha \left(\sqrt{-g} \epsilon(\Phi) \mathcal{H}^{(i)\alpha\alpha_1\cdots\alpha_{D-2}} \right) = 0, \quad \partial_\alpha \left(\sqrt{-g} F^{\alpha\beta} \right) = 0, \quad (3.1.43)$$

donde

$$T_{\mu\nu}^{\text{axionic}} = \epsilon(\Phi) \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} \mathcal{H}_{\mu\alpha_1\alpha_2}^{(i)} \mathcal{H}_\nu^{(i)\alpha_1\alpha_2} - \frac{g_{\mu\nu}}{12} \mathcal{H}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{(i)} \mathcal{H}^{(i)\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \right], \quad (3.1.44)$$

$$T_{\mu\nu}^{\text{Maxwell}} = \frac{1}{4\pi} [F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma - g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}], \quad (3.1.45)$$

mientras que el potencial $U(\Phi)$ es como (3.1.11). Para una constante cosmológica de la forma (3.1.30), la solución es dada por [52]

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left[\frac{r^2}{l^2} - p^2 \left(1 + \frac{G\mu}{r} \right)^2 \right] dt^2 + \left[\frac{r^2}{l^2} - p^2 \left(1 + \frac{G\mu}{r} \right)^2 \right]^{-1} dr^2 + r^2 (dx_1^2 + dx_2^2), \\ \Phi(r) &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha l}} \frac{G\mu}{r + G\mu}, \quad \mathcal{H}^{(i)} = - \frac{p}{\sqrt{8\pi G}} \left(1 - \frac{4\pi G}{3} \Phi^2 \right) dt \wedge dr \wedge dx^i, \\ \mathcal{F} &= - \frac{q}{r^2} dt \wedge dr, \end{aligned} \quad (3.1.46)$$

mientras que las constantes satisfacen la relación

$$q^2 = p^2 \mu^2 G \left(\frac{2\pi G}{3\alpha l^2} - 1 \right). \quad (3.1.47)$$

La característica más importante de este resultado es el hecho que corresponde a la versión planar del agujero negro MTZ [47] expuesto al principio de esta sección. Del mismo modo, manteniendo la esencia explicada con anterioridad, en [53] encuentran agujeros negros para una constante de acoplamiento no minimal ξ arbitraria, siendo uno de los primeros ejemplos para esta clase de configuraciones. Concretamente, para una constante $\xi \neq \frac{1}{4}$ y un potencial $U(\Phi)$ de la forma

$$U(\Phi) = \frac{\Phi^2}{8\pi G l^2} \left[3\xi(1 - 6\xi) + \frac{2\xi^2}{(1 - 4\xi)^2} \left(2(1 - 6\xi) + b\Phi^{\frac{1-4\xi}{2\xi}} \right)^2 \right], \quad (3.1.48)$$

complementado por una función $\epsilon(\Phi)$

$$\epsilon(\Phi) = \frac{(1 - 8\pi G \xi \Phi^2)}{f(\sqrt{8\pi G} \Phi)}, \quad (3.1.49)$$

donde

$$\begin{aligned} f(\Phi) &= \xi^2 \Phi^{\frac{1-2\xi}{\xi}} \left[16\xi \Sigma_2 \Phi^{\frac{4\xi-1}{2\xi}} - \Sigma_1 \left(\frac{1}{1-4\xi} - \xi \Phi^2 \right) \right] \\ &\quad + (1 - 4\xi) \left[(1 - 6\xi)(1 - \xi \Phi^2) + 2\xi \left(1 - \frac{\xi}{1-4\xi} \Phi^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (3.1.50)$$

y una constante cosmológica dada por (3.1.30), la teoría admite una solución de la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= -F(r) dt^2 + \frac{1}{F(r)} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} (dx_1^2 + dx_2^2), & \Phi(r) &= \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} (ar + b)^{\frac{-2\xi}{1-4\xi}}, \\ \mathcal{H}^{(i)} &= \frac{p}{\sqrt{8\pi G} (1-4\xi)^2 l^2 \epsilon(\Phi)} dt \wedge dr \wedge dx^i, & \mathcal{F} &= -\frac{q}{r^2} dt \wedge dr, \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

donde la función $F(r)$ y la constante a son dadas por

$$F(r) = \frac{r^2}{l^2} - \frac{p^2 (ar + b)^{\frac{4\xi}{1-4\xi}}}{(ar + b)^{\frac{4\xi}{1-4\xi}} - \xi} \left(1 + \frac{2G\mu}{r} - \frac{Gq^2}{p^2 r^2} \right), \quad a = \frac{1}{G\mu} (b - \Sigma_2), \quad (3.1.52)$$

mientras que el resto de las constantes están sujetas a la restricción

$$q^2 = \frac{p^2 \mu^2 G}{(b - \Sigma_2)^2} \left(2b\Sigma_2 - b^2 - \frac{\Sigma_1}{2(1-4\xi)} \right). \quad (3.1.53)$$

Por otro lado, tomando el valor particular $\xi = \frac{1}{4}$ tanto el potencial $U(\Phi)$ como la función $\epsilon(\Phi)$ adquieren la expresión

$$U(\Phi) = \frac{\Phi^2}{32\pi G l^2} \left(2 \log \left(\frac{\Phi}{b} \right)^2 + 6 \log \left(\frac{\Phi}{b} \right) + 3 \right), \quad (3.1.54)$$

$$\epsilon(\Phi) = \frac{(8\pi G \Phi^2 - 4)^2}{f(\sqrt{8\pi G} \Phi)}, \quad (3.1.55)$$

donde b es una constante y la función $f(\Phi)$ es dada por

$$f(\Phi) = 2\Phi^2 \log \left(\frac{\Phi}{b} \right) \left(4 \log \left(\frac{\Phi}{b} \right) - \Phi^2 \right) + 4(\Phi^2 - 4) + \Sigma_1 \Phi^2 \left[8 \log \left(\frac{\Phi}{b} \right) - (\Phi^2 - 4) \right]. \quad (3.1.56)$$

Finalmente, la solución es

$$\begin{aligned} ds^2 &= -F(r) dt^2 + \frac{1}{F(r)} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} (dx_1^2 + dx_2^2), & \Phi(r) &= \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} b e^{ar}, \\ \mathcal{H}^{(i)} &= \frac{p}{4\sqrt{8\pi G} l^2 \epsilon(\Phi)} dt \wedge dr \wedge dx^i, & \mathcal{F} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.57)$$

donde

$$F(r) = \frac{r^2}{l^2} - \frac{p^2}{(b^2 e^{2ar} - 4)} \left(1 + \frac{\mu}{r} \right), \quad a = \frac{\Sigma_1 - 1}{\mu}. \quad (3.1.58)$$

Notemos que para este valor especial de la constante ξ , no es factible acomodar un campo de Maxwell cargado eléctricamente. Adicionalmente a lo anterior, los autores en [53] extienden la versión en D -dimensiones donde ahora la teoría corresponde a la inclusión de $(D-2)$ campos, los cuales corresponden a $(D-1)$ -formas acopladas por una función $\epsilon(\Phi)$, esto es

$$S_D^{\text{axiomic}} = - \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{\epsilon(\Phi)}{2(D-1)!} \sum_{i=1}^{D-2} \mathcal{H}_{\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}}^{(i)} \mathcal{H}^{(i)\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}} \right]. \quad (3.1.59)$$

3.2. Gravedad de Lovelock

La extensión más general de la acción de Einstein-Hilbert en dimensión cuatro está dada por el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{16\pi G} [R - 2\Lambda], \quad (3.2.1)$$

donde R es el escalar de curvatura, mientras que Λ corresponde a la constante cosmológica. Esta teoría verifica que la gravedad está descrita por medio de un tensor simétrico $g_{\mu\nu}$ y su dinámica se encuentra codificada en ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales, así como también de ser una teoría covariante. Sin embargo, motivaciones tales como la expansión acelerada del Universo conllevan a modificar esta teoría en su estado puro [54]. Una manera es la inclusión de términos de curvatura superior al Lagrangiano (3.2.1). En particular, estamos interesados en el Lagrangiano de Lovelock, el cual corresponde a la extensión más natural del Lagrangiano de Einstein-Hilbert para la Relatividad General en dimensiones superiores a cuatro, manteniendo la covarianza general y que las ecuaciones de movimiento respecto a la métrica son a lo más de segundo orden. Esta teoría fue estudiada primeramente por Lanczos en dimensión cinco [55] y posteriormente por Lovelock para dimensiones superiores [56]. Formalmente, tenemos que la acción de Lanczos-Lovelock [56] viene dada por

$$\int \sum_{p=0}^{[D/2]} \alpha_p L^{(p)}, \quad (3.2.2)$$

$$L^{(p)} = \epsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_1 a_2} \wedge \dots \wedge R^{a_{2p-1} a_{2p}} \wedge e^{a_{2p+1}} \wedge \dots \wedge e^{a_d}, \quad (3.2.3)$$

la cual corresponde a un polinomio de grado $[D/2]$ (donde $[x]$ denota la parte entera de x), escrito en términos de la curvatura de Riemann $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega_c^a \wedge \omega^{cb}$ y el vielbein e^a , mientras que los α_p son constantes de acoplamiento arbitrarias. Notemos que los primeros cuatro Lagrangianos son

$$L^{(0)} = 1, \quad (3.2.4)$$

$$L^{(1)} = R, \quad (3.2.5)$$

$$L^{(2)} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} L^{(3)} = & R^3 - 12RR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + 16R_{\mu\nu}R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho} + 24R_{\mu\nu}R_{\rho\sigma}R^{\mu\rho\nu\sigma} + 3RR_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \\ & - 24R_{\mu\nu}R^\mu{}_{\rho\sigma\kappa}R^{\nu\rho\sigma\kappa} + 4R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\eta\zeta}R^{\rho\sigma}{}_{\eta\zeta} - 8R_{\mu\rho\nu\sigma}R^\mu{}_{\eta}{}^\nu{}_{\zeta}R^{\rho\eta\sigma\zeta}. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Sobre sus propiedades generales y soluciones, ver por ejemplo las referencias [54, 57, 58]. Para agujeros negros AdS topológicos con sus respectivos atributos termodinámicos, ver las reseñas [59–62]. Notemos que para $p = 2$ y $D \geq 5$, podemos agregar el término (3.2.6) al Lagrangiano (3.2.1), obteniéndose la teoría gravitatoria de Einstein-Gauss-Bonnet. Su respectiva acción es:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{-g} [R - 2\Lambda + \alpha L^{(2)}] + S_M, \quad (3.2.8)$$

donde hemos escrito $\alpha_0 = -2\Lambda$, $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = \alpha$, mientras que S_M corresponde a la acción asociada a la fuente de materia. Las ecuaciones de movimiento son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha K_{\mu\nu}^{\text{GB}} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.2.9)$$

donde la expresión para el tensor de Gauss-Bonnet $K_{\mu\nu}^{\text{GB}}$ es

$$K_{\mu\nu}^{\text{GB}} = 2(RR_{\mu\nu} - 2R_{\mu\rho}R^\rho{}_\nu - 2R^{\rho\sigma}R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_\mu{}^{\rho\sigma\gamma}R_{\nu\rho\sigma\gamma}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R^2 - 4R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} + R_{\rho\sigma\lambda\delta}R^{\rho\sigma\lambda\delta}). \quad (3.2.10)$$

A lo largo de los años, se han presentado una gran cantidad de soluciones considerando esta clase de teoría, las primeras de ellas fueron encontradas por Boulware y Deser [63], e independientemente por Wheeler [64]. Posteriormente, se consideró un campo electromagnético [65] y en los años siguientes se estudiaron las propiedades termodinámicas para agujeros negros AdS topológicos dada una constante cosmológica negativa [66].

Como lo muestra [61], para que la teoría (3.2.2) posea un único vacío de AdS, fijando la constante cosmológica, se debe restringir las constantes de acoplamiento α_p , obteniéndose un conjunto de teorías indexadas por un entero k de la forma

$$I_k = -\frac{1}{2k(D-3)!} \int \sum_{p=0}^k \frac{C_p^k}{(D-2p)} L^{(p)}, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{D-1}{2} \right\rfloor, \quad (3.2.11)$$

donde C_p^k corresponde a un factor combinatorial. Más aún, podemos reescribir la acción (3.2.11) como

$$I_k = \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{-g} \left[R + \frac{(D-1)(D-2)}{k} + \frac{(k-1)}{2(D-3)(D-4)} L^{(2)} + \frac{(k-1)(k-2)}{3!(D-3)(D-4)(D-5)(D-6)} L^{(3)} + \dots \right]. \quad (3.2.12)$$

De manera más precisa, podemos considerar la acción en D -dimensiones de la forma $S_k = I_k + S_M$, donde, como antes, S_M es la acción correspondiente a la fuente de materia. De lo anterior, las ecuaciones de movimiento adquieren la estructura $\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(k)} = \kappa T_{\mu\nu}$, donde $\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(k)}$ es el tensor gravitatorio asociado a la variación de la acción I_k , esto es

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(k)} = G_{\mu\nu} - \frac{(D-1)(D-2)}{2k} g_{\mu\nu} + \frac{(k-1)}{2(D-3)(D-4)} K_{\mu\nu}^{\text{GB}} + \frac{(k-1)(k-2)}{3!(D-3)(D-4)(D-5)(D-6)} S_{\mu\nu} + \dots \quad (3.2.13)$$

Aquí, $K_{\mu\nu}^{\text{GB}}$ es el tensor de Gauss-Bonnet expuesto en (3.2.10), mientras que $S_{\mu\nu}$ se obtiene variando $L^{(3)}$ dado en (3.2.7), siendo

$$S_{\mu\nu} = 3 \left(R^2 R_{\mu\nu} - 4RR_{\rho\mu}R_{\nu}^{\rho} - 4R^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}R_{\mu\nu} + 8R^{\rho\sigma}R_{\rho\mu}R_{\sigma\nu} - 4RR^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu} + 8R^{\rho\kappa}R_{\kappa}^{\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu} - 16R^{\rho\sigma}R_{\kappa}^{\kappa}R_{(\mu}R_{|\kappa\sigma\rho|\nu)} + 2RR^{\rho\sigma\kappa}R_{\rho\sigma\kappa\nu} + R_{\mu\nu}R^{\rho\sigma\kappa\eta}R_{\rho\sigma\kappa\eta} - 8R_{(\mu}^{\rho}R^{\sigma\kappa\eta}R_{|\rho}R_{|\sigma\kappa\eta|\nu)} - 4R^{\rho\sigma}R_{\rho\mu}^{\kappa\eta}R_{\kappa\eta\sigma\nu} + 8R_{\rho\sigma}R^{\rho\kappa\sigma\eta}R_{\kappa\mu\eta\nu} - 8R_{\rho\sigma}R^{\rho\kappa\eta}R_{\mu}^{\sigma}R_{\kappa\eta\nu} + 4R^{\rho\sigma\kappa\eta}R_{\rho\sigma\zeta\mu}R_{\kappa\eta}^{\zeta}{}_{\nu} - 8R^{\rho\kappa\sigma\eta}R_{\rho\sigma\mu}^{\zeta}R_{\zeta\kappa\eta\nu} - 4R^{\rho\sigma\kappa}R_{\rho\sigma\kappa\zeta}R_{\mu}^{\eta}{}_{\nu}^{\zeta} \right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L^{(3)}. \quad (3.2.14)$$

3.3. Agujeros negros asintóticamente AdS con horizonte planar en presencia de un campo escalar no mínimamente acoplado a la curvatura escalar

En general, para encontrar soluciones de agujeros negros se considera el siguiente ansatz métrico:

$$ds_{\gamma}^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + r^2 d\Sigma_{D-2,\gamma}^2, \quad (3.3.1)$$

donde $d\Sigma_{D-2,\gamma}^2$ expresa el elemento de línea de una esfera $(D-2)$ -dimensional ($\gamma = 1$), un hiperboloide ($\gamma = -1$) o un plano ($\gamma = 0$), esto es

$$d\Sigma_{D-2,\gamma}^2 = \begin{cases} dx_{D-2}^2 + \sum_{k=1}^{D-3} \left(\prod_{j=k+1}^{D-2} \sin^2(x_j) \right) dx_k^2 & \text{para } \gamma = 1, \\ dx_{D-2}^2 + \sum_{k=1}^{D-3} \left(\prod_{j=k+1}^{D-2} \sinh^2(x_j) \right) dx_k^2 & \text{para } \gamma = -1, \\ dx_{D-2}^2 + \sum_{k=1}^{D-3} dx_k^2 & \text{para } \gamma = 0. \end{cases}$$

En particular, se puede mostrar que la solución general de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa sin una fuente de materia viene dada por [25, 35]

$$f(r) = g(r) = \gamma + \frac{r^2}{l^2} - \frac{M}{r^{D-3}}, \quad \Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2l^2}, \quad (3.3.2)$$

donde M es constante de integración asociada a la masa y l es el radio AdS. Manteniendo el mismo espíritu, en [1] se estudian soluciones con una topología del horizonte planar ($\gamma = 0$), las cuales son asintóticamente AdS, considerando una teoría particular de la gravedad de Lovelock, estudiada en la sección 3.2 (con $k = 2$), además de un campo escalar no mínimamente acoplado a la curvatura escalar, motivados por tener una mejor comprensión en superconductores no convencionales [67–69]. Posteriormente, en [2] se considera la extensión natural del trabajo anterior en orden de reforzar la idea que estas clases de soluciones están fuertemente relacionadas a teorías gravitatorias con términos de curvatura superior. Adicionalmente, se muestra que estas soluciones emergen de una configuración stealth definidas sobre la métrica (donde hemos impuesto $l := 1$)

$$ds_0^2 = -r^2 dt^2 + \frac{dt^2}{r^2} + r^2 d\Sigma_{D-2,0}^2. \quad (3.3.3)$$

Esto es, una solución no trivial que satisface simultáneamente

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(k)} = 0 = T_{\mu\nu},$$

donde $\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(k)}$ corresponde a las ecuaciones de movimiento asociadas a la teoría gravitatoria, mientras que $T_{\mu\nu}$ es su correspondiente tensor de energía-momento. De lo anterior, podemos realizar una transformación de la métrica (3.3.3) de la forma [13]

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - S k_\mu k_\nu,$$

conocida en la literatura como transformación Kerr-Schild. Para esta expresión, $g_{\mu\nu}$ corresponde a la métrica base (3.3.3), S es una función escalar y k_μ es un vector nulo respecto a ambas métricas, es decir

$$k^\mu k_\mu = \tilde{g}_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0, \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + 2S k^\mu k^\nu. \quad (3.3.4)$$

Lo interesante es que esta combinación, esto es la configuración stealth y la transformación Kerr-Schild, permite encontrar dos familias de soluciones con un horizonte de eventos planar, las cuales se caracterizan por un valor particular de la constante de acoplamiento no minimal ξ . Además, si agregamos a la teoría $(D-1)$ -formas, logramos extender estos resultados para una constante ξ arbitraria. Cada una de estas soluciones serán analizadas a continuación y corresponden a los resultados presentes en los artículos [1, 2].

Topological black holes for Einstein-Gauss-Bonnet gravity with a nonminimal scalar field

Moisés Bravo Gaete* and Mokhtar Hassaine†

Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, Casilla 747, Talca, Chile

(Received 27 August 2013; published 12 November 2013)

We consider the Einstein-Gauss-Bonnet gravity with a negative cosmological constant together with a source given by a scalar field nonminimally coupled in arbitrary dimension D . For a certain election of the cosmological and Gauss-Bonnet coupling constants, we derive two classes of AdS black hole solutions whose horizon is planar. The first family of black holes obtained for a particular value of the nonminimal coupling parameter only depends on a constant M , and the scalar field vanishes as $M = 0$. The second class of solutions corresponds to a two-parametric (with constants M and A) black hole stealth configuration, which is a nontrivial scalar field with a black hole metric such that both sides (gravity and matter parts) of the Einstein equations vanish. In this case, in the vanishing M , the solution reduces to a stealth scalar field on the pure AdS metric. We note that the existence of these two classes of solutions is indicative of the particular choice of the coupling constants, and they cannot be promoted to spherical or hyperboloid black hole solutions in a standard fashion. In the last part, we add to the original action some exact $(D - 1)$ forms coupled to the scalar field. The direct benefit of introducing such extra fields is to obtain black hole solutions with a planar horizon for an arbitrary value of the nonminimal coupling parameter.

DOI: [10.1103/PhysRevD.88.104011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.104011)

PACS numbers: 04.50.Gh

I. INTRODUCTION

The anti-de Sitter/conformal field theory (AdS/CFT) correspondence is a power tool that permits us to analyze strongly coupled systems by mapping them into some higher-dimensional gravity theories and establishing a sort of dictionary between both theories [1]. Recently, these ideas have been extended to nonrelativistic physics in order to describe certain condensed matter systems (e.g. see [2,3] for recent reviews) or in order to gain a better understanding of some unconventional superconductors [4–6]. In this last case, the minimal ingredients in the gravity side are given by the Einstein-Hilbert action with a negative cosmological constant, together with a charged self-interacting (complex) scalar field with the Maxwell term. Moreover, in order to reproduce the superconductor phase diagram, the system must admit black holes with scalar hair at low temperatures, and this hair must disappear at high temperatures. However, this problem of finding black hole solutions with a scalar field is rendered difficult by the various no-hair theorems existing in the current literature; see e.g. [7]. Nevertheless, such no-go theorems can be avoided by considering scalar fields nonminimally coupled to gravity [8,9]. By nonminimally coupled scalar fields, we mean a scalar field Φ with its usual kinetic term, together with a term coupled to the Ricci scalar R as $\xi R\Phi^2$ where ξ is the nonminimal coupling parameter. We precisely consider this kind of matter source in order to escape the traditional no-hair theorems.

For the gravity Lagrangian, we are concerned with the Einstein-Gauss-Bonnet action with a negative cosmological constant. This choice is motivated by the recent interest in holographic superconductors in Einstein-Gauss-Bonnet gravity. Indeed, holographic superconductors in such gravity theory have been studied intensively with the purpose of analyzing the effects of the Gauss-Bonnet coupling constant on the critical temperature and on the condensate; see e.g. [10–12].

More specifically, we consider a matter action given by a particular Einstein-Gauss-Bonnet gravity action, together with a self-interacting scalar field nonminimally coupled to gravity, and we look for black holes; for good reviews on Einstein-Gauss-Bonnet black holes, see e.g. [13,14]. For this model, we derive two classes of black hole solutions with a planar base manifold and only for particular values of the nonminimal coupling parameter. Note that the first examples of topological black holes in general relativity (GR) were discussed in [15]. In our case, for $\xi = (D - 2)/(4D)$ and $\xi = (D - 1)/(4D + 4)$, we obtain AdS black holes whose metrics resemble the Schwarzschild-AdS-Tangherlini space-time. In both cases, and in contrast with the Bocharova-Bronnikov-Melnikov-Bekenstein solution [8,9], the scalar field does not diverge at the horizon. This is due to the presence of the negative cosmological constant as it occurs for the known black hole solutions with scalar fields in four dimensions [16–18]. For the first family of solutions, the scalar field depends on the mass constant M and vanishes identically as $M = 0$, yielding to the purely AdS solution without a source. The second class of solutions is, to our knowledge, the first example of a higher-dimensional black hole stealth configuration. This means a nontrivial scalar field together with a black hole metric such that both sides

*mbravog@inst-mat.otalca.cl

†Corresponding author.
hassaine@inst-mat.otalca.cl

of the Einstein equations (gravity and matter parts) vanish. Up to now, the only known black hole stealth configuration was derived in three dimensions for a conformal scalar field [19] on the Banados-Teitelboim-Zanelli black hole [20]. Finally, in the last part, we add to our original action $(D - 2)$ dynamical fields which are exact $(D - 1)$ forms coupled with the scalar field in order to relax the restriction on the nonminimal coupling parameter. In this case, we establish the existence of black hole solutions for arbitrary ξ reducing to the pure scalar field solutions as $\xi = (D - 2)/(4D)$ or $\xi = (D - 1)/(4D + 4)$. There also exists a value of the nonminimal parameter $\xi = 1/8$ giving rise to a pure axionic solution, which is a solution where the contribution of the scalar fields disappears.

The paper is organized as follows. In the next section, we present the model and the associated field equations and derive two classes of solutions. In Sec. III, we add to our starting action some axionic fields coupled to the scalar field and obtain black hole solutions, generalizing in some sense those obtained in the previous section. Finally, the last section is devoted to the conclusions and future works.

II. TOPOLOGICAL BLACK HOLES FOR EINSTEIN-GAUSS-BONNET GRAVITY WITH A SCALAR FIELD NONMINIMALLY COUPLED

We consider the following action in arbitrary D dimensions with $D \geq 5$,

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (R - 2\Lambda + \alpha \mathcal{L}_{\text{GB}}) \right] - \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{\xi}{2} R \Phi^2 + U(\Phi) \right], \quad (1)$$

where \mathcal{L}_{GB} corresponds to the Gauss-Bonnet Lagrangian

$$\mathcal{L}_{\text{GB}} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}.$$

Here, we have normalized the Newton coupling constant G as $8\pi G = 1$ and set the AdS radius l to unity, $l = 1$. The gravity part of (1) corresponds to the Einstein-Gauss-Bonnet action with a cosmological constant Λ , while the matter source is given by a self-interacting scalar field Φ nonminimally coupled to the scalar curvature R through the nonminimal coupling parameter ξ . The potential $U(\Phi)$ is given by a mass term

$$U(\Phi) = \frac{8\xi D(D-1)}{(1-4\xi)^2} (\xi - \xi_D)(\xi - \xi_{D+1}) \Phi^2, \quad (2)$$

where ξ_D denotes the conformal coupling in D dimensions,

$$\xi_D = \frac{D-2}{4(D-1)}. \quad (3)$$

The choice of such a potential will be justified in the discussion. We also note that for the conformal couplings in D and $D + 1$ dimensions, the potential vanishes identically.

The field equations obtained by varying the action with respect to the metric and the scalar field read

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha K_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (4a)$$

$$\square \Phi = \xi R \Phi + \frac{dU}{d\Phi}, \quad (4b)$$

where the expression of the Gauss-Bonnet tensor $K_{\mu\nu}$ is

$$K_{\mu\nu} = 2(RR_{\mu\nu} - 2R_{\mu\rho}R^\rho{}_\nu - 2R^{\rho\sigma}R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_\mu{}^{\rho\sigma\gamma}R_{\nu\rho\sigma\gamma}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{\text{GB}}, \quad (5)$$

and the stress tensor associated with the variation of the scalar field is given by

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\sigma \Phi \partial^\sigma \Phi + U(\Phi) \right) + \xi (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu + G_{\mu\nu}) \Phi^2. \quad (6)$$

In what follows, we fix the value of the cosmological constant and the Gauss-Bonnet coupling constant α in terms of the dimension D as

$$\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{4}, \quad \alpha = \frac{1}{2(D-3)(D-4)}. \quad (7)$$

As a consequence of this choice, the gravity part of the action (1) becomes proportional to

$$\int d^D x \sqrt{-g} \left(R + \frac{(D-1)(D-2)}{2} + \frac{\mathcal{L}_{\text{GB}}}{2(D-3)(D-4)} \right). \quad (8)$$

In five dimensions, this action corresponds to a Chern-Simons action, which is a particular case of the Lovelock action. This latter action can be viewed as a generalization of the Einstein gravity in arbitrary dimensions, yielding at most second-order field equations for the metric. We will come to this point in the discussion when commenting that the solutions derived here in the Einstein-Gauss-Bonnet case can be extended to a particular class of higher-order Lovelock gravity [21].

A. Topological black hole solutions

As shown now for the particular choice of the coupling constants (7), or equivalently for a gravity action given by (8), we derive two classes of topological black hole solutions of Eqs. (4). In both cases, the metric solutions which have a planar base manifold resemble the topological Schwarzschild-AdS-Tangerlini spacetime.

For a value of the nonminimal coupling parameter given by

$$\xi = \xi_D^{\text{b,h}} := \frac{D-2}{4D}, \quad (9)$$

which implies that the potential (2) becomes

$$U(\Phi) = \frac{(D-2)^2}{32} \Phi^2, \quad (10)$$

a solution of the field equations (4) in this case is given by

$$ds^2 = -\left(r^2 - \frac{M}{r^{\frac{D-6}{2}}}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(r^2 - \frac{M}{r^{\frac{D-6}{2}}}\right)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2, \quad (11)$$

$$\Phi(r) = 2\sqrt{\frac{DM}{D-2}} r^{\frac{2-D}{4}},$$

where \vec{x} denotes a $(D-2)$ -dimensional vector. Various comments can be made concerning this solution. First, the scalar field is real, provided that the constant M is positive, and it is well defined at the horizon while diverging at the singularity $r=0$. The solution resembles the topological Schwarzschild-AdS solution with a planar horizon. We also stress that, at the vanishing mass limit $M=0$, the scalar field vanishes and the metric is nothing but the AdS metric written in Poincaré coordinates satisfying the pure gravity equations $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha K_{\mu\nu} = 0$ at the point (7). It is also interesting to point out that the spherical or hyperboloid versions of the metric do not accommodate such a source unless the constant $M=0$. However, in this case, the scalar field vanishes identically and the spacetime geometry is nothing but the AdS metric trivially solving the gravity equation $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha K_{\mu\nu} = 0$ with a cosmological constant and Gauss-Bonnet coupling given by (7).

B. Topological black hole stealth solutions

Interestingly enough, there exists another value of the non-minimal parameter that yields an interesting solution, namely, a stealth configuration. By stealth configuration, we mean a nontrivial solution (that is a solution with a nonconstant and nonvanishing scalar field) of the stealth equations

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha K_{\mu\nu} = 0 = T_{\mu\nu}, \quad (12)$$

where both sides (the gravity and the matter parts) vanish identically. Indeed, for

$$\xi = \xi_D^{\text{stealth}} := \frac{D-1}{4(D+1)}, \quad (13)$$

and hence for a potential (2),

$$U(\Phi) = \frac{(D-1)^2(D-3)}{32(D+1)} \Phi^2, \quad (14)$$

a solution of the stealth equations (12) is given by

$$ds^2 = -\left(r^2 - \frac{M}{r^{\frac{D-5}{2}}}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(r^2 - \frac{M}{r^{\frac{D-5}{2}}}\right)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2, \quad (15)$$

$$\Phi(r) = Ar^{\frac{1-D}{4}},$$

where A is an arbitrary constant. First of all, and contrary to the previous solution, in the zero mass limit $M=0$, the scalar

field does not vanish, and the solution reduces to a stealth configuration on pure AdS spacetime [22]. We also note that the metric solution (15) corresponds to the planar version ($\gamma=0$) of the solution obtained in Refs. [23,24] for the gravity action given by (8) [25]. In other words, we have derived a black hole stealth configuration for a self-interacting scalar field with the potential (14) nonminimally coupled with the parameter ξ given by (13) on a spacetime geometry which is the planar solution of the particular Einstein-Gauss-Bonnet gravity action [23,24]. The occurrence of such a solution can be explained easily. In fact, it is not difficult to establish that a self-interacting scalar field with potential (2) given by

$$\Phi(r) = Ar^{\frac{2\xi}{4\xi-1}} \quad (16)$$

has a vanishing energy-momentum tensor $T_{\mu\nu} = 0$ on the following ξ -dependent geometry,

$$ds^2 = -F(r) dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2, \quad (17)$$

$$F(r) = \left(r^2 - \frac{M}{r^{\frac{4(D-2)\xi-(D-3)}{4\xi-1}}}\right).$$

On the other hand, as shown in [23,24], the metric function $F(r) = r^2 - \frac{M}{r^{\frac{D-5}{2}}}$ satisfies the gravity equation $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha K_{\mu\nu} = 0$ for a planar base manifold at the point (7). Hence, requiring that both sides of the stealth equations (12) must vanish, this will fix the value of the parameter ξ to be (13). As a final remark concerning the black hole stealth, it is interesting to note that the stealth metric (17) will correspond to the Schwarzschild-AdS-Tangherlini metric with a planar base manifold only for $\xi=0$, but this case is of little interest since for a vanishing coupling parameter, the scalar field becomes constant (16).

Hence, we have obtained two classes of solutions for the Einstein-Gauss-Bonnet equations at the point (7) with a matter source composed of a self-interacting nonminimally coupled scalar field. These solutions have been derived for particular values of the nonminimal coupling parameter $\xi = \xi_D^{\text{b.h}}$ or $\xi = \xi_D^{\text{stealth}}$, and in both cases $\xi < 1/4$. It is also intriguing to note that these couplings, as well as the metric function solutions, are related through the dimensions as

$$\xi_{D+1}^{\text{b.h}} = \xi_D^{\text{stealth}}, \quad F_{D+1}^{\text{b.h}}(r) = F_D^{\text{stealth}}(r).$$

As a final comment, defining $\psi(r) = -\frac{F(r)}{r^2}$ where F is the structural function appearing in the Ansatz metric

$$ds^2 = -F(r) dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2,$$

the integration of the field equations may have a nice form. First, the combination $E_t^t - E_r^r = 0$ where $E_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha K_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}$ fixes the form of the scalar field as $\Phi(r) = (ar+b)^{\frac{2\xi}{4\xi-1}}$, where for simplicity we only consider the case $b=0$. For the topological black hole solution, the equation $E_t^t = 0$ yields the following first integral,

$$\frac{d}{dr} \left[r^{D-1} (\psi + 1)^2 - \frac{D-2}{4D} a^{\frac{2-D}{2}} (\psi + 1) r^{\frac{D}{2}} \right] = 0. \quad (18)$$

This means that the expression in brackets must be a constant m ; however, the remaining independent field equation $E_i^i = 0$ imposes that $m = 0$, and the solution reduces to the one found previously. Concerning the black hole stealth equation, something amusing occurs where both sides (gravity and matter parts) are identical and the stealth equation reduces to

$$-\frac{1}{4} (2r\psi' + \psi(D-1))(\psi+1)(D-2) = 0.$$

III. TURNING ON THE NONMINIMAL PARAMETER WITH EXACT p FORMS

For both classes of solutions derived previously, the value of the nonminimal coupling parameter is unique and fixed in terms of the dimension D ; see (9) and (13). This feature is not a novelty, and it also occurs in Einstein gravity (eventually with a cosmological constant) with a scalar field nonminimally coupled to gravity. Indeed, in this case, the only known black hole solutions are those obtained in four dimensions for the conformal coupling parameter $\xi = 1/6$ and whose horizon topology is either spherical or hyperbolic; see [8,9,16–18]. Recently, it has been shown that the inclusion of multiple exact p forms homogeneously distributed permits the construction of

black holes with a planar horizon [28,29] without any restrictions on the dimension or on the value of the non-minimal parameter [30]. Indeed, on one side, an appropriate coupling between the scalar field and the exact p forms permits us to relax the condition on the nonminimal parameter as well as the dimension. On the other side, the p forms being homogeneously distributed causes the horizon topology to be planar. Since our working hypothesis is concerned with black hole solutions with a planar base manifold, we propose to appropriately introduce some exact p forms to obtain topological black hole solutions with an arbitrary nonminimal coupling parameter. In order to achieve this task, we consider the following action in arbitrary D dimensions,

$$S - \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{\epsilon(\Phi)}{2(D-1)!} \sum_{i=1}^{D-2} \mathcal{H}_{\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}}^{(i)} \mathcal{H}^{(i)\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}} \right].$$

Here S denotes our original action (1) with the coupling constants chosen as in (7), to which we have added $(D-2)$ fields which are exact $(D-1)$ forms $\mathcal{H}^{(i)}$. The coupling function between the scalar field and the $(D-1)$ forms denoted by $\epsilon(\Phi)$ depends on the scalar field Φ as

$$\epsilon(\Phi) = \sigma \Phi^{\frac{1-8\xi}{\xi}} \quad (19)$$

where σ is a coupling constant. The field equations obtained by varying the action with the different dynamical fields $g_{\mu\nu}$, Φ and $\mathcal{H}^{(i)}$ read

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha K_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\text{extra}}, \quad \nabla_\alpha (\epsilon \mathcal{H}^{(i)\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{D-2}}) = 0, \quad (20a)$$

$$\square \Phi = \xi R \Phi + \frac{dU}{d\Phi} + \frac{1}{2} \frac{d\epsilon}{d\Phi} \left[\sum_{i=1}^{D-2} \frac{1}{(D-1)!} \mathcal{H}_{\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}}^{(i)} \mathcal{H}^{(i)\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}} \right] = 0, \quad (20b)$$

where the extra piece in the energy-momentum tensor reads

$$T_{\mu\nu}^{\text{extra}} = \epsilon \sum_{i=1}^{D-2} \left[\frac{1}{(D-2)!} \mathcal{H}_{\mu\alpha_2 \dots \alpha_{D-1}}^{(i)} \mathcal{H}_{\nu}^{(i)\alpha_2 \dots \alpha_{D-1}} - \frac{g_{\mu\nu}}{2(D-1)!} \mathcal{H}_{\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}}^{(i)} \mathcal{H}^{(i)\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}} \right]. \quad (21)$$

Searching for a purely electrically homogeneous Ansatz for the $(D-1)$ forms, we get

$$\mathcal{H}_{\text{tr}x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{D-2}}^{(i)}(r) dt dr \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^{D-2},$$

where the wedge product is understood. A solution of the field equations (20) with a purely electric Ansatz is given by

$$ds^2 = - \left(r^2 - \frac{M}{r^{\frac{2(6\xi-1)}{1-4\xi}}} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(r^2 - \frac{M}{r^{\frac{2(6\xi-1)}{1-4\xi}}} \right)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2,$$

$$\Phi(r) = \sqrt{\frac{M(8\xi-1)(D-2)}{2\xi[2\xi(3D-4) - (D-2)]}} r^{\frac{2\xi}{4\xi-1}}, \quad (22)$$

$$\mathcal{H}_{\text{tr}x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{D-2}}^{(i)} = \frac{p}{\epsilon(\Phi)} r^{D-4},$$

where the constant p is given by

$$p = \frac{4M^{\frac{1-4\xi}{4\xi}}}{(4\xi-1) \left[(8\xi-1)(D-2) \right]^{\frac{8\xi-1}{4\xi}}} \times [2\xi(3D-4) - (D-2)]^{\frac{6\xi-1}{4\xi}} \times \sqrt{-\sigma D(D+1)\xi(\xi - \xi_D^{\text{b,h}})(\xi - \xi_D^{\text{stealth}})},$$

and where the constants $\xi = \xi_D^{\text{b,h}}$ and $\xi = \xi_D^{\text{stealth}}$ are the particular values given by (9)–(13).

As expected, for $\xi = \xi_D^{\text{b,h}}$ or $\xi = \xi_D^{\text{stealth}}$, the constant $p = 0$, and the resulting solutions are those derived

previously, with a source only given by a scalar field. Another interesting value is $\xi = 1/8$ since in this case the scalar field vanishes and the coupling function ϵ becomes constant (19). As a consequence, for $\xi = 1/8$, we end with a pure axionic solution (which is a solution without a scalar field),

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha K_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{extra}},$$

given by

$$ds^2 = -(r^2 - Mr)dt^2 + \frac{dr^2}{(r^2 - Mr)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2,$$

$$\mathcal{H}_{\text{tr}x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{D-2}}^{(i)} = -\sqrt{\frac{D-3}{2\sigma}} Mr^{D-4}.$$

Note that this last solution is obtained from the generic solution (22), taking the well-defined limit $\xi \rightarrow 1/8$.

Finally, it is interesting to mention that solutions of the field equations (20) can be obtained without imposing the values of the cosmological and Gauss-Bonnet coupling constants as given by (7) but rather by considering the following relation between them:

$$\alpha = \frac{2\Lambda + (D-1)(D-2)}{(D-1)(D-2)(D-3)(D-4)}. \quad (23)$$

Of course, the restrictions (7) are a particular case of this last constraint. In fact, the relation (23) is obtained by requiring that the pure AdS metric solves the gravity equations without a source. For a value of the parameter ξ given by the conformal one in $(D+1)$ dimensions, $\xi = \xi_{D+1}$, which in turn implies that the potential vanishes (2), a solution of the field equations (20) can be obtained for a coupling ϵ given by

$$\epsilon(\Phi) = \frac{\sigma}{\Phi^{\frac{4(D-2)}{D-1}}}.$$

In this case, the metric function is the Schwarzschild-AdS-Tangherlini spacetime

$$ds^2 = -\left(r^2 - \frac{M}{r^{D-3}}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(r^2 - \frac{M}{r^{D-3}}\right)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2,$$

$$\Phi(r) = \sqrt{\frac{8MD(D-2)(2\Lambda + (D-1)(D-2))}{(D^2 - 3D + 4)(D-1)^2}} r^{\frac{1-p}{2}},$$

$$\mathcal{H}_{\text{tr}x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{D-2}}^{(i)} = \frac{p}{\epsilon(\Phi)} r^{D-4}, \quad (24)$$

where the constant p is given by

$$p = \frac{\sqrt{-2M\sigma}}{4(D-2)} (D-1)^{\frac{3D-9}{2(D-1)}} \times \left(\frac{(D^2 - 3D + 4)}{8MD(D-2)(2\Lambda + (D-1)(D-2))} \right)^{\frac{D-3}{2(D-1)}}.$$

We would like to stress that this solution is valid even in the vanishing cosmological constant, but on the other hand, the

GR limit $\Lambda = -(D-1)(D-2)/2$ (23) is not well defined because the constant p will blow up. This clearly emphasizes the importance of the higher-order curvature terms present in the Einstein-Hilbert-Gauss-Bonnet Lagrangian. As before, defining $\psi(r) = -\frac{F(r)}{r^2}$ where F is the structural function, we get the same expression for the scalar field $\Phi(r) = (ar)^{\frac{2\xi}{4\xi-1}}$, where ξ is the conformal coupling in $(D+1)$ dimensions as well as the solution for the axionic field as $\mathcal{H}^{(i)} = p\epsilon^{-1}r^{D-4}$. The equation $E_i^i = 0$ yields the following first integral,

$$\frac{d}{dr} \left[-\frac{\tilde{\Lambda}}{2} r^{D-1} (1 + \psi)^2 + \bar{\Lambda} r^{D-1} (1 + \psi) - \sigma(1 + \psi) - \beta r^{1-D} \right] = 0, \quad (25)$$

where we have defined $\tilde{\Lambda} = 2\Lambda + (D-1)(D-2)$, $\bar{\Lambda} = [2\tilde{\Lambda} - (D-1)(D-2)]/2$, σ is a constant that depends only on the integration constant a , while β depends on a and p . The expression in brackets must be a constant m , and in contrast to the pure scalar field case, this constant m can be nonzero in order to cancel the contribution proportional to $\bar{\Lambda}$. Note that this latter part vanishes at the point (7) but not at the point that we are considering now (23). The last remaining independent equation $E_i^i = 0$ fixes the relation between the constants and yields the solution obtained in (24).

IV. CONCLUSIONS AND FURTHER WORKS

Here, the gravity action we have considered is a particular combination of the Einstein-Hilbert action with a negative cosmological constant, together with the Gauss-Bonnet density. In five dimensions, this action corresponds to a Chern-Simons action which is a particular case of the so-called Lovelock action. This latter action can be viewed as a generalization of Einstein gravity in arbitrary dimensions, yielding at most second-order field equations for the metric. The resulting theory is described by a D form constructed with the vielbein e^a , the spin connection ω^{ab} , and their exterior derivatives without using the Hodge dual. The Lovelock action is a polynomial of degree $[D/2]$ (where $[x]$ denotes the integer part of x) in the curvature two-form, $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \wedge \omega^{cb}$ as

$$\int \sum_{p=0}^{[D/2]} \alpha_p L^{(p)}, \quad (26)$$

$$L^{(p)} = \epsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_d},$$

where the α_p are arbitrary dimensionful coupling constants and where wedge products between forms are understood. Here $L^{(0)}$ and $L^{(1)}$ are, respectively, the well-known cosmological term and the Einstein-Hilbert Lagrangian. As shown in Ref. [23], requiring the Lovelock action to have a unique cosmological constant fixes the α_p , yielding a series of actions indexed by an integer k given by

$$I_k = - \int \sum_{p=0}^k \frac{C_p^k}{(D-2p)} L^{(p)}, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{D-1}{2} \right\rfloor, \quad (27)$$

where C_p^k corresponds to the combinatorial factors. The gravity action we have considered here (8) is nothing but the action I_2 given by the expression (27). We believe that the class of solutions derived here for I_2 can be generalized for an arbitrary gravity action I_k with $k \geq 2$ [21]. For example, the stealth black hole solution obtained for I_2 can easily be extended for an arbitrary action I_k by adjusting the value of the nonminimal coupling parameter appearing in the stealth metric solution (17) in order for the resulting metric to match with the pure gravity solution of I_k [23,24]. Moreover, to our knowledge, there do not exist black hole solutions with a planar base manifold for standard general relativity (with or without a cosmological constant) with a source given by a nonminimally coupled scalar field [31]. This reinforces our conviction that the existence of the solutions derived for a gravity action given by I_2 is strongly indicative of the presence of the higher-order curvature terms [21].

We now turn to the choice of the mass term potential (2) in our starting action. First of all, we may note that this kind of potential has been considered in the dual description of unconventional superconductor [2,4–6]. Moreover, in our case, because of the presence of the nonminimal coupling term $\xi R\Phi^2$ in the action, in the case of constant scalar curvature solutions $R = -D(D-1)$, one may define an effective square mass

$$m_{\text{eff}}^2 = -\xi D(D-1) \left[1 - \frac{16}{(1-4\xi)^2} (\xi - \xi_D)(\xi - \xi_{D+1}) \right].$$

In the solutions obtained here, the only ones of constant scalar curvature (apart from the trivial situation of taking $M=0$) are those with the p -form fields (22) for $\xi = D/(4D+4)$ and $\xi = (D-1)/(4D)$. It is interesting to note that the square effective mass m_{eff}^2 precisely saturates the Breitenlohner-Freedman bound for $\xi = (D-1)/(4D)$. To close the chapter concerning the potential, we stress that is a particular case of potentials allowing the existence of a self-interacting scalar field Φ nonminimally coupled to the vanishing stress tensor

$$T_{\mu\nu} := \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\sigma \Phi \partial^\sigma \Phi + U(\Phi) \right) + \xi (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu + G_{\mu\nu}) \Phi^2 = 0$$

on the AdS background

$$ds^2 = -r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2.$$

Indeed, as shown in [22], the stealth solution is given by the following configuration,

$$U(\Phi) = \frac{\xi}{(1-4\xi)^2} [2\xi b^2 \Phi^{\frac{1-2\xi}{\xi}} - 8(D-1)(\xi - \xi_D) \times (2\xi b \Phi^{\frac{1}{2\xi}} - D(\xi - \xi_{D+1}) \Phi^2)], \quad (28a)$$

$$\Phi(r) = (Ar + b)^{\frac{2\xi}{4\xi-1}}. \quad (28b)$$

Note that this kind of potential also appears when looking for AdS wave solutions for a nonminimally coupled scalar field [32]. The scalar field solutions obtained in this paper, as well as the potential considered, correspond to the $b=0$ limit of this stealth configuration (28). It has been shown recently that, in the context of standard general relativity, self-interacting scalar fields nonminimally coupled with the potential given by (28a) and extra axionic fields admit black hole solutions [30]. The derivation of these solutions was precisely operated from the stealth configuration (28) through a Kerr-Schild transformation [30]. We believe that there may exist more general black hole solutions than those derived here for this more general class of potentials (28a). To conclude with the stealth origin, we would like to stress that the horizon topology of our solutions is planar, and their extension to spherical or hyperboloid black hole solutions in a standard fashion is not possible. This may be related to the fact that a static stealth scalar field on the AdS background requires the base space to be flat [22] for dimensions $D \geq 4$.

An interesting task to realize will be the study of the thermodynamics properties of the solutions derived here for I_2 as well as those for general I_k , and to compare them with the pure gravity solutions [24].

In Ref. [33], the authors constructed a conformal coupling to arbitrary higher-order Euler densities. It will be interesting to see whether such a matter source can accommodate the kind of solutions derived here.

As a final remark, we note that the coupling with the Maxwell electromagnetic field is an open problem even in the black hole stealth case. Indeed, even if the pure gravity solution with the Maxwell source

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha K_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{Maxwell}}$$

is known [23,24], it seems that this solution cannot be promoted to a black hole stealth configuration with a nonminimal scalar field as was possible in the neutral case.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Julio Oliva and Sourya Ray for useful discussions. M.B. is supported by BECA DOCTORAL CONICYT 21120271. M.H. was partially supported by Grant No. 1130423 from FONDECYT, by Grant No. ACT 56 from CONICYT, and by CONICYT, Departamento de Relaciones Internacionales “Programa Regional MATHAMSUD 13 MATH-05.” We thank the referee for its instructive comments.

- [1] J.M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998).
- [2] S.A. Hartnoll, *Classical Quantum Gravity* **26**, 224002 (2009).
- [3] Y.V. Kovchegov, *Rep. Prog. Phys.* **75**, 124301 (2012).
- [4] G.T. Horowitz, [arXiv:1002.1722](https://arxiv.org/abs/1002.1722).
- [5] S.A. Hartnoll, C.P. Herzog, and G.T. Horowitz, *J. High Energy Phys.* **12** (2008) 015.
- [6] C.P. Herzog, *J. Phys. A* **42**, 343001 (2009).
- [7] J.D. Bekenstein, [arXiv:gr-qc/9808028](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9808028).
- [8] J.D. Bekenstein, *Ann. Phys. (Berlin)* **82**, 535 (1974).
- [9] N.M. Bocharova, K.A. Bronnikov, and V.N. Melnikov, *Vestn. Mosk. Univ. Fiz. Astron.* **6**, 706 (1970) [*Moscow Univ. Phys. Bull.* **25**, 80 (1970)].
- [10] L. Barclay, R. Gregory, S. Kanno, and P. Sutcliffe, *J. High Energy Phys.* **12** (2010) 029.
- [11] W. Yao and J. Jing, *J. High Energy Phys.* **05** (2013) 101.
- [12] S.-l. Cui and Z. Xue, [arXiv:1306.2013](https://arxiv.org/abs/1306.2013).
- [13] C. Charmousis, *Lect. Notes Phys.* **769**, 299 (2009).
- [14] C. Garraffo and G. Giribet, *Mod. Phys. Lett. A* **23**, 1801 (2008).
- [15] J.P.S. Lemos, *Classical Quantum Gravity* **12**, 1081 (1995); *Phys. Lett. B* **353**, 46 (1995).
- [16] C. Martinez, R. Troncoso, and J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **67**, 024008 (2003).
- [17] C. Martinez, J.P. Staforelli, and R. Troncoso, *Phys. Rev. D* **74**, 044028 (2006).
- [18] A. Anabalón and A. Cisterna, *Phys. Rev. D* **85**, 084035 (2012).
- [19] E. Ayon-Beato, C. Martinez, and J. Zanelli, *Gen. Relativ. Gravit.* **38**, 145 (2006).
- [20] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1849 (1992).
- [21] M. Bravo-Gaete and M. Hassaine (work in progress).
- [22] E. Ayon-Beato, C. Martinez, R. Troncoso, and J. Zanelli (private communication).
- [23] J. Crisostomo, R. Troncoso, and J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **62**, 084013 (2000).
- [24] R. Aros, R. Troncoso, and J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **63**, 084015 (2001).
- [25] Note that solutions of the Einstein-Gauss-Bonnet equations with arbitrary coupling constants were first obtained in the case $\Lambda = 0$ with a spherical topology in [26] and an arbitrary topology in [27].
- [26] D.G. Boulware and S. Deser, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2656 (1985).
- [27] R.-G. Cai, *Phys. Rev. D* **65**, 084014 (2002).
- [28] Y. Bardoux, M.M. Caldarelli, and C. Charmousis, *J. High Energy Phys.* **05** (2012) 054.
- [29] Y. Bardoux, M.M. Caldarelli, and C. Charmousis, [arXiv:1205.4025](https://arxiv.org/abs/1205.4025).
- [30] M.M. Caldarelli, C. Charmousis, and M. Hassaine, *J. High Energy Phys.* **10** (2013) 015.
- [31] There exist solutions adding exact p forms coupled to the scalar field; see [29,30].
- [32] E. Ayon-Beato and M. Hassaine, *Phys. Rev. D* **73**, 104001 (2006).
- [33] J. Oliva and S. Ray, *Classical Quantum Gravity* **29**, 205008 (2012).

Planar AdS black holes in Lovelock gravity with a nonminimal scalar field

Moisés Bravo Gaete and Mokhtar Hassaine

*Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca,
Casilla 747, Talca, Chile*

E-mail: mbravog-at-inst-mat.otalca.cl, hassaine-at-inst-mat.otalca.cl

ABSTRACT: In arbitrary dimension D , we consider a self-interacting scalar field nonminimally coupled with a gravity theory given by a particular Lovelock action indexed by an integer k . To be more precise, the coefficients appearing in the Lovelock expansion are fixed by requiring the theory to have a unique AdS vacuum with a fixed value of the cosmological constant. This yields to $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor$ inequivalent possible gravity theories; here the case $k = 1$ corresponds to the standard Einstein-Hilbert Lagrangian. For each pair (D, k) , we derive two classes of AdS black hole solutions with planar event horizon topology for particular values of the nonminimal coupling parameter. The first family of solutions depends on a unique constant and is valid only for $k \geq 2$. In fact, its GR counterpart $k = 1$ reduces to the pure AdS metric with a vanishing scalar field. The second family of solutions involves two independent constants and corresponds to a stealth black hole configuration; that is a nontrivial scalar field together with a black hole metric such that both side of the Einstein equations (gravity and matter parts) vanishes identically. In this case, the standard GR case $k = 1$ reduces to the Schwarzschild-AdS-Tangherlini black hole metric with a trivial scalar field. We show that the two-parametric stealth solution defined in D dimension can be promoted to the uniparametric black hole solution in $(D + 1)$ dimension by fixing one of the two constants in term of the other and by adding a transversal coordinate. In both cases, the existence of these solutions is strongly inherent of the presence of the higher order curvature terms $k \geq 2$ of the Lovelock gravity. We also establish that these solutions emerge from a stealth configuration defined on the pure AdS metric through a Kerr-Schild transformation. Finally, in the last part, we include multiple exact $(D - 1)$ -forms homogeneously distributed and coupled to the scalar field. For a specific coupling, we obtain black hole solutions for arbitrary value of the nonminimal coupling parameter generalizing those obtained in the pure scalar field case.

KEYWORDS: Classical Theories of Gravity, Black Holes

ARXIV EPRINT: [1309.3338](https://arxiv.org/abs/1309.3338)

Contents

1	Introduction	1
2	Planar AdS black holes for a particular Lovelock gravity with a nonminimal scalar field	3
2.1	Planar AdS black hole solutions	5
2.2	Planar AdS black hole stealth solutions	6
3	Adding exact $(D - 1)$-forms	8
4	Comments and conclusions	10
A	Complements concerning the solutions	12
A.1	Stealth origin of the solutions	12
A.2	Particular case of Einstein gravity $k = 1$	14

1 Introduction

Since the advent of string theory, the interests on higher-dimensional physics have grown up in the last decades, and particularly concerning the higher-dimensional General Relativity (GR). String corrections to the standard higher-dimensional Einstein-Hilbert action arise as a low energy expansion in powers in α' and involve higher powers of the curvatures. As shown in [1] and [2], in order to the graviton amplitude to be ghost-free a special combination of quadratic corrections which is nothing but the Gauss-Bonnet expression is required. One of the interesting features of the Gauss-Bonnet Lagrangian lies in the fact that its variation yields second-order field equations for the metric in spite of the presence of quadratic terms in the curvature. The Einstein-Hilbert-Gauss-Bonnet gravity piece is part of a more general gravity theory build out of the same principles as GR. Indeed, two of the main fundamental assumptions in GR are the requirements of general covariance and the fact that the field equations for the metric to be at most of second order. In view of this, it is natural to describe the spacetime geometry in three or four dimensions by the standard Einstein-Hilbert action (with eventually a cosmological constant term) while for dimensions greater than four a more general theory can be used. This fact has been first noticed by Lanczos in five dimensions [3] and then generalized in higher dimension D by Lovelock [4]. The resulting action is the so-called Lovelock gravity action which is a D -form constructed out of the vielbein, the spin connection and their exterior derivative. By construction, the Lovelock Lagrangian which contains higher powers of the curvatures remains invariant under local Lorentz transformations. In odd dimension, this gauge symmetry can be extended to a local anti de Sitter (AdS) or Poincaré symmetry through a particular choice of the

coefficients appearing in the Lovelock expansion. In both cases, the resulting Lagrangian is a Chern-Simons form since its exterior derivative is an invariant homogeneous polynomial in the AdS or Poincaré curvatures, and their supersymmetric extensions are also known; see [5] for a good review on Chern-Simons (super)gravity. The Lovelock gravity or its Chern-Simons particular case have been shown to possess (topological) AdS black hole solutions with interesting thermodynamical properties [6–9] generalizing those obtained in the Einstein-Gauss-Bonnet case [10, 11]; for good reviews on Einstein-Gauss-Bonnet black holes, see e.g. [12–14].

In the present work, we will consider a gravity action given by a particular Lovelock Lagrangian with fixed coefficients such that the resulting theory has a unique anti-de Sitter vacuum with a fixed cosmological constant while our matter action will be concerned with a nonminimal self-interacting scalar field. For this Lovelock gravity model with nonminimal scalar field source, we will look for topological black hole solutions with planar event horizon topology. Note that the first examples of topological black holes in GR without source were discussed in [15, 16]. The reasons of considering such a matter source are multiples. Firstly, the ideas behind the anti-de Sitter/Conformal Field Theory (AdS/CFT) correspondence [17] have been recently extended to non-relativistic physics particularly to gain a better understanding of some unconventional superconductors [18–20]. In this context, black holes with scalar hair at low temperature which disappears at low temperature play an important role since they will reproduce the correct behavior of the superconductor phase diagram. It is well-known now from the BBMB solution (solution of the Einstein equations with a conformal source given by a scalar field) in four dimensions [21, 22] that scalar fields nonminimally coupled can be useful to escape standard no-hair theorems [23]. Note that the BBMB solution has been extended in presence of a cosmological constant with a potential term in four dimensions and for the conformal nonminimal coupling parameter $\xi = 1/6$, [24–27]. In fact, scalar fields nonminimally coupled to curved spacetimes play an important role in different branches of physics and are also of interest for pure mathematical proposals (as for example for the Yamabe problem). The introduction of nonminimal couplings in spite of complicating the calculations may be of extreme relevance for many problems. For example, the nonminimal couplings are generated by quantum corrections even if they are absent in the classical action [28], and they are required in order to renormalize the theory or at least to enhance their renormalizability properties [29–31]. In cosmological context, it has been argued that in most of the inflationary scenarios with scalar fields, the presence of the nonminimal coupling is unavoidable and its correct value depends on the gravity and the scalar field models adopted [32, 33]. Secondly, we have already considered such matter source in the case of a particular combination of the Einstein-Hilbert-Gauss-Bonnet gravity action and establish the existence of some black hole configurations for particular values of the nonminimal coupling parameter [34]. The present work is then the natural extension of the work done in [34] in order to reinforce our conviction that these black hole solutions are strongly inherent to the presence of the higher-order curvature terms.

The plan of the paper is organized as follows. In the next section, we present the model of a scalar field nonminimally coupled with a gravity action given by a particular

Lovelock Lagrangian. After deriving the field equations, we will present two classes of topological black hole solutions with planar base manifold. In section 3, we will add to the starting action exact $(D - 1)$ -forms and obtain a more general class of black hole solutions generalizing those obtained in the pure scalar field case. Finally, the last section is devoted to our conclusions, comments and further works. Two appendices are also added. In the first one, we show that these black hole solutions can be constructed from a stealth configuration on the pure AdS metric through a Kerr-Schild transformation. In the second appendix, we establish that the existence of these solutions is inherent to the higher-order curvature terms $k \geq 2$ of the Lovelock Lagrangian and they can not be promoted to black hole solutions in the standard GR case $k = 1$.

2 Planar AdS black holes for a particular Lovelock gravity with a non-minimal scalar field

We start with a generalization of the Einstein-Hilbert gravity action in arbitrary dimension D yielding at most to second-order field equations for the metric and known as the Lovelock Lagrangian. This latter is a D -form constructed with the vielbein e^a , the spin connection ω^{ab} , and their exterior derivatives without using the Hodge dual. The Lovelock action is a polynomial of degree $[D/2]$ (where $[x]$ denotes the integer part of x) in the curvature two-form, $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega_c^a \wedge \omega^{cb}$ as

$$\int \sum_{p=0}^{[D/2]} \alpha_p L^{(p)}, \tag{2.1a}$$

$$L^{(p)} = \epsilon_{a_1 \dots a_d} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_d}, \tag{2.1b}$$

where the α_p are arbitrary dimensionful coupling constants and where wedge products between forms are understood. Here $L^{(0)}$ and $L^{(1)}$ are proportional respectively to the cosmological term and the Einstein-Hilbert Lagrangian. Now, as shown in ref. [8], requiring the Lovelock action to have a unique AdS vacuum with a unique cosmological constant, fixes the α_p yielding to a series of actions indexed by an integer k , and given by

$$I_k = -\frac{1}{2k(D-3)!} \int \sum_{p=0}^k \frac{C_p^k}{(D-2p)} L^{(p)}, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{D-1}{2} \right\rfloor, \tag{2.2}$$

where C_p^k corresponds to the combinatorial factor. The global factor in front of the integral is chosen such that the gravity action (2.2) can be re-written in the standard fashion as

$$I_k = \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} \left[R + \frac{(D-1)(D-2)}{k} + \frac{(k-1)}{2(D-3)(D-4)} \mathcal{L}_{\text{GB}} + \frac{(k-1)(k-2)}{3!(D-3)(D-4)(D-5)(D-6)} \mathcal{L}_{(3)} + \dots \right], \tag{2.3}$$

where $\mathcal{L}_{GB} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ stands for the Gauss-Bonnet Lagrangian, and $\mathcal{L}_{(3)}$ is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(3)} = & R^3 - 12RR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + 16R_{\mu\nu}R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho} + 24R_{\mu\nu}R_{\rho\sigma}R^{\mu\rho\nu\sigma} + 3RR_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \\ & - 24R_{\mu\nu}R^\mu{}_{\rho\sigma\kappa}R^{\nu\rho\sigma\kappa} + 4R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\eta\zeta}R^{\rho\sigma}{}_{\eta\zeta} - 8R_{\mu\rho\nu\sigma}R^\mu{}_{\eta}{}^\nu{}_{\zeta}R^{\rho\eta\sigma\zeta}. \end{aligned}$$

Note that in odd dimension $D = 2n - 1$ and for $k = n - 1$, the corresponding action I_{n-1} is a Chern-Simons action, that is a $(2n - 1)$ -form whose exterior derivative can be written as the contraction of an invariant tensor with the wedge product of n curvatures two-forms. In even dimension $D = 2n$, the maximal value of k is $n - 1$, and in this case the resulting gravity action has a Born-Infeld like structure since it can be written as the Pfaffian of the 2-form $\bar{R}^{ab} = R^{ab} + e^a e^b$. The gravity theories I_k have been shown to possess black hole solutions with interesting features, in particular concerning their thermodynamics properties, see [8] and [9]. In what follows, we will consider a scalar field nonminimally coupled together with the gravity actions given by I_k , (2.2). More precisely, we will consider the following action for any integer $k \geq 2$,¹

$$S_k = I_k - \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{\xi}{2} R \Phi^2 + U(\Phi) \right], \quad (2.4)$$

The field equations read

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(k)} = T_{\mu\nu}, \quad (2.5a)$$

$$\square \Phi = \xi R \Phi + \frac{dU}{d\Phi}, \quad (2.5b)$$

where $\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(k)}$ is the gravity tensor associated to the variation of the action I_k (2.2),

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu}^{(k)} = & G_{\mu\nu} - \frac{(D-1)(D-2)}{2k} g_{\mu\nu} + \frac{(k-1)}{2(D-3)(D-4)} K_{\mu\nu} + \\ & \frac{(k-1)(k-2)}{3!(D-3)(D-4)(D-5)(D-6)} S_{\mu\nu} + \dots \end{aligned}$$

where $K_{\mu\nu}$ is the Gauss-Bonnet tensor

$$K_{\mu\nu} = 2(RR_{\mu\nu} - 2R_{\mu\rho}R^\rho{}_\nu - 2R^{\rho\sigma}R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_\mu{}^{\rho\sigma\gamma}R_{\nu\rho\sigma\gamma}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{GB}$$

and $S_{\mu\nu}$ arises from the variation of $\mathcal{L}_{(3)}$,

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} = & 3 \left(R^2 R_{\mu\nu} - 4RR_{\rho\mu}R^\rho{}_\nu - 4R^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}R_{\mu\nu} + 8R^{\rho\sigma}R_{\rho\mu}R_{\sigma\nu} - 4RR^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu} \right. \\ & + 8R^{\rho\kappa}R^\sigma{}_\kappa R_{\rho\mu\sigma\nu} - 16R^{\rho\sigma}R^\kappa{}_{(\mu}R_{|\kappa\sigma\rho|\nu)} + 2RR^{\rho\sigma\kappa}{}_\mu R_{\rho\sigma\kappa\nu} + R_{\mu\nu}R^{\rho\sigma\kappa\eta}R_{\rho\sigma\kappa\eta} \\ & - 8R^\rho{}_{(\mu}R^{\sigma\kappa\eta}{}_{|\rho|}R_{|\sigma\kappa\eta|\nu)} - 4R^{\rho\sigma}R^{\kappa\eta}{}_{\rho\mu}R_{\kappa\eta\sigma\nu} + 8R_{\rho\sigma}R^{\rho\kappa\sigma\eta}R_{\kappa\mu\eta\nu} - 8R_{\rho\sigma}R^{\rho\kappa\eta}{}_\mu R^\sigma{}_{\kappa\eta\nu} \\ & \left. + 4R^{\rho\sigma\kappa\eta}R_{\rho\sigma\zeta\mu}R_{\kappa\eta}{}^\zeta{}_\nu - 8R^{\rho\kappa\sigma\eta}R^\zeta{}_{\rho\sigma\mu}R_{\zeta\kappa\eta\nu} - 4R^{\rho\sigma\kappa}{}_\eta R_{\rho\sigma\kappa\zeta}R^\eta{}_\mu{}^\zeta{}_\nu \right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{(3)}. \end{aligned}$$

¹The standard GR case $k = 1$ will be discussed in the appendix.

In the matter part of the equations (2.5), $T_{\mu\nu}$ represents the energy-momentum tensor of the scalar field given by

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_\sigma\Phi\partial^\sigma\Phi + U(\Phi)\right) + \xi(g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu + G_{\mu\nu})\Phi^2, \quad (2.6)$$

where the potential $U(\Phi)$ is given by a mass term

$$U(\Phi) = \frac{8\xi D(D-1)}{(1-4\xi)^2}(\xi - \xi_D)(\xi - \xi_{D+1})\Phi^2, \quad (2.7)$$

where ξ_D denotes the conformal coupling in D dimensions

$$\xi_D = \frac{D-2}{4(D-1)}. \quad (2.8)$$

The choice of such potential will be justified in the appendix. Being a mass term and because of the presence of the term $\xi R\Phi^2$ in the action, one can define an effective mass m_{eff}^2 in the case of solutions of constant curvature $R = \text{constant}$ by

$$m_{\text{eff}}^2 = \xi R + \frac{16\xi D(D-1)}{(1-4\xi)^2}(\xi - \xi_D)(\xi - \xi_{D+1}). \quad (2.9)$$

As for the Einstein-Gauss-Bonnet case $k = 2$ [34], we will obtain the same two classes of black hole solutions for generic value of $k \geq 2$. More precisely, for each pair (D, k) with $D \geq 5$ and $k \geq 2$, we will derive two classes of AdS black hole solutions with planar event horizon topology for specific values of the nonminimal coupling parameter ξ .

2.1 Planar AdS black hole solutions

For $k \geq 2$, an AdS black hole solution is obtained provided that the nonminimal parameter ξ takes the following form

$$\xi_{k,D}^{\text{b.h.}} = \frac{(D-2)(k-1)}{4[(D-1)k - (D-2)]}, \quad (2.10)$$

which in turn implies that the potential (2.7) becomes

$$U_{k,D}^{\text{b.h.}}(\Phi) = \frac{(k-1)(D-2)^2(D-2+k)}{8k^2[(D-1)k - (D-2)]}\Phi^2. \quad (2.11)$$

In this case, the metric solution and the scalar field are given by

$$\begin{aligned} ds^2 &= -F_{k,D}^{\text{b.h.}}(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F_{k,D}^{\text{b.h.}}(r)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2, \\ F_{k,D}^{\text{b.h.}}(r) &= r^2 - \frac{M}{r^{\frac{D-2(k+1)}{k}}}, \\ \Phi_{k,D}^{\text{b.h.}}(r) &= M^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{\frac{4[(D-1)k - (D-2)]}{(k-1)(D-2)}} r^{\frac{(k-1)(2-D)}{2k}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Many comments can be made concerning this solution. Firstly, this black hole solution depends on a unique integration constant M , and for even k the scalar field is always real provided that M is positive constant while for odd k , the constant M can be positive or negative. The scalar field is well defined at the horizon and blows-up at the singularity $r = 0$. The solution given by (2.10), (2.11), (2.12) reduces to the one derived in the Einstein-Gauss-Bonnet case for $k = 2$ [34]. It is interesting to note that the standard GR-limit $k = 1$ (which yields to Einstein gravity with a negative cosmological constant) is possible only in the limit $M = 0$ as it can be seen from the expression of the scalar field. This is not surprising since for $k = 1$, the nonminimal coupling parameter (2.10) as well as the potential (2.11) vanish, and in this case, no-hair theorems forbid the existence of black hole solutions. We will come in detail to this point in the appendix. We would like also to emphasize that the allowed value of the nonminimal coupling parameter (2.10) which depends on (k, D) is bounded as $\xi_{k,D}^{b,h} < 1/4$ and its limit as k goes to infinity yields to the conformal coupling in D dimensions, $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{k,D}^{b,h} = \xi_D$. Finally, we may observe that in even dimension given by $D = 2(k + 1)$ which corresponds to the Born-Infeld case, the lapse function $F_{k,D}^{b,h}(r)$ has a BTZ-like form [35] as it occurs in the vacuum case with a base manifold chosen to be non-Einstein [36].

2.2 Planar AdS black hole stealth solutions

The black hole stealth solution for $k \geq 2$ can be obtained in analogue way that the one obtained in the Einstein-Gauss-Bonnet case $k = 2$ [34]; this means by combining the pure gravity solution with planar base manifold [8, 9] with the stealth configuration. By stealth configuration, we mean a non-trivial solution (with a non constant scalar field) of the stealth equations

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(k)} = 0 = T_{\mu\nu}, \tag{2.13}$$

where both side (gravity and matter part) vanishes.

In fact, it is not difficult to show that a self-interacting nonminimal scalar field given by

$$\Phi(r) = A r^{\frac{2\xi}{4\xi-1}}, \tag{2.14}$$

has a vanishing energy-momentum tensor (2.6) $T_{\mu\nu} = 0$ on the following ξ -dependent spacetime geometry

$$ds^2 = -\left(r^2 - \frac{M}{r^{\frac{4(D-2)\xi-(D-3)}{4\xi-1}}}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(r^2 - \frac{M}{r^{\frac{4(D-2)\xi-(D-3)}{4\xi-1}}}\right)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2. \tag{2.15}$$

On the other hand, the pure gravity equations $\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(k)} = 0$ has a black hole solution with a lapse function $F(r)$ given by [8, 9]

$$F(r) = r^2 - \frac{M}{r^{\frac{D-(2k+1)}{k}}}.$$

Now, in order for this metric function to coincide with the stealth metric (2.15), the non-minimal coupling parameter must be chosen as

$$\xi_{k,D}^{\text{stealth}} = \frac{(D-1)(k-1)}{4[Dk - (D-1)]}, \quad (2.16)$$

and hence the mass term potential (2.7) becomes

$$U_{k,D}^{\text{stealth}}(\Phi) = \frac{(k-1)(D-1)^2(D-1-k)}{8k^2[Dk - (D-1)]}\Phi^2. \quad (2.17)$$

Consequently, a topological black hole stealth solution of the stealth equation (2.13) is given by

$$\begin{aligned} ds^2 &= -F_{k,D}^{\text{stealth}}(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F_{k,D}^{\text{stealth}}(r)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2, \\ F_{k,D}^{\text{stealth}}(r) &= r^2 - \frac{M}{r^{\frac{D-(2k+1)}{k}}}, \\ \Phi_{k,D}^{\text{stealth}}(r) &= Ar^{\frac{(k-1)(1-D)}{2k}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

We may note that in contrast with the previous solution, the black hole stealth solution depends on two integration constants M and A , and in the vanishing M limit, the solution reduces to a stealth solution on the pure AdS background [37]. The GR limit $k = 1$ is also well defined yielding to a metric that is nothing but the topological Schwarzschild-AdS-Tangherlini spacetime. This is not surprising since in the GR limit case $k = 1$, the nonminimal coupling parameter as well as the potential vanish while the scalar field becomes constant, and hence the energy-momentum tensor vanishes $T_{\mu\nu} = 0$. In other words, in the GR-limit, the stealth equations (2.13) are equivalent to the pure Einstein equations $G_{\mu\nu} - \frac{(D-1)(D-2)}{2}g_{\mu\nu} = 0$. This class of solutions is of particular interest since, up to now, the only black hole stealth solution was the one obtained in [38] in the three-dimensional GR case with a static BTZ metric [35].

Let us go back to the ξ -dependent geometry (2.15) allowing the existence of solution of $T_{\mu\nu} = 0$. It is clear from the expression of the metric that for a nonminimal coupling parameter $\xi \in [\xi_{D+1}, \frac{1}{4}[$ where $\xi_{D+1} = (D-1)/(4D)$ is the conformal coupling in $(D+1)$ dimension, the asymptotic behavior of the metric as $r \rightarrow \infty$ is faster than the usual AdS one. However, requiring the metric to be also solution of the gravity part $\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(k)} = 0$, we have seen that the parameter ξ must take the form (2.16), and it is not difficult to prove that $\xi_{k,D}^{\text{stealth}} < \xi_{D+1}$. To conclude, we would like to point out a certain symmetry between the black hole and stealth solution as reflected by the following relations

$$\xi_{k,D}^{\text{stealth}} = \xi_{k,D+1}^{\text{b.h}}, \quad F_{k,D}^{\text{stealth}} = F_{k,D+1}^{\text{b.h}}, \quad U_{k,D}^{\text{stealth}} = U_{k,D+1}^{\text{b.h}}, \quad \Phi_{k,D}^{\text{stealth}} \propto \Phi_{k,D+1}^{\text{b.h}}.$$

These relations can also be interpreted as follows: a particular two-parametric stealth solution in D dimension given by (2.18) but with a constant A fixed in term of M as

$$A = M^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{\frac{4[(D-1)k - (D-2)]}{(k-1)(D-2)}}$$

can be promoted to the uniparametric black hole solution in $(D+1)$ dimension (2.12).

3 Adding exact $(D - 1)$ -forms

In the previous section, we have constructed two classes of topological black hole solutions for a self-interacting nonminimal scalar field with a gravity theory given by a particular Lovelock action. The base manifold of these solutions is planar and these configurations require a particular value of the nonminimal coupling parameter (2.10)–(2.16) which depends on the dimension D and the gravity theory $k \geq 2$. As it will be shown in the appendix, the existence of these solutions is strongly inherent to the presence of the higher-order curvature terms of the Lovelock theory. Indeed in the standard GR case $k = 1$, we will establish that black hole solutions with planar base manifold for a scalar field nonminimally coupled with a possible mass term potential are only possible in three dimensions yielding to the Martinez-Zanelli solution [39].² In the standard GR case, it has been shown recently that the inclusion of multiple exact p -forms homogenously distributed permits the construction of black holes with planar horizon [40, 41] without any restrictions on the dimension or on the value of the nonminimal parameter [42]. Since, we are interested on such solutions, we now propose to introduce appropriately some exact p -forms in order to obtain topological black hole solutions with arbitrary nonminimal coupling parameter. More precisely, we consider the following action in arbitrary D dimension

$$\mathcal{S}_k = -\frac{1}{2k(D-3)!} \int \sum_{p=0}^k \frac{C_p^k}{(D-2p)} L^{(p)} - \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{\xi}{2} R \Phi^2 + U(\Phi) \right] - \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{\epsilon(\Phi)}{2(D-1)!} \sum_{i=1}^{D-2} \mathcal{H}_{\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}}^{(i)} \mathcal{H}^{(i)\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}} \right],$$

where we have introduced $(D - 2)$ - fields $\mathcal{H}^{(i)}$ which are exact $(D - 1)$ -forms, and where the potential is again the mass term defined in (2.7). The coupling function between the scalar field and the $(D - 1)$ -forms, $\epsilon(\Phi)$, depends on the scalar field Φ as

$$\epsilon(\Phi) = \sigma \Phi^{\frac{2(2-3k)\xi+k-1}{\xi(k-1)}} \tag{3.1}$$

where σ is a coupling constant. We stress that the expression of this coupling ϵ is not well-defined in the standard GR case $k = 1$. However, as mentioned before, the solutions in the standard Einstein gravity have been obtained in [42] for a more general class of potential than the one considered here (2.7). Note that there exists another particular value of the nonminimal coupling parameter $\xi = \frac{k-1}{2(3k-2)}$ for which the coupling ϵ becomes constant; we will come to this point below.

The field equations obtained by varying the action with the different dynamical fields $g_{\mu\nu}$, Φ and $\mathcal{H}^{(i)}$ read

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(k)} = T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\text{extra}}, \quad \partial_\alpha \left(\sqrt{-g} \epsilon(\Phi) \mathcal{H}^{(i)\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{D-2}} \right) = 0, \tag{3.2a}$$

$$\square \Phi = \xi R \Phi + \frac{dU}{d\Phi} + \frac{1}{2} \frac{d\epsilon}{d\Phi} \left[\sum_{i=1}^{D-2} \frac{1}{(D-1)!} \mathcal{H}_{\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}}^{(i)} \mathcal{H}^{(i)\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}} \right] = 0, \tag{3.2b}$$

²We will obtain this result by considering an Ansatz for the metric that depends on a unique lapse function.

where the extra piece in the energy-momentum tensor reads

$$T_{\mu\nu}^{\text{extra}} = \epsilon(\Phi) \sum_{i=1}^{D-2} \left[\frac{1}{(D-2)!} \mathcal{H}_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{D-2}}^{(i)} \mathcal{H}_{\nu}^{(i)\alpha_1 \dots \alpha_{D-2}} - \frac{g_{\mu\nu}}{2(D-1)!} \mathcal{H}_{\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}}^{(i)} \mathcal{H}^{(i)\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}} \right]$$

Looking for a purely electrically homogenous Ansatz for the $(D-1)$ -forms as

$$\mathcal{H}^{(i)} = \mathcal{H}_{tr x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{D-2}}(r) dt \wedge dr \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^{D-2}, \quad (3.3)$$

a solution of the field equations (3.2) is given by

$$ds^2 = - \left(r^2 - \frac{M}{r^{\frac{2[2(2k-1)\xi - (k-1)]}{(k-1)(1-4\xi)}}} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(r^2 - \frac{M}{r^{\frac{2[2(2k-1)\xi - (k-1)]}{(k-1)(1-4\xi)}}} \right)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2, \quad (3.4a)$$

$$\Phi(r) = \sqrt{\frac{M^{k-1} [2(3k-2)\xi - k + 1] (D-2)}{\{2[2(D-1)k - D]\xi - (k-1)(D-2)\} k \xi}} r^{\frac{2\xi}{4\xi-1}}, \quad (3.4b)$$

$$\mathcal{H}^{(i)} = \frac{p}{\epsilon(\Phi)} r^{D-4} dt \wedge dr \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^{D-2}, \quad (3.4c)$$

where the constant p is defined by

$$p = B \sqrt{\frac{-2\sigma \left(\xi - \xi_{k,D}^{\text{stealth}} \right) \left(\xi - \xi_{k,D}^{\text{b.h.}} \right) \left[Dk - (D-1) \right] \left[(D-1)k - (D-2) \right]}{k-1}}, \quad (3.5)$$

and where the constants $\xi_{k,D}^{\text{b.h.}}$ and $\xi_{k,D}^{\text{stealth}}$ are the particular values of the nonminimal parameter for which we have derived the previous solutions in the pure scalar field case (2.10)–(2.16). In this last expression, the constant B reads

$$B = \frac{4\xi^{\frac{2(4k-3)\xi - k + 1}{4\xi(k-1)}} \left\{ \left[2 \left(2(D-1)k - D \right) \xi - (k-1)(D-2) \right] k \right\}^{\frac{2(2k-1)\xi - k + 1}{4\xi(k-1)}} M^{\frac{(k-1)(1-4\xi)}{4\xi}}}{(4\xi-1) \left\{ \left[2(3k-2)\xi - k + 1 \right] (D-2) \right\}^{\frac{2(3k-2)\xi - k + 1}{4\xi(k-1)}}}$$

As in the pure scalar field case, many comments can be made concerning the solution obtained in the presence of these $(D-2)$ extra $(D-1)$ -forms $\mathcal{H}^{(i)}$. Firstly, it is simple to see that for $\xi = \xi_{k,D}^{\text{stealth}}$ or $\xi = \xi_{k,D}^{\text{b.h.}}$ the constant p becomes zero and the solutions are those found previously considering only a scalar field nonminimally coupled with a mass term potential. From the expression of the metric solution, we can see that for $\xi > 1/4$, the asymptotic behavior of the metric is faster than the usual AdS one while for $\xi < 1/4$, the dominant term as $r \rightarrow \infty$ is given by $F(r) \sim r^2$. From the expression of the scalar field, it is easy to see that for a constant $M > 0$, the allowed values of ξ in order to deal with a real solution are

$$\xi \in]0, \frac{k-1}{2(3k-2)}] \cup]\xi_{\text{critical}}, +\infty[, \quad \xi_{\text{critical}} := \frac{(k-1)(D-2)}{2[2(D-1)k - D]},$$

while for $M < 0$, the ranges are

$$\begin{aligned} \xi &\in]0, \frac{k-1}{2(3k-2)}] \cup]\xi_{\text{critical}}, +\infty[, & \text{for odd } k, \\ \xi &\in [\frac{k-1}{2(3k-2)}, \xi_{\text{critical}}[, & \text{for even } k. \end{aligned}$$

Solutions of constant scalar curvature $R = -D(D-1)$ are obtained for two values of the nonminimal parameter

$$\xi = \frac{(k-1)D}{4(D(k-1)+1)}, \quad \xi = \frac{(k-1)(D-1)}{4[(D-1)k - (D-2)]}.$$

For this last value of the parameter ξ , the effective square mass (2.9) becomes

$$m_{\text{eff}}^2 = \frac{(k-1)(k-3)(D-1)^2}{4},$$

and it is intriguing to note that it saturates the Breitenlohner-Freedman bound for $k=2$ [34] while for $k=3$, the solution becomes massless.

Pure axionic solution: in order to be complete, we may look for pure axionic solutions. This means a solution of the field equations without considering the contribution of the scalar field,

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(k)} = T_{\mu\nu}^{\text{extra}}. \tag{3.6}$$

Considering an Ansatz for the metric involving a unique metric function, the integration of the field equations yields

$$ds^2 = -\left(r^2 - Mr^{\frac{2(k-1)}{k}}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(r^2 - Mr^{\frac{2(k-1)}{k}}\right)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2, \tag{3.7a}$$

$$\mathcal{H}^{(i)} = -M^{\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{D-3}{k\sigma}} r^{D-4} dt \wedge dr \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^{D-2}. \tag{3.7b}$$

We note that this solution can be obtained from the solutions with scalar field (3.4) by taking the well-defined limit $\xi = \frac{k-1}{2(3k-2)}$. This is not surprising owing to the choice of our coupling function ϵ defined in (3.1) which becomes constant for $\xi = \frac{k-1}{2(3k-2)}$. It is also interesting to note that in this case, since the contribution of the scalar field is not longer present, the GR limit $k=1$ is well-defined yielding a metric function of the BTZ form [40].

4 Comments and conclusions

Here, we have considered a gravity theory given by a particular Lovelock Lagrangian labeled by an integer k for which the coefficients are fixed in order to have an unique AdS vacuum with a fixed value of the cosmological constant. The matter part of our action is concerned with a self-interacting scalar field nonminimally coupled with a potential given by a mass term. For this model labeled by the dimension D and the integer k , we have derived two classes of black hole solutions with planar event horizon topology for particular values of

the nonminimal coupling parameter depending on D and k . The first class of solutions is uniparametric and reduces to the pure AdS metric without scalar field in the vanishing limit of the parameter. The second class of solutions depends on two parameters and is interpreted as a black hole stealth configuration. To be more precise, we have shown the existence of a nontrivial self-interacting scalar field with a vanishing energy-momentum tensor with a black hole metric solving the pure gravity equations. In the last section, we have added to the starting action exact $(D-1)$ -forms minimally coupled to the scalar field. In this case and for an appropriate coupling, we have been able to construct more general black hole solutions with planar event horizon topology. All these solutions generalize for an arbitrary $k \geq 2$ those obtained in [34] in the Einstein-Gauss-Bonnet case $k = 2$. In the appendix, we have established that these solutions may be viewed as originated from a stealth configuration on a pure AdS background through a Kerr-Schild transformation. We have also shown that their standard GR counterpart $k = 1$ can not be obtained along the same lines, and hence the occurrence of such solutions is strongly inherent to the presence of the higher-order curvature terms of the Lovelock gravity theory. It seems then that the emergence of these black hole solutions with planar event horizon topology is a consequence of the higher-order curvature terms combined with the existence of a stealth configuration on the pure AdS metric. Indeed, as shown in [37], static stealth configurations given by a scalar field nonminimally coupled require the base manifold to be planar. Indeed, stealth solutions with spherical or hyperboloid base manifold are possible only in the non static case [37]. It will be interesting to see whether these non static stealth configurations with spherical or hyperboloid base manifold can be promoted as black hole solutions through a similar Kerr-Schild transformation. In this case, since the scalar field depends explicitly on the time as well as on the radial coordinates, the metric function generated through the Kerr-Schild transformation must probably depend also on these two coordinates. This will considerably complicate the task of integrating the metric function.

In this paper, we have also derived a class of black hole stealth configuration whose metric is a black hole solution of the pure gravity equations [8, 9]. These metrics can be promoted to electrically charged black hole solutions with a standard Maxwell source [8, 9]. It is then natural to ask whether one can derive the electrically charged version of the solutions found here. As a first task, it will be useful to derive, if possible, the electrically charged version of the stealth configuration found in [37].

We have seen that the existence of these solutions is strongly inherent to the higher-order curvature terms of the Lovelock theories. As it is well-known, the field equations associated to the Lovelock gravity are of second order in spite of the presence of these terms. In ref. [43], a cubic gravity theory has been constructed in five dimensions by requiring the trace of the field equations to be proportional to the Lagrangian which in turn implies that for an Ansatz metric of the “spherical” form, the field equations are of second-order. It will be interesting to explore if this five-dimensional cubic gravity theory and its generalizations to higher odd dimension can accommodate the classes of solutions found here.

In ref. [8, 9], the authors have done a complete study of the thermodynamical properties of the pure gravity solutions. The black hole stealth solutions obtained here have

the same lapse metric with a nontrivial matter source, and hence it will be more than interesting to investigate the effects on the thermodynamical quantities of the presence of this nontrivial source. Note that the thermodynamics of general Lovelock gravity has been analyzed in [44].

As a final remark, in ref. [45], the authors constructed conformal coupling to arbitrary higher-order Euler densities. It will be interesting to see whether such matter source can accommodate the kind of solutions derived here.

Acknowledgments

We thank Julio Oliva and Sourya Ray for useful discussions. MB is supported by BECA DOCTORAL CONICYT 21120271. MH was partially supported by grant 1130423 from FONDECYT, by grant ACT 56 from CONICYT and from CONICYT, Departamento de Relaciones Internacionales “Programa Regional MATHAMSUD 13 MATH-05”.

A Complements concerning the solutions

A.1 Stealth origin of the solutions

In this appendix, we will show that the AdS black hole solutions obtained here can be viewed as originated from a stealth configuration defined on the pure AdS metric through a Kerr-Schild transformation.

Let us start with a self-interacting scalar field Φ nonminimally coupled whose stress tensor $T_{\mu\nu}$ is given by

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\sigma \Phi \partial^\sigma \Phi + U(\Phi) \right) + \xi (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu + G_{\mu\nu}) \Phi^2. \quad (\text{A.1})$$

As shown in ref. [37], a solution of the equation $T_{\mu\nu} = 0$ on the pure AdS metric

$$ds^2 = -r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2 \quad (\text{A.2})$$

is given by the following configuration

$$U(\Phi) = \frac{\xi}{(1-4\xi)^2} \left[2\xi b^2 \Phi^{\frac{1-2\xi}{\xi}} - 8(D-1)(\xi - \xi_D) \left(2\xi b \Phi^{\frac{1}{2\xi}} - D(\xi - \xi_{D+1}) \Phi^2 \right) \right], \quad (\text{A.3a})$$

$$\Phi(r) = (Ar + b)^{\frac{2\xi}{4\xi-1}}. \quad (\text{A.3b})$$

For technical reasons, we will restrict ourselves to the case $b = 0$,³ which in turn implies that the stealth potential (A.3a) reduces to the mass term considered in this paper (2.7). Let us first operate a Kerr-Schild transformation on the AdS metric (A.2) with a null and

³In fact, one can follow the analysis with $b \neq 0$, but, the remaining independent Einstein equations will impose $A = 0$ or $b = 0$ in order to deal with a nontrivial metric function. The case $A = 0$ implies that the scalar field is constant and the solution reduces to the pure Lovelock solution with a suitable redefinition of the cosmological constant.

geodesic vector $l = dt - \frac{dr}{r^2}$, and this without affecting the scalar field. The transformed metric becomes after redefining the time coordinate

$$ds^2 = -r^2 \left(1 - f(r)\right) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 \left(1 - f(r)\right)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2. \quad (\text{A.4})$$

It is easy to see that the components on-shell⁴ of the energy-momentum tensor (A.1) and the gravity tensor satisfy the following identities

$$\mathcal{G}^{(k)t}_t = \mathcal{G}^{(k)r}_r, \quad \mathcal{G}^{(k)i}_i = \frac{1}{(D-2)} \left[r \left(\mathcal{G}^{(k)t}_t \right)' + \mathcal{G}^{(k)t}_t (D-2) \right] \quad (\text{A.5a})$$

$$T^t_t = T^r_r, \quad T^i_i = \frac{(4\xi - 1)}{4\xi(D-1) - (D-2)} \left[r \left(T^t_t \right)' + T^t_t (D-2) \right] \quad (\text{A.5b})$$

Because of these relations (A.5), a necessary condition for the field equations $\mathcal{G}^{(k)}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ to be satisfied is that $\xi = 0$ or $T^i_i = 0 = \mathcal{G}^{(k)i}_i$. The condition $T^i_i = 0$ yields a second-order Cauchy equation for the metric function f whose solution reads

$$f(r) = \frac{M_1}{r^{\frac{4(D-1)\xi - (D-2)}{4\xi - 1}}} + \frac{M_2}{r^{\frac{(4\xi - 1)D + 1}{4\xi - 1}}}, \quad (\text{A.6})$$

where M_1 and M_2 are two integration constants. Injecting this metric function (A.6) into the condition $\mathcal{G}^{(k)i}_i = 0$ yields

$$M_1^2 \left(\xi - \xi^{(1)} \right) \left(\xi - \xi_{k,D}^{\text{b.h.}} \right) r^2 + \beta_2 M_1 M_2 \left(\xi - \xi_{k,D}^{\text{stealth}} \right) \left(\xi - \xi_{k,D}^{\text{b.h.}} \right) r + \beta_3 M_2^2 \left(\xi - \xi_{k,D}^{\text{stealth}} \right) \left(\xi - \xi^{(2)} \right) = 0 \quad (\text{A.7})$$

where the β_i are non-vanishing constants and where we have defined

$$\xi^{(1)} = \frac{1}{4} \left[\frac{(k-1)D - 2k + 1}{(k-1)(D-1)} \right], \quad \xi^{(2)} = \frac{1}{4} \left[\frac{(k-1)D - k + 2}{D(k-1) + 2} \right].$$

As it can be seen from $\xi^{(1)}$, these relations are valid only for $k \geq 2$. In fact, apart from the trivial solution $M_1 = M_2 = 0$ that yields to the pure AdS metric, there exists *a priori* four options to solve the previous constraint (A.7)

$$\begin{aligned} \text{Option I: } & \left\{ M_1 = 0, \xi = \xi_{k,D}^{\text{stealth}} \right\}, & \text{Option II: } & \left\{ M_1 = 0, \xi = \xi^{(2)} \right\}, \\ \text{Option III: } & \left\{ M_2 = 0, \xi = \xi_{k,D}^{\text{b.h.}} \right\}, & \text{Option IV: } & \left\{ M_2 = 0, \xi = \xi^{(1)} \right\}. \end{aligned}$$

The options I and IV give rise to a metric function given by the stealth metric $F_{k,D}^{\text{stealth}}$ while for the options II and III, the metric becomes $F_{k,D}^{\text{b.h.}}$. However, it remains one independent Einstein equation to be satisfied, that is $\mathcal{G}^{(k)t}_t = T^{(k)t}_t$. In doing so, the options I and III precisely yield to the two classes of solutions derived in this paper. For the options II, the solution reduces to the stealth configuration on the pure AdS metric [37], and for the option IV besides to the stealth configuration, there exists the possibility with a vanishing scalar field defined on the stealth metric $F_{k,D}^{\text{stealth}}$.

⁴By on-shell, we mean using the expression of the potential (A.3), scalar field (A.3b) and the Ansatz metric (A.4) with $b = 0$.

A.2 Particular case of Einstein gravity $k = 1$

We will now consider the standard GR case $k = 1$, and we will establish that the unique black hole solution with planar base manifold (with a unique metric function) of a scalar field nonminimally coupled with a possible mass term potential is the Martinez-Zanelli solution in $D = 3$ [39].⁵ Hence, we consider the following action

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (R - 2\Lambda) \right] - \int d^D x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{\xi}{2} R \Phi^2 + \alpha \Phi^2 \right), \quad (\text{A.8})$$

where $\Lambda = -\frac{1}{2}(D-1)(D-2)$ is the cosmological constant and the potential is given by a mass term $U(\Phi) = \alpha \Phi^2$ where α is a constant. The field equations of (A.8) obtained by varying the action with respect to the different dynamical fields read

$$E_{\mu\nu} := G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\sigma \Phi \partial^\sigma \Phi + \alpha \Phi^2 \right) - \xi (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu + G_{\mu\nu}) \Phi^2 = 0,$$

$$\square \Phi = \xi R \Phi + \frac{dU}{d\Phi}.$$

We look for an Ansatz metric of the form

$$ds^2 = -F(r) dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2, \quad (\text{A.9})$$

while the scalar field is assumed to depend only on the radial coordinates, $\Phi = \Phi(r)$. The combination of the Einstein equations combination $E_t^t - E_r^r = 0$ implies that the scalar field must be given by

$$\Phi(r) = \frac{A}{(r+B)^{\frac{2\xi}{1-4\xi}}} \quad (\text{A.10})$$

where A and B are two integration constants. Substituting this expression (A.10) into the equation $E_t^t = 0$ (or equivalently $E_r^r = 0$), the metric function is obtained as

$$F(r) = \frac{4 (r+B)^{1+\delta} \left[(D-2)(1+\delta)r^2 - Cr^{-D+3} - \alpha h(r) \right]}{4(1+\delta)(D-2)(r+B)^{1+\delta} + A^2 \left[(\delta - D + 2)r - B(D-2) \right] \delta}, \quad (\text{A.11})$$

where for convenience, we have defined $\delta = 4\xi/(1-4\xi)$ and where C is an integration constant. In this expression, the function $h(r)$ can be given in an integral form as

$$h(r) = 2r^{-D+3} A^2 (1+\delta) \int r^{D-2} (r+B)^{-\delta} dr$$

or by a finite series

$$h(r) = 2r^{-D+3} A^2 (1+\delta) \left[\frac{r^{D-2}(r+B)^{1-\delta}}{(1-\delta)} + \sum_{k=1}^{D-2} \frac{(-1)^k (D-2)(D-3)\dots(D-k-1)}{(1-\delta)(2-\delta)\dots(k+1-\delta)} r^{D-k-2} (r+B)^{k+1-\delta} \right],$$

which is only valid for $\delta \neq 1, 2, \dots, (D-1)$.

⁵We also assume that the scalar field as well as the metric function only depends on the coordinate r .

The remaining of the analysis must be divided in two cases depending if the coupling constant associated to the potential α is chosen to be zero or not. For a non-vanishing α , the remaining independent Einstein equation $E_i^i = 0$ will imply that

$$\alpha = \frac{\delta(\delta - D + 2)(\delta - D + 1)}{8(\delta + 1)}, \tag{A.12}$$

and $B = C = 0$. This solution is nothing but a particular stealth solution on the pure AdS metric.

We now turn to the case with a vanishing coupling constant $\alpha = 0$, and we split the analysis in two branches depending on the sign of the constant δ (the option $\delta = 0$ is equivalent to $\xi = 0$). In fact, for $\delta \neq 0$, we note that substituting the metric function (A.11) with $\alpha = 0$ into the equation $E_i^i = 0$, we get the following complicated expression after some algebraic manipulations

$$(y - B)^D \left(\sum_{k=2}^7 \alpha_k y^{2\delta+k} + \sum_{k=1}^7 \beta_k y^{\delta+k} + \sum_{k=2}^7 \gamma_k y^k \right) + C \left[\sum_{k=2}^8 \epsilon_k y^{2\delta+k} + \sum_{k=1}^8 \eta_k y^{\delta+k} \right. \tag{A.13}$$

$$\left. + A^4 B \delta^2 (-\delta + D - 2) y^2 (-y + B)^5 \right] = 0.$$

Here, we have defined $y = r + B$ and the different constants appearing in this expression are not reported for simplicity. For $\delta < 0$, the highest power of (A.13) is $D + 7$, and the vanishing of the corresponding coefficient γ_7 implies that $A = 0$ and hence the scalar field $\Phi = 0$. It is also easy to see that the coefficient of $y^{2\delta+D+7}$ never vanishes and finally we conclude that solutions do not exist for $\delta < 0$. Let us now consider the case $\delta > 0$ for which the highest power of (A.13) is $2\delta + D + 7$ and its corresponding coefficient is α_7 . In this situation, we have only two possible solutions for a generic dimension D which are $\delta = D - 1$ or $\delta = D - 2$. For the first option $\delta = D - 1$, the constant B must vanish and $C = -\frac{1}{4}A^2(D - 1)$, yielding again to a particular stealth configuration on the pure AdS metric. The remaining option $\delta = D - 2$ is the most interesting one. Indeed, the eq. (A.13) becomes now

$$(y - B)^D \left(\sum_{k=2}^5 \alpha_{k,D} y^{2D+k-4} + \sum_{k=1}^6 \beta_{k,D} y^{D+k-2} + \sum_{k=2}^5 \gamma_{k,D} y^k \right) + \tag{A.14}$$

$$C \left(\sum_{k=2}^8 \epsilon_{k,D} y^{2D+k-4} + \sum_{k=1}^7 \eta_{k,D} y^{D+k-2} \right) = 0.$$

The highest possible powers are given by y^{3D+1} and y^{2D+4} and these latter coincide only in three dimension $D = 3$. Otherwise for $D > 3$, the highest power is y^{3D+1} , and after some computations we obtain that $B = C = 0$ yielding again a particular stealth configuration on the pure AdS metric. The case $D = 3$ has already been analyzed in details in [46], and the only black hole solution is the Martinez-Zanelli solution [39].

References

- [1] B. Zwiebach, *Curvature squared terms and string theories*, *Phys. Lett. B* **156** (1985) 315 [[INSPIRE](#)].
- [2] B. Zumino, *Gravity theories in more than four-dimensions*, *Phys. Rept.* **137** (1986) 109 [[INSPIRE](#)].
- [3] C. Lanczos, *A remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor in four dimensions*, *Annals Math.* **39** (1938) 842 [[INSPIRE](#)].
- [4] D. Lovelock, *The Einstein tensor and its generalizations*, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 498 [[INSPIRE](#)].
- [5] J. Zanelli, *Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities. Second edition (February 2008)*, [hep-th/0502193](#) [[INSPIRE](#)].
- [6] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Dimensionally continued black holes*, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 975 [[gr-qc/9307033](#)] [[INSPIRE](#)].
- [7] R.-G. Cai and K.-S. Soh, *Topological black holes in the dimensionally continued gravity*, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 044013 [[gr-qc/9808067](#)] [[INSPIRE](#)].
- [8] J. Crisostomo, R. Troncoso and J. Zanelli, *Black hole scan*, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 084013 [[hep-th/0003271](#)] [[INSPIRE](#)].
- [9] R. Aros, R. Troncoso and J. Zanelli, *Black holes with topologically nontrivial AdS asymptotics*, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 084015 [[hep-th/0011097](#)] [[INSPIRE](#)].
- [10] D.G. Boulware and S. Deser, *String Generated Gravity Models*, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 2656 [[INSPIRE](#)].
- [11] R.-G. Cai, *Gauss-Bonnet black holes in AdS spaces*, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 084014 [[hep-th/0109133](#)] [[INSPIRE](#)].
- [12] C. Charmousis, *Higher order gravity theories and their black hole solutions*, *Lect. Notes Phys.* **769** (2009) 299 [[arXiv:0805.0568](#)] [[INSPIRE](#)].
- [13] C. Garraffo and G. Giribet, *The Lovelock black holes*, *Mod. Phys. Lett. A* **23** (2008) 1801 [[arXiv:0805.3575](#)] [[INSPIRE](#)].
- [14] X.O. Camanho and J.D. Edelstein, *A Lovelock black hole bestiary*, *Class. Quant. Grav.* **30** (2013) 035009 [[arXiv:1103.3669](#)] [[INSPIRE](#)].
- [15] J.P.S. Lemos, *Two Dimensional Black Holes and Planar General Relativity*, *Class. Quant. Grav.* **12** (1995) 1081 [[gr-qc/9407024](#)] [[INSPIRE](#)].
- [16] J.P.S. Lemos, *Three Dimensional Black Holes and Cylindrical General Relativity*, *Phys. Lett. B* **353** (1995) 46 [[gr-qc/9404041](#)] [[INSPIRE](#)].
- [17] J.M. Maldacena, *The large- N limit of superconformal field theories and supergravity*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231 [*Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113] [[hep-th/9711200](#)] [[INSPIRE](#)].
- [18] G.T. Horowitz, *Introduction to Holographic Superconductors*, *Lect. Notes Phys.* **828** (2011) 313 [[arXiv:1002.1722](#)] [[INSPIRE](#)].
- [19] S.A. Hartnoll, C.P. Herzog and G.T. Horowitz, *Holographic superconductors*, *JHEP* **12** (2008) 015 [[arXiv:0810.1563](#)] [[INSPIRE](#)].

- [20] C.P. Herzog, *Lectures on Holographic Superfluidity and Superconductivity*, *J. Phys. A* **42** (2009) 343001 [[arXiv:0904.1975](#)] [[INSPIRE](#)].
- [21] J. Bekenstein, *Exact solutions of Einstein conformal scalar equations*, *Annals Phys.* **82** (1974) 535 [[INSPIRE](#)].
- [22] N.M. Bocharova, K.A. Bronnikov and V.N. Melnikov, *An exact solution of the system of Einstein equations and mass-free scalar field*, *Vestn. Mosk. Univ. Fiz. Astron.* **6** (1970) 706 [*Moscow Univ. Phys. Bull.* **25** (1970) 80].
- [23] J.D. Bekenstein, *Black holes: classical properties, thermodynamics and heuristic quantization*, [gr-qc/9808028](#) [[INSPIRE](#)].
- [24] C. Martinez, R. Troncoso and J. Zanelli, *de Sitter black hole with a conformally coupled scalar field in four-dimensions*, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 024008 [[hep-th/0205319](#)] [[INSPIRE](#)].
- [25] C. Martinez, J.P. Staforelli and R. Troncoso, *Topological black holes dressed with a conformally coupled scalar field and electric charge*, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 044028 [[hep-th/0512022](#)] [[INSPIRE](#)].
- [26] A. Anabalón and A. Cisterna, *Asymptotically (anti) de Sitter Black Holes and Wormholes with a Self Interacting Scalar Field in Four Dimensions*, *Phys. Rev. D* **85** (2012) 084035 [[arXiv:1201.2008](#)] [[INSPIRE](#)].
- [27] A. Anabalón, *Exact black holes and universality in the backreaction of non-linear σ -models with a potential in (A)dS₄*, *JHEP* **06** (2012) 127 [[arXiv:1204.2720](#)] [[INSPIRE](#)].
- [28] A.D. Linde, *Coleman-Weinberg Theory and a New Inflationary Universe Scenario*, *Phys. Lett. B* **114** (1982) 431 [[INSPIRE](#)].
- [29] C.G. Callan Jr., S.R. Coleman and R. Jackiw, *A new improved energy-momentum tensor*, *Annals Phys.* **59** (1970) 42 [[INSPIRE](#)].
- [30] D.Z. Freedman, I.J. Muzinich and E.J. Weinberg, *On the Energy-Momentum Tensor in Gauge Field Theories*, *Annals Phys.* **87** (1974) 95 [[INSPIRE](#)].
- [31] D.J. Freedman and E.J. Weinberg, *The Energy-Momentum Tensor In Scalar And Gauge Field Theories*, *Annals Phys.* **87** (1974) 354 [[INSPIRE](#)].
- [32] V. Faraoni, *Nonminimal coupling of the scalar field and inflation*, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 6813 [[astro-ph/9602111](#)] [[INSPIRE](#)].
- [33] V. Faraoni, *Does the nonminimal coupling of the scalar field improve or destroy inflation?*, [gr-qc/9807066](#) [[INSPIRE](#)].
- [34] M.B. Gaete and M. Hassaine, *Topological black holes for Einstein-Gauss-Bonnet gravity with a nonminimal scalar field*, [arXiv:1308.3076](#) [[INSPIRE](#)].
- [35] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *The black hole in three-dimensional space-time*, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849 [[hep-th/9204099](#)] [[INSPIRE](#)].
- [36] F. Canfora and A. Giacomini, *BTZ-like black holes in even dimensional Lovelock theories*, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 024022 [[arXiv:1005.0091](#)] [[INSPIRE](#)].
- [37] E. Ayon-Beato, C. Martinez, R. Troncoso and J. Zanelli, *Stealths on (A)dS*, work in progress (private communication).
- [38] E. Ayon-Beato, C. Martinez and J. Zanelli, *Stealth scalar field overflying a (2+1) black hole*, *Gen. Rel. Grav.* **38** (2006) 145 [[hep-th/0403228](#)] [[INSPIRE](#)].

- [39] C. Martinez and J. Zanelli, *Conformally dressed black hole in (2+1)-dimensions*, *Phys. Rev. D* **54** (1996) 3830 [[gr-qc/9604021](#)] [[INSPIRE](#)].
- [40] Y. Bardoux, M.M. Caldarelli and C. Charmousis, *Shaping black holes with free fields*, *JHEP* **05** (2012) 054 [[arXiv:1202.4458](#)] [[INSPIRE](#)].
- [41] Y. Bardoux, M.M. Caldarelli and C. Charmousis, *Conformally coupled scalar black holes admit a flat horizon due to axionic charge*, *JHEP* **09** (2012) 008 [[arXiv:1205.4025](#)] [[INSPIRE](#)].
- [42] M.M. Caldarelli, C. Charmousis and M. Hassaine, *AdS black holes with arbitrary scalar coupling*, *JHEP* **10** (2013) 015 [[arXiv:1307.5063](#)] [[INSPIRE](#)].
- [43] J. Oliva and S. Ray, *A new cubic theory of gravity in five dimensions: Black hole, Birkhoff's theorem and C-function*, *Class. Quant. Grav.* **27** (2010) 225002 [[arXiv:1003.4773](#)] [[INSPIRE](#)].
- [44] R.-G. Cai, *A note on thermodynamics of black holes in Lovelock gravity*, *Phys. Lett. B* **582** (2004) 237 [[hep-th/0311240](#)] [[INSPIRE](#)].
- [45] J. Oliva and S. Ray, *Conformal couplings of a scalar field to higher curvature terms*, *Class. Quant. Grav.* **29** (2012) 205008 [[arXiv:1112.4112](#)] [[INSPIRE](#)].
- [46] E. Ayon-Beato, A. Garcia, A. Macias and J.M. Perez-Sanchez, *Note on scalar fields nonminimally coupled to (2+1) gravity*, *Phys. Lett. B* **495** (2000) 164 [[gr-qc/0101079](#)] [[INSPIRE](#)].

Capítulo 4

Primera ley de la termodinámica para agujeros negros asintóticamente Lifshitz

Durante la última década, ha existido una intensa actividad en promover las ideas de la correspondencia AdS/CFT [21] a modo de obtener una mejor comprensión en teorías de campos fuertemente acopladas con escalamiento anisotrópico, tales como por ejemplo en sistemas cuánticos críticos donde el comportamiento de escala de estos sistemas se encuentra codificado en las simetrías de un espacio-tiempo muy particular que veremos a continuación.

Una transición cuántica de fase es una transición de fase que ocurre entre dos diferentes fases a temperatura cero. En este punto crítico, el sistema pasa a ser invariante bajo el reescalamiento [70]

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad \vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x}, \quad (4.0.1)$$

donde λ es una constante no nula y z se conoce como exponente dinámico. Bajo este contexto, el modelo gravitacional en el cual nos enfocaremos corresponde al denominado espacio-tiempo de Lifshitz dado por [71]

$$ds_L^2 = -\frac{r^{2z}}{l^{2z}} dt^2 + \frac{l^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2, \quad (4.0.2)$$

donde D es la dimensión y $z = 1$ es el caso AdS. Esta métrica es invariante bajo las transformaciones (4.0.1) junto con $r \rightarrow \lambda^{-1} r$. Adicionalmente, podemos extender esta métrica y encontrar agujeros negros de Lifshitz, correspondientes a configuraciones de agujeros negros los cuales son asintóticamente el espacio-tiempo dado en (4.0.2). Para ello, consideraremos el ansatz métrico

$$ds^2 = -\frac{r^{2z}}{l^{2z}} f(r) dt^2 + \frac{l^2}{r^2} \frac{1}{f(r)} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2, \quad (4.0.3)$$

donde se requiere que la función métrica satisfaga

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r) = 1.$$

Estas clases de soluciones han recibido una gran cantidad de atención en los últimos años, algunas de ellas consideran teorías mediante la introducción de fuentes extras de materia, tales como por ejemplo el modelo Einstein-Proca-Maxwell [72], encontrándose soluciones de agujeros negros de Lifshitz para un exponente dinámico $z = 2(D - 2)$, así como también modelos electrodinámicos más generales donde las soluciones se encuentran caracterizadas para cualquier valor $z > 1$ [73]. Existe también la opción de adicionar a la gravedad de Einstein teorías gravitatorias de orden superior, considerando las correcciones de curvaturas cuadráticas más generales a la gravedad de Einstein en dimensión arbitraria, descubriéndose una solución en tres dimensiones para un exponente dinámico $z = 3$ [74], así como también tres interesantes familias de agujeros negros de Lifshitz en dimensión arbitraria [75].

Uno de los aspectos fascinantes de la Relatividad General corresponde a la existencia de agujeros negros, caracterizados por estar envueltos en un horizonte de eventos y que todo objeto clásico que pasa por éste no puede retornar. Sin embargo, gracias al trabajo realizado por Stephen Hawking [76], se logró demostrar que el horizonte en sí emite radiación con una temperatura característica T . Adicionalmente, mediante el trabajo de Jacob Bekenstein [77], se mostró que los agujeros negros poseen una entropía que es proporcional al área del horizonte de eventos. Asimismo, estos fenómenos son de suma importancia tanto en la correspondencia AdS/CFT como también en sus extensiones. En efecto, desde punto de vista de las TCC la termodinámica y el transporte de coeficientes son en estricto rigor engorrosos, pero están relacionados a las propiedades geométricas de los agujeros negros [24].

El plan de este capítulo está organizado como sigue. En la siguiente sección se analizan a los agujeros negros como un sistema termodinámico, estudiando sus respectivas leyes y dando a conocer técnicas que nos permitan calcular parámetros tales como la masa y la entropía. Teorías alternativas de la gravedad se estudian en la sección 4.2, en particular considerando un espacio-tiempo tridimensional, mientras que en la sección 4.3 damos a conocer algunos ejemplos para el cálculo de la masa de agujeros negros considerando el formalismo denominado cuasilocal. En la sección 4.4 se exponen los resultados descubiertos en [3], los cuales consideran soluciones de agujeros negros asintóticamente Lifshitz con una fuente de materia asociada a un campo escalar no mínimamente acoplado, estudiado en el capítulo 3, junto con una teoría gravitatoria conocida como nueva gravedad masiva. Finalmente, en la sección 4.5 se dan a conocer las soluciones encontradas en [4], donde se estudian teorías gravitatorias de orden superior considerando las correcciones de curvaturas cuadráticas más generales en dimensión arbitraria junto con un campo de Maxwell lineal.

4.1. Termodinámica de los agujeros negros

En el año de 1973, J. Bardeen, B. Carter y S. Hawking formularon un conjunto de cuatro leyes que gobiernan el comportamiento de los agujeros negros [78] y que poseen una coincidencia sorprendente con las cuatro leyes de la termodinámica clásica. Estas formulaciones fueron complementadas con el descubrimiento de Hawking un año más tarde, donde se establece que un agujero negro puede emitir un flujo termal de partículas, reforzando las ideas que efectivamente se comportan como sistemas termodinámicos [79]. A continuación estudiaremos brevemente cada una de estas leyes, así como también haremos un cuadro comparativo respecto de las cuatro leyes de la termodinámica. Para ello, consideremos en primer lugar las siguientes

definiciones [14]:

Definición 34 *Un espacio-tiempo $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$, asintóticamente plano que contiene un agujero negro, se dice estacionario si existe un grupo de isometrías uniparamétricas generadas por un campo de Killing ξ^μ asintóticamente de tipo tiempo.*

Definición 35 *Si un espacio-tiempo es estacionario y además se verifica que el campo de Killing ξ^μ es ortogonal a una hipersuperficie Σ , entonces decimos que es estático.*

4.1.1. Leyes de la termodinámica de los agujeros negros

Supongamos que tenemos un grupo de isometrías uniparamétricas generadas por un vector de Killing rotacional ϕ^μ ; en este caso se dice que el agujero negro es axisimétrico. Un agujero negro estático o estacionario y axisimétrico posee el vector de Killing

$$\xi^\mu = t^\mu + \Omega_H \phi^\mu, \quad (4.1.1)$$

y la constante Ω_H se conoce como la velocidad angular del horizonte.

Definición 36 *Un horizonte, al cual denotaremos como \mathcal{K} , se dice de Killing si es una hipersuperficie nula tal que existe un vector de Killing ξ^μ normal a éste. [16]*

Dado que el horizonte de eventos \mathcal{H} es una hipersuperficie nula y ξ^μ es normal al horizonte, tenemos que $\nabla^\mu (\xi^\nu \xi_\nu)$ es paralela al vector de Killing. Luego, sobre \mathcal{H} existe una función κ tal que

$$\nabla^\mu (\xi^\nu \xi_\nu) = -2\kappa \xi^\mu, \quad (4.1.2)$$

donde κ se conoce como *gravedad de superficie*, dándonos la clave para dar a conocer la ley cero de los agujeros negros la cual declara que [79]

“La gravedad de superficie κ de un agujero negro estacionario es uniforme sobre todo el horizonte de eventos.”

Asimismo, es posible obtener una expresión explícita para κ dada por

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} \nabla^\mu \xi^\nu \nabla_\mu \xi_\nu. \quad (4.1.3)$$

La primera ley de la termodinámica de los agujeros negros establece que [79]

“La variación de la masa δM , del momento angular δJ y del área de superficie δA están relacionados como

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega_H \delta J.” \quad (4.1.4)$$

La segunda ley afirma que [79]

“Si se satisface la condición de energía nula, esto es $T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0$ donde $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento y k^μ es un vector nulo, entonces el área de superficie de un agujero negro nunca puede disminuir, es decir

$$\delta A \geq 0 .”$$

La tercera ley declara [79]

“Si el tensor de energía momento es acotado y satisface la condición de energía débil, esto es $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$ siendo t^μ un vector tipo tiempo, entonces la gravedad de superficie κ no puede reducirse a cero para ningún proceso físico. ”

Dado lo anterior, podemos realizar una comparación entre estos comportamientos de los agujeros negros y las cuatro leyes de la termodinámica clásica resumidas en el Cuadro 4.1.

Leyes	Termodinámica	Agujeros Negros
Cero	T es constante sobre un cuerpo en equilibrio térmico.	κ es constante sobre el horizonte de un agujero negro estacionario.
Primera	$\delta E = T \delta S +$ términos de trabajo.	$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega_H \delta J.$
Segunda	$\delta S \geq 0$ en cualquier proceso.	$\delta A \geq 0$ en cualquier proceso.
Tercera	Es imposible mediante un proceso físico lograr $T = 0$.	Es imposible mediante un proceso físico lograr $\kappa = 0$.

Cuadro 4.1: Comparación entre las respectivas Leyes de la Termodinámica.

Si nos enfocamos desde el punto de vista de la ley cero de la termodinámica clásica, se tiene la gravedad de superficie κ toma el rol de la temperatura del sistema. Más aún, los agujeros negros tienen una temperatura bien definida, conocida como temperatura de Hawking [76], proporcional a κ dada por

$$T = \frac{\kappa \hbar}{2\pi}, \quad (4.1.5)$$

donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ es la constante de Planck reducida. Notemos que al observar la fila del Cuadro 4.1 correspondiente a la primera ley, M juega el papel de la energía interna del sistema y al complementarla con la temperatura (4.1.5) nos percatamos que debiera existir una relación entre el área de superficie del horizonte de eventos y la entropía del sistema termodinámico. Lo anterior se respalda a través la segunda ley de la termodinámica, donde el área de superficie A toma el rol de la entropía S . Más aún, si consideramos las ecuaciones (4.1.4) y (4.1.5) tenemos que [77]

$$S = \frac{A}{4\hbar}. \quad (4.1.6)$$

Dadas las leyes termodinámicas para la mecánica de los agujeros negros expuestas con anterioridad, resulta motivante y a la vez necesario elaborar un conjunto de métodos que nos permitan calcular sus respectivos parámetros. El primero de ellos corresponde a un importante resultado elaborado por R. Wald en 1993 [80].

4.1.2. Entropía de Wald

A continuación estudiaremos, mediante la primera ley de la Termodinámica (4.1.4), una forma de obtener la entropía de un agujero negro por medio de una cantidad denominada *carga de Noether* [80, 81] conside-

rando teorías gravitatorias covariantes, esto es, aquellas teorías invariantes ante difeomorfismos. Asimismo, tendremos un Lagrangiano $\mathbf{L}(\phi)$ definido sobre una variedad $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ orientada de dimensión D , donde ϕ representa a la métrica $g_{\mu\nu}$, otros campos de materia ψ y sus derivadas. Dado que el Lagrangiano $\mathbf{L}(\phi)$ posee esta invariancia, por hipótesis, de acuerdo a [81] lo podemos reexpresar de la forma

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(g_{\mu\nu}, \nabla_{\mu_1} R_{\nu\sigma\rho\tau}, \dots, \nabla_{(\mu_1} \dots \nabla_{\mu_m)} R_{\nu\sigma\rho\tau}, \psi, \dots, \nabla_{(\mu_1} \dots \nabla_{\mu_l)} \psi), \quad (4.1.7)$$

donde ∇ denota la derivada covariante asociada al tensor $g_{\mu\nu}$ y $R_{\nu\sigma\rho\tau}$ es la curvatura de $g_{\mu\nu}$. Si variamos el Lagrangiano \mathbf{L} respecto a ϕ tenemos que

$$\delta\mathbf{L} = \mathbf{E}(\phi)\delta\phi + d\Theta(\phi, \delta\phi). \quad (4.1.8)$$

Usualmente, y como veremos luego, la ecuación (4.1.8) se obtiene por medio de la acción de la teoría gravitatoria donde Θ es un término de superficie que no afecta en las ecuaciones de movimiento. Por otro lado, tenemos que

$$\mathcal{L}_\xi \mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \phi} \mathcal{L}_\xi \phi = d(\xi \cdot \mathbf{L}), \quad (4.1.9)$$

donde \mathcal{L} corresponde a la derivada de Lie a lo largo del campo de Killing ξ y la operación \cdot denota la contracción del índice del vector ξ con el primer índice de la forma diferencial \mathbf{L} . Combinando las ecuaciones (4.1.8) y (4.1.9) tenemos una expresión para la corriente de Noether \mathbf{J} de la forma

$$\mathbf{J} = \Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) - \xi \cdot \mathbf{L}, \quad (4.1.10)$$

donde

$$d\mathbf{J} = -\mathbf{E}(\phi)\mathcal{L}_\xi \phi. \quad (4.1.11)$$

Notemos que \mathbf{J} es una cantidad conservada si se satisfacen las ecuaciones de movimiento $\mathbf{E}(\phi) = 0$. Dado lo anterior, obtenemos una forma diferencial \mathbf{Q} localmente construida a partir de ϕ y ξ^μ , siempre que ϕ satisfaga $\mathbf{E}(\phi) = 0$, conocida como carga de *Noether*, satisfaciendo

$$\mathbf{J} = d\mathbf{Q}. \quad (4.1.12)$$

Ahora definamos la $(D - 1)$ -forma Ω en base a dos variaciones arbitrarias de los campos ϕ

$$\Omega(\phi, \delta_1 \phi, \delta_2 \phi) := \delta_2 \Theta(\phi, \delta_1 \phi) - \delta_1 \Theta(\phi, \delta_2 \phi), \quad (4.1.13)$$

y calculemos la variación de la corriente \mathbf{J} como

$$\delta\mathbf{J} = \delta\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) - \xi \cdot \delta\mathbf{L} = \delta\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) - \mathcal{L}_\xi \Theta(\phi, \delta\phi) + d(\xi \cdot \Theta(\phi, \delta\phi)). \quad (4.1.14)$$

Aquí hemos utilizado la ecuación (4.1.8) junto con $\mathbf{E}(\phi) = 0$, además de la identidad sobre la derivada de Lie para una forma diferencial μ [81]

$$\mathcal{L}_\xi \mu = \xi \cdot d\mu + d(\xi \cdot \mu). \quad (4.1.15)$$

Observemos que la ecuación (4.1.14) la podemos reescribir como

$$\Omega(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) = \delta\mathbf{J} - d(\xi \cdot \Theta(\phi, \delta\phi)), \quad (4.1.16)$$

entregando una estructura para definir el Hamiltoniano H para posteriormente integrar sobre una hipersuperficie de Cauchy Σ . En efecto, ante una variación de los campos ϕ , la variación del Hamiltoniano está dada por

$$\delta H = \int_{\Sigma} \Omega(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_{\xi}\phi) = \int_{\Sigma} [\delta\mathbf{J} - d(\xi \cdot \Theta(\phi, \delta\phi))] = \int_{\Sigma} [\delta d\mathbf{Q} - d(\xi \cdot \Theta(\phi, \delta\phi))], \quad (4.1.17)$$

donde hemos utilizado la expresión (4.1.12) en el lado izquierdo de la ecuación (4.1.17). Si $\delta\phi$ satisface las ecuaciones de movimiento linealizadas, entonces podemos conmutar el operador derivativo y la variación δ transformando δH de la forma

$$\delta H = \int_{\Sigma} d[\delta\mathbf{Q} - (\xi \cdot \Theta(\phi, \delta\phi))]. \quad (4.1.18)$$

Para lo siguiente, debemos introducir una nueva definición [82]:

Definición 37 *Un horizonte de Killing bifurcado corresponde a un par de hipersuperficies nulas \mathcal{K}_{μ} y \mathcal{K}_{ν} que se intersectan en una superficie de dimensión $(D - 2)$ de tipo espacio \mathcal{S} , conocida como superficie de bifurcación, de tal manera que \mathcal{K}_{μ} y \mathcal{K}_{ν} son horizontes de Killing respecto al mismo campo de Killing ξ^{μ} .*

Suponiendo un horizonte de Killing bifurcado \mathcal{C} , con ξ normal al horizonte de eventos e integrando la expresión (4.1.18), obtenemos que

$$\delta H_{\infty} = \delta \int_{\mathcal{C}} \mathbf{Q}, \quad (4.1.19)$$

utilizando el hecho que el vector de Killing ξ se anula en \mathcal{C} . La magnitud H_{∞} corresponde a la *energía canónica conjugada* asociada al vector ξ cuando el espacio-tiempo es asintóticamente plano. Si el vector de Killing toma la forma particular dada en (4.1.1), entonces tenemos

$$\delta H_{\infty} = \delta M - \Omega_H \delta J, \quad (4.1.20)$$

donde se muestra en [81] que

$$\delta \int_{\mathcal{C}} \mathbf{Q} = \frac{\kappa}{2\pi} \delta S, \quad (4.1.21)$$

siendo κ la gravedad superficial. Finalmente, podemos escribir la entropía de Wald S_W de la forma

$$S_W = -2\pi \int_{\mathcal{C}} \frac{\delta L}{\delta R_{\mu\nu\sigma\rho}} \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\sigma\rho}. \quad (4.1.22)$$

Aquí $\varepsilon_{\mu\nu}$ corresponde a un vector binormal a \mathcal{C} , antisimétrico y normalizado de la forma $\varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu} = -2$, el Lagrangiano L se considera como una densidad escalar y su derivada se obtiene tomando el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ como un campo independiente de la métrica $g_{\mu\nu}$.

Si bien el método de Wald es un método poderoso para calcular la entropía S de soluciones de agujeros negros, necesitamos procedimientos que nos permitan obtener la masa (energía) asociada a estas mismas soluciones para así, junto con la temperatura dada en (4.1.5), ser consistentes con la primera ley de la termodinámica (4.1.4). A continuación estudiaremos algunos de estos procedimientos, desde el formalismo ADM [83] hasta un método reciente conocido como formalismo cuasilocal [92].

4.1.3. Formalismos para obtener la masa de soluciones de agujeros negros

Como un primer acercamiento expondremos el método ADM, cuya base consiste en reescribir la acción (2.2.13) en términos de una métrica puramente espacial h_{ij} , además de una función N denominada *lapso*

junto con un vector N^i denominado *desplazamiento*, obteniéndose una formulación Hamiltoniana que nos permite calcular la masa de soluciones de agujeros negros asintóticamente planas.

Formalismo ADM

La Relatividad General es una teoría covariante, esto quiere decir que las leyes físicas son descritas de manera independiente del sistema de coordenadas utilizado. Si buscamos realizar una formulación Hamiltoniana de esta teoría, resulta imprescindible la obtención de los momentos canónicamente conjugados a las variables dinámicas. Lo que estudiaremos a continuación corresponde al método construido por R. Arnowitt, S. Deser y C. Misner [83] y considera una foliación de un espacio-tiempo globalmente hiperbólico $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ de dimensión cuatro en una familia de hipersuperficies Σ_t con coordenadas x^i ($i = \{1, 2, 3\}$) y parametrizada por una función de tiempo global t . Para lo anterior, escogemos una función de tiempo t y un campo vectorial t^i tal que $t^i \nabla_i t = 1$, el cual representa el flujo del tiempo e identifica cada hipersuperficie Σ_t .

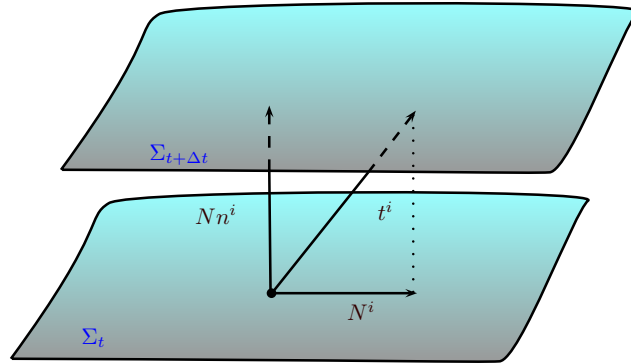


Figura 4.1: Foliación del espacio-tiempo en la Relatividad General.

Sea n^i un vector normal a Σ_t de *tipo tiempo* con $n^i n_i = -1$, podemos escribir sobre cada hipersuperficie una métrica h_{ij} puramente espacial de la forma

$$h_{ij} = g_{ij} + n_i n_j. \quad (4.1.23)$$

Por otro lado, definimos

$$N := -t^i n_i, \quad N_i := h_{ij} t^j, \quad (4.1.24)$$

siendo conocidos en la literatura como la *función lapso*, que mide el flujo del tiempo propio τ respecto a la coordenada temporal t a medida que nos movemos a lo largo de Σ_t , y el *vector de desplazamiento*, el cual mide la cantidad de desplazamiento del tiempo en Σ_t (véase la Figura 4.1), respectivamente. Con todo lo anterior, podemos expresar el elemento de línea de la forma

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j &= h_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt) - (N dt)^2 \\ &= - (N - N_j N^j) dt^2 + N_j dt dx^j + N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j, \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

donde

$$\sqrt{-g} = N \sqrt{h}. \quad (4.1.26)$$

El segundo paso a estudiar corresponde a reexpresar el Lagrangiano

$$L = \sqrt{-g}^{(4)} R, \quad (4.1.27)$$

en términos de (h_{ij}, N, N_i) . Para ello, podemos obtener [14]

$$G_{ij} n^i n^j = \frac{1}{2} \left({}^{(3)}R - K_{ij} K^{ij} + K^2 \right), \quad (4.1.28)$$

$$R_{ij} n^i n^j = K^2 - K_{ij} K^{ij} - \nabla_i (n^i \nabla_j n^j) + \nabla_j (n^i \nabla_i n^j), \quad (4.1.29)$$

donde los dos últimos términos de (4.1.29) son términos de frontera y los descartamos en este caso en particular, mientras que K_{ij} es la curvatura extrínseca sobre Σ_t definida como

$$K_{ij} := h_i^k h_j^l \nabla_k n_l = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ij} = \frac{1}{2} N^{-1} (\mathcal{L}_t h_{ij} - \mathcal{L}_N h_{ij}) = \frac{1}{2} N^{-1} (\dot{h}_{ij} - D_i N_j - D_j N_i). \quad (4.1.30)$$

Aquí \mathcal{L}_n corresponde a la derivada de Lie a lo largo del vector n y el operador D_i es el operador derivada sobre Σ_t asociado con h_{ij} , esto es

$$D_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = h^{a_1}_{d_1} \dots h^{a_k}_{d_k} h^{e_1}_{b_1} \dots h^{e_l}_{b_l} h^f_c \nabla_f T^{d_1 \dots d_k}_{e_1 \dots e_l}. \quad (4.1.31)$$

Además, podemos expresar la curvatura escalar de la forma

$$R = 2 (G_{ij} n^i n^j - R_{ij} n^i n^j), \quad (4.1.32)$$

y junto con las ecuaciones (4.1.28) y (4.1.29) podemos expresar el Lagrangiano (4.1.27) como

$$\begin{aligned} L &= N \sqrt{h} \left({}^{(3)}R + K_{ij} K^{ij} - K^2 \right), \\ &= N \sqrt{h} \left[{}^{(3)}R + (h^{il} h^{jm} - h^{ij} h^{lm}) K_{ij} K_{lm} \right], \end{aligned} \quad (4.1.33)$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{h}_{ij}} = \frac{\partial L}{\partial \mathcal{L}_t h_{ij}} = \sqrt{h} (K^{ij} - K h^{ij}), \quad \pi_N = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = 0, \quad \pi_N^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}_i} = 0, \quad (4.1.34)$$

y la densidad Hamiltoniana \mathcal{H} queda de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^{ij} \dot{h}_{ij} - L \\ &= -\sqrt{h} \left[N \left({}^{(3)}R - K_{ij} K^{ij} + K^2 \right) + 2 \left(K h_i^j - K_i^j \right) D_j N^i \right] \\ &= -\sqrt{h} \left[N \left({}^{(3)}R - K_{ij} K^{ij} + K^2 \right) - 2 N^i \left(D_i K - D_j K_i^j \right) \right] - 2 \sqrt{h} D_j \left(K N^j - K_i^j N^i \right). \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

Notemos que el último término de (4.1.35) es un término de frontera y, como antes, lo descartamos para este análisis. Finalmente, tenemos que el Hamiltoniano viene dado por la expresión

$$H = - \int_{\Sigma_t} (N c_0 - 2 N^i c_i) \sqrt{h} d^3 y, \quad (4.1.36)$$

donde

$$c_0 = {}^{(3)}R - K_{ij} K^{ij} + K^2, \quad c_i = D_i K - D_j K_i^j. \quad (4.1.37)$$

Ahora debemos modificar convenientemente la acción de Einstein-Hilbert para que esté bien definida al considerar soluciones asintóticamente planas. Concretamente, analizaremos una expresión de la forma [79,84]

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_V d^4x \sqrt{-g} {}^{(4)}R + \frac{1}{8\pi G} \oint_{\partial V} d^3y \sqrt{h} (Y - Y_0), \quad (4.1.38)$$

donde ∂_V corresponde a la frontera del dominio V , Y es la traza de la curvatura extrínseca de ∂V embebida en (\mathcal{M}, g_{ij}) e Y_0 es la curvatura extrínseca de ∂V embebida en $(\mathcal{M}, \gamma_{ij})$, donde γ_{ij} es una métrica Lorentziana sobre \mathcal{M} que es plana en ∂V . Adicionalmente, $\sqrt{h} d^3y$ es el elemento de volumen inducido por g_{ij} sobre ∂V , mientras que h_{ij} es la métrica inducida sobre la hipersuperficie ∂V y h su respectivo determinante [85].

Definamos lo siguiente

$$\mathcal{S}_t := \partial V \cap \Sigma_t, \quad (4.1.39)$$

donde asumiremos que este conjunto tiene la topología de una esfera. Su respectivo Hamiltoniano gravitacional derivado de la acción (4.1.38) contiene un término adicional al calculado en (4.1.36) expresado como [84]

$$H' = -\frac{1}{16\pi G} \int_{\Sigma'_t} (N c_0 - 2 N^i c_i) \sqrt{h} d^3y - \frac{1}{8\pi G} \oint_{\mathcal{S}_t} d^2z \sqrt{q} [N (k - k_0) - N_i (K^{ij} - K h^{ij}) s_j], \quad (4.1.40)$$

donde Σ'_t es una sección de Σ_t acotada por \mathcal{S}_t , k corresponde a la traza de la curvatura extrínseca de \mathcal{S}_t embebida en (Σ_t, h_{ij}) y k_0 a la traza de la curvatura extrínseca de \mathcal{S}_t embebida en (Σ_t, f_{ij}) , siendo f_{ij} una métrica plana obtenida asintóticamente de h_{ij} . Asimismo, s^i es un vector unitario normal a \mathcal{S}_t en Σ_t y $d^2z \sqrt{q}$ es el elemento de superficie inducido por la métrica del espacio-tiempo sobre \mathcal{S}_t , siendo q_{ij} la respectiva métrica inducida y q su determinante.

Por otro lado, para soluciones de las ecuaciones de Einstein se tiene que

$$c_0 = 0 \text{ y } c_i = 0, \quad \forall i, \quad (4.1.41)$$

de modo que (4.1.40) toma la forma

$$H'_{sol} = -\frac{1}{8\pi G} \oint_{\mathcal{S}_t} d^2z \sqrt{q} [N (k - k_0) - N_i (K^{ij} - K h^{ij}) s_j]. \quad (4.1.42)$$

La energía total contenida en la hipersuperficie Σ_t es definida como un valor numérico de (4.1.42) tomando \mathcal{S}_t y llevándolo al infinito espacial, con coordenadas (t, x^i) tal que $N = 1$ y $N_i = 0, \forall i$ [85]. Finalmente, la masa ADM viene dada por

$$M_{\text{ADM}} := -\frac{1}{8\pi G} \lim_{\mathcal{S}_t \rightarrow \infty} \oint_{\mathcal{S}_t} d^2z \sqrt{q} (k - k_0), \quad (4.1.43)$$

la cual podemos reescribirla como

$$M_{\text{ADM}} = \frac{1}{16\pi G} \lim_{\mathcal{S}_t \rightarrow \infty} \oint_{\mathcal{S}_t} d^2z \sqrt{q} [D^j h_{ij} - D_i (f^{kl} h_{kl})] s^i, \quad (4.1.44)$$

donde D_i corresponde a la conexión asociada a la métrica f_{ij} . Si trabajamos en coordenadas cartesianas (x^i) con

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad f_{ij} = \delta_{ij}, \quad (4.1.45)$$

la expresión (4.1.44) se convierte finalmente en

$$M_{\text{ADM}} = \frac{1}{16\pi G} \lim_{\mathcal{S}_t \rightarrow \infty} \oint_{\mathcal{S}_t} d^2z \sqrt{q} \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{jj}}{\partial x^i} \right) s^i. \quad (4.1.46)$$

Formalismo ADT

Si bien el formalismo ADM es bueno para agujeros negros asintóticamente planos (tales como por ejemplo la solución de Schwarzschild), se ha mostrado que es insuficiente para espacio-tiempos más genéricos. Otro método que estudiaremos corresponde al procedimiento elaborado por L. Abbott, S. Deser y B. Tekin conocido como el formalismo ADT [86–88], el cual originalmente define cantidades conservadas para espacio-tiempos cuyo comportamiento asintótico es de curvatura constante.

Consideremos en primer lugar las siguientes ecuaciones:

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = \kappa \tau_{\mu\nu}, \quad (4.1.47)$$

donde $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein para una acción gravitatoria local, $\tau_{\mu\nu}$ describe la fuente de materia y κ es una constante de acoplamiento. Podemos linealizar la métrica $g_{\mu\nu}$ de la forma

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.1.48)$$

y supondremos que $\bar{g}_{\mu\nu}$ es la métrica base satisfaciendo $\bar{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(\bar{g}) = 0$ para $\tau_{\mu\nu} = 0$, mientras que el tensor $h_{\mu\nu}$ deberá desvanecerse al infinito [86]. Linealizando la expresión (4.1.47) se obtiene

$$\delta\mathcal{E}_{\mu\nu} := \mathcal{E}_{\mu\nu}^L = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (4.1.49)$$

Aquí, $\delta\mathcal{E}_{\mu\nu}$ es lineal respecto a $h_{\mu\nu}$ y el nuevo tensor $T_{\mu\nu}$ contiene todas las ecuaciones referentes a la parte no lineal, así como también al tensor $\tau_{\mu\nu}$. Es importante notar que tanto la derivada covariante como la operación de subir y bajar índices se realizan con respecto a la métrica base. Si suponemos además que la métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ admite un conjunto de vectores de Killing $\bar{\xi}_\mu$ que satisfacen

$$\bar{\nabla}_\mu \bar{\xi}_\nu + \bar{\nabla}_\nu \bar{\xi}_\mu = 0, \quad (4.1.50)$$

junto con

$$\bar{\nabla}_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (4.1.51)$$

obtenemos la expresión

$$\bar{\nabla}_\mu (\delta\mathcal{E}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu) = 0 = \partial_\mu (\sqrt{-\bar{g}} \delta\mathcal{E}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu). \quad (4.1.52)$$

De lo anterior podemos construir una corriente conservada, conocida en la literatura como corriente ADT, mediante la contracción de las ecuaciones de movimiento linealizadas $\delta\mathcal{E}^{\mu\nu}$ y un vector de Killing $\bar{\xi}_\nu$. Asimismo, de esta corriente se define un potencial antisimétrico $Q^{\mu\nu}$ tal que

$$J^\mu := \delta\mathcal{E}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu = \bar{\nabla}_\nu Q^{\mu\nu}, \quad (4.1.53)$$

Finalmente, la carga conservada toma la forma

$$Q^\mu(\bar{\xi}) = \int_\Sigma d^{D-1}x \sqrt{-\bar{g}} \delta\mathcal{E}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu = \oint_{\partial\Sigma} d^{D-2}x d\bar{S}_\nu Q^{\mu\nu}, \quad (4.1.54)$$

donde Σ denota la hipersuperficie de dimensión $(D-1)$ de un espacio-tiempo de dimensión D y $\partial\Sigma$ es su frontera, de dimensión $(D-2)$, con elemento de superficie $d\bar{S}$.

Debido a que la carga conservada depende de la teoría, como ejemplo práctico consideraremos las ecuaciones de Einstein junto con una constante cosmológica (3.0.4) sin una fuente de materia. La métrica base $\bar{g}_{\mu\nu}$ es tomada como el espacio-tiempo de curvatura constante, ello implica que el tensor de Riemann, tensor de Ricci y escalar de Ricci vienen dados por (3.0.1), (3.0.5) y (3.0.6) respectivamente.

La linealización de las ecuaciones de movimiento (3.0.4) nos permiten obtener

$$G_{\mu\nu}^{(L)} - \frac{2\Lambda}{D-2} h_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.1.55)$$

donde $G_{\mu\nu}^{(L)} = R_{\mu\nu}^{(L)} - \frac{1}{2} R^{(L)} \bar{g}_{\mu\nu}$ y

$$R_{\mu\nu}^{(L)} = \frac{1}{2} (\bar{\nabla}^\sigma \bar{\nabla}_\mu h_{\nu\sigma} + \bar{\nabla}^\sigma \bar{\nabla}_\nu h_{\mu\sigma} - \bar{\square} h_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu h), \quad (4.1.56)$$

$$R^{(L)} = -\bar{\square} h + \bar{\nabla}^\sigma \bar{\nabla}^\mu h_{\sigma\mu} - \frac{2\Lambda}{D-2} h. \quad (4.1.57)$$

Utilizando las ecuaciones (4.1.56) y (4.1.57), además de la inclusión de un vector de Killing $\bar{\xi}_\mu$ y reordenando los términos, tenemos que la parte izquierda de la ecuación (4.1.55) se convierte en

$$2 G_{(L)}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu - \frac{4\Lambda}{D-2} h^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu = \bar{\nabla}_\rho Q^{\mu\rho}, \quad (4.1.58)$$

donde

$$\begin{aligned} Q^{\mu\rho} = & \bar{\xi}_\nu \bar{\nabla}^\mu h^{\rho\nu} - \bar{\xi}_\nu \bar{\nabla}^\rho h^{\mu\nu} + \bar{\xi}^\mu \bar{\nabla}^\rho h - \bar{\xi}^\rho \bar{\nabla}^\mu h + h^{\mu\nu} \bar{\nabla}^\rho \bar{\xi}_\nu - h^{\rho\nu} \bar{\nabla}^\mu \bar{\xi}_\nu + \bar{\xi}^\rho \bar{\nabla}_\nu h^{\mu\nu} \\ & - \bar{\xi}^\mu \bar{\nabla}_\nu h^{\rho\nu} + h \bar{\nabla}^\mu \bar{\xi}^\rho, \end{aligned} \quad (4.1.59)$$

y la carga conservada para a ser la expresión (4.1.54), donde la conservación de la corriente está garantizada por la propiedad de antisimetría del tensor $Q^{\mu\rho}$ [89].

Si consideramos ahora un ambiente asintóticamente plano, donde no hay una contribución de la constante cosmológica Λ , obtenemos la masa ADM en términos de coordenadas cartesianas en dimensión D arbitraria [88], la cual para el caso tetradimensional corresponde al resultado obtenido previamente en (4.1.46). Asimismo, los autores en [88] calculan la masa para la solución de *Schwarzschild-AdS* [90] dada en (3.3.2) con $\gamma = 1$, y extienden el método para teorías gravitatorias asociadas a curvaturas cuadráticas en D dimensiones.

Una condición de este método es el hecho que la métrica base debe satisfacer las ecuaciones de movimiento (4.1.47) en el vacío. Sin embargo, en [89, 91] proponen una extensión del método ADT, el cual linealiza la métrica sobre una base $\bar{g}_{\mu\nu}$ arbitraria, permitiendo calcular tanto la masa como el momento angular para las teorías conocidas como gravedad masiva topológica y nueva gravedad masiva, que serán estudiadas en la sección 4.2. El resultado es el siguiente:

$$J_{ADT}^\mu := \bar{\nabla}_\nu Q_{ADT}^{\mu\nu} = \delta \mathcal{E}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu + \bar{\mathcal{E}}^{\mu\sigma} h_{\sigma\nu} \bar{\xi}^\nu - \frac{1}{2} \bar{\xi}^\mu \bar{\mathcal{E}}^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \bar{\xi}^\nu \bar{\mathcal{E}}_\nu^\mu h, \quad (4.1.60)$$

donde recuperamos la corriente original (4.1.53) cuando imponemos la condición $\bar{\mathcal{E}}_{\mu\nu}(\bar{g}) = 0$. De la misma manera, podemos reescribir la ecuación (4.1.60) de la forma [92]

$$\delta(\sqrt{-\bar{g}} \bar{\mathcal{E}}^{\mu\nu} \bar{\xi}_\nu) - \frac{1}{2} \sqrt{-\bar{g}} \bar{\xi}^\mu \bar{\mathcal{E}}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = \partial_\nu (\sqrt{-\bar{g}} Q_{ADT}^{\mu\nu}). \quad (4.1.61)$$

Formalismo cuasilocal

Otro método para calcular la masa de soluciones de agujeros negros corresponde a una generalización cuasilocal del formalismo ADT estudiado anteriormente, donde no es necesario descomponer la métrica $g_{\mu\nu}$ de la forma (4.1.48), además de simplificar sustancialmente los cálculos [92, 93].

Comencemos considerando una teoría covariante de la gravedad para un espacio-tiempo de dimensión D

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{\kappa} \int d^D x \sqrt{-g} L[g_{\mu\nu}, R, R_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\sigma\rho}, \nabla R, \dots], \quad (4.1.62)$$

la cual no incluye campos asociados a una fuente de materia y κ es una constante de acoplamiento. La variación de la acción (4.1.62) respecto a la métrica nos permite obtener

$$\delta S = \frac{1}{\kappa} \int d^D x [\sqrt{-g} \mathcal{E}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \partial_\mu \Theta^\mu(g, \delta g)], \quad (4.1.63)$$

donde $\mathcal{E}_{\mu\nu} = 0$ es la expresión para las ecuaciones de movimiento y $\Theta^\mu(g, \delta g)$ es un término de superficie. Tomando en cuenta un difeomorfismo ζ , la métrica se transforma en

$$\delta_\zeta g_{\mu\nu} = 2 \nabla_{(\mu} \zeta_{\nu)}, \quad (4.1.64)$$

mientras que el cambio de la densidad Lagrangiana es dado por

$$\delta_\zeta (\sqrt{-g} L) = \partial_\mu (\zeta^\mu \sqrt{-g} L). \quad (4.1.65)$$

Si agregamos la identidad de Bianchi del tensor $\mathcal{E}_{\mu\nu}$, esto es $\nabla_\mu \mathcal{E}^{\mu\nu} = 0$, logramos obtener una corriente conservada *fuera de la cáscara* (en el sentido que no estamos utilizando las ecuaciones de movimiento $\mathcal{E}_{\mu\nu} = 0$) de la forma

$$\partial_\mu [2\sqrt{-g} \mathcal{E}^{\mu\nu}(g) \zeta_\nu + \zeta^\mu \sqrt{-g} L(g) - \Theta^\mu(g; \zeta)] = \partial_\mu J^\mu(g; \zeta) = 0, \quad (4.1.66)$$

donde podemos introducir un tensor antisimétrico $K^{\mu\nu}$, denominado potencial de Noether *fuera de la cáscara*, tal que $J^\mu := \partial_\nu K^{\mu\nu}$.

Ahora, el objetivo es mostrar el vínculo entre el potencial $K^{\mu\nu}$ y el potencial correspondiente a la extensión del método ADT expuesto en (4.1.61), donde omitiremos la notación de barras. Para ello, el difeomorfismo ζ será tomado como un vector de Killing ξ y trabajaremos en el cambio del potencial de Noether bajo la variación de la métrica, esto es $\delta K^{\mu\nu}$, preservando el vector de Killing: $\delta \xi^\mu = 0$. Dada esta variación, podemos escribir el cambio de la corriente J^μ en términos del potencial $K^{\mu\nu}$ como

$$\partial_\nu (\delta K^{\mu\nu}) = 2 \delta (\sqrt{-g} \mathcal{E}^{\mu\nu} \xi_\nu) + \xi^\mu \delta (\sqrt{-g} L) - \delta \Theta^\mu(g; \xi). \quad (4.1.67)$$

Dado que hemos asumido $\delta \xi^\mu = 0$, podemos utilizar la siguiente relación sobre el término de superficie [81]

$$\mathcal{L}_\xi \Theta^\mu(g; \delta g) = \delta \Theta^\mu(g; \xi), \quad (4.1.68)$$

donde \mathcal{L}_ξ representa la derivada de Lie a lo largo del vector de Killing ξ , mientras que el término de la derecha corresponde a la variación respecto a la métrica. Con todo lo anterior, las ecuaciones (4.1.61), (4.1.67) y (4.1.68) permiten obtener

$$\sqrt{-g} Q_{ADT}^{\mu\nu}(g, \delta g) = \frac{1}{2} \delta K^{\mu\nu}(g; \xi) - \xi^{[\mu} \Theta^{\nu]}(g, \delta g). \quad (4.1.69)$$

Esta expresión es clave, pues permite formular una carga conservada en términos del potencial de Noether $K^{\mu\nu}$, el vector de Killing ξ^μ y de Θ^μ . En [92, 93], los autores proponen incorporar un camino uniparamétrico dentro del espacio solución, caracterizado por una constante $s \in [0, 1]$. Este camino es tomado como una interpolación mediante un parámetro libre \mathcal{C} dentro de las soluciones de las ecuaciones de movimiento, de tal manera que $s\mathcal{C} \in [0, \mathcal{C}]$. Sobre la base del potencial $Q_{ADT}^{\mu\nu}$ dado en (4.1.69), podemos obtener la carga conservada cuasilocal de la forma

$$Q(\xi) = \frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{B}} d^{D-2} x_{\mu\nu} \left(\Delta K^{\mu\nu}(\xi) - 2\xi^{[\mu} \int_0^1 ds \Theta^{\nu]} \right), \quad (4.1.70)$$

donde $\Delta K^{\mu\nu}(\xi) = K_{s=1}^{\mu\nu}(\xi) - K_{s=0}^{\mu\nu}(\xi)$ corresponde a la diferencia finita entre dos puntos finales del camino, mientras que $d^{D-2} x_{\mu\nu}$ representa la integración sobre un subespacio de codimensión dos y \mathcal{B} es una región finita del espacio-tiempo que no necesita ser localizada en el infinito asintótico [93].

De manera concreta, consideremos el caso de una teoría que posea correcciones de curvaturas superiores, esto es $L = L[g, R, R^2, R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \dots]$. Notemos que las ecuaciones de movimiento respecto a la métrica $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ toman la forma [92]

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = P_{(\mu}^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu)\alpha\beta\gamma} - 2\nabla^\rho \nabla^\sigma P_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L, \quad (4.1.71)$$

donde $P^{\mu\nu\rho\sigma} = \partial L / \partial R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Además, el término de superficie y el potencial de Noether son dados por [93]

$$\Theta_{\text{grav}}^\mu(\delta g) = 2\sqrt{-g} \left[P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \nabla_\gamma \delta g_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \right], \quad (4.1.72)$$

$$K_{\text{grav}}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} [2P^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\rho \xi_\sigma - 4\xi_\sigma \nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma}]. \quad (4.1.73)$$

Este caso particular de teorías son sumamente importantes cuando se analizan soluciones de agujeros negros asintóticamente Lifshitz. Más aún, en [74, 75] los autores encuentran interesantes familias de estas soluciones considerando correcciones de curvaturas cuadráticas a la gravedad de Einstein, donde en [94, 95] extienden este estudio mediante el cálculo de sus respectivas masas utilizando el método ADT, no logrando satisfacer la primera ley de la termodinámica. No obstante, en [93] logran calcular la expresión asociada a la masa para el agujero negro de Lifshitz tridimensional [74], así como también para un caso particular de solución en cinco dimensiones [75] por medio de las ecuaciones (4.1.70 - 4.1.73). Lo interesante y motivante a la vez, es el hecho que estos nuevos resultados son consistentes con la primera ley, lo cual nos permite abrir un camino para estudiar nuevas teorías gravitatorias, teniendo como pilar fundamental este formalismo cuasilocal.

4.2. Teorías gravitatorias masivas

En el capítulo 2 estudiamos la estructura de la teoría de la Relatividad General de Einstein, donde la geometría del espacio-tiempo está determinada por una fuente de materia y la dinámica de esta fuente está establecida por esta misma geometría. No obstante, observaciones de supernovas [96–99] y su consecuencia en la expansión acelerada del universo, sumado a la motivación de conciliar la Relatividad General con la Mecánica Cuántica, han llevado a intentar modificar las ecuaciones de Einstein en su estado puro [98]. Más aún, desde la perspectiva cuántica, la Relatividad General se puede considerar como una interacción débil de una partícula, asociada a los grados de libertad, sin masa de spin-2 denominada gravitón, [97, 98, 100],

donde modificar la gravedad significa necesariamente cambiar estos grados de libertad. Por ejemplo, en cuatro dimensiones, al incluir un pequeño término de masa a la acción de Einstein-Hilbert (2.2.13) los grados de libertad aumentan de dos a cinco.

4.2.1. Acción de Fierz-Pauli

En esta parte estudiaremos la acción asociada a una partícula masiva en un espacio-tiempo plano, transportada por un tensor simétrico $h_{\mu\nu}$, conocida como la acción de Fierz-Pauli. En D -dimensiones, viene dada por [97, 101, 102]

$$S = \int d^D x \left[-\frac{1}{2} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\nu\lambda} \partial^\nu h^{\mu\lambda} - \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h + \frac{1}{2} \partial_\lambda h \partial^\lambda h - \frac{1}{2} m^2 (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) \right], \quad (4.2.1)$$

donde $h = \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$ es la traza de la métrica, con $\eta_{\mu\nu}$ la métrica del espacio-tiempo plano. La segunda parte de la acción corresponde al término de Pauli-Fierz masivo, siendo m el parámetro de masa respectivo. Adicionalmente, la expresión asociada a los términos derivativos del tensor $h_{\mu\nu}$ son elegidos de tal manera que al imponer $m = 0$, obtenemos la acción de Einstein-Hilbert linealizada. Ahora, variando la acción respecto a $h^{\mu\nu}$ tenemos que

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_\lambda \partial_\mu h^\lambda{}_\nu - \partial_\lambda \partial_\nu h^\lambda{}_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} + \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \square h - m^2 (h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h) = 0, \quad (4.2.2)$$

donde $\square := \partial_\mu \partial^\mu$. Si suponemos que el parámetro de masa m es distinto de cero, actuando la ecuación anterior con ∂^μ se obtiene que

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \partial_\nu h, \quad (4.2.3)$$

transformando las ecuaciones de movimiento (4.2.2) de la forma

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - m^2 (h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h) = 0. \quad (4.2.4)$$

Al multiplicar la ecuación anterior por $h^{\mu\nu}$, obtenemos que $h = 0$, lo cual implica que $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$. Luego, tenemos que la ecuación (4.2.2) se reduce a una expresión dada por

$$(\square - m^2) h_{\mu\nu} = 0. \quad (4.2.5)$$

El resultado anterior, además de las ecuaciones (4.2.3) y (4.2.4), nos permiten mostrar que esta acción describe una partícula de spin-2 masiva. Inversamente, vemos que las ecuaciones (4.2.3), (4.2.4) y (4.2.5) implican las ecuaciones de movimiento (4.2.2) [97]. Adicionalmente, mediante las condiciones anteriores, podemos obtener los grados de libertad. En efecto, si consideramos un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, debido a la métrica $h_{\mu\nu}$ tenemos inicialmente diez grados de libertad, reduciéndose a seis mediante la condición $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$, los cuales complementado con $h = 0$ obtenemos una teoría con cinco grados de libertad para una partícula tetradimensional de spin-2. De modo similar, podemos extender la acción (4.2.1) considerando un espacio-tiempo curvo, en particular estudiaremos dos teorías gravitatorias masivas las cuales se presentan en un espacio-tiempo tridimensional.

4.2.2. Gravedad masiva topológica

La primera teoría que estudiaremos en tres dimensiones corresponde a la denominada gravedad masiva topológica (GMT) [103, 104], su respectiva acción está dada por

$$S_{\text{GMT}} = -\frac{1}{2\kappa} \left(S_{\text{EH}} + \frac{1}{\mu} S_{\text{CS}} \right), \quad (4.2.6)$$

donde μ es el parámetro de masa, S_{EH} es la acción de Einstein-Hilbert junto a la constante cosmológica Λ

$$S_{\text{EH}} = \int d^3x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (4.2.7)$$

mientras que S_{CS} corresponde a la acción de Chern-Simons gravitacional

$$S_{\text{CS}} = \frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{-g} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \left(\partial_{\mu} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\gamma}^{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\gamma} \right). \quad (4.2.8)$$

Aquí, $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ es el tensor de Levi-Civita, el cual está conectado al símbolo de Levi-Civita de la forma $\epsilon^{\alpha\beta\gamma} = (1/\sqrt{-g}) \tilde{\epsilon}^{\alpha\beta\gamma}$, g es el determinante de la métrica y los Γ 's corresponden a los símbolos de Christoffel definidos en (2.1.9). La variación de (4.2.6) con respecto a la métrica nos permite obtener

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} C_{\mu\nu} = 0, \quad (4.2.9)$$

donde $C_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu}^{\sigma\rho} \nabla_{\sigma} (R_{\beta\nu} - \frac{1}{4} R g_{\rho\nu})$ se conoce como el tensor de Cotton, el cual es simétrico ($C_{\mu\nu} = C_{\nu\mu}$), covariantemente conservado ($\nabla^{\mu} C_{\mu\nu} = 0$) y no posee traza ($g^{\mu\nu} C_{\mu\nu} = 0$). Multiplicando la ecuación (4.2.9) por $g^{\mu\nu}$, obtenemos que la curvatura escalar es $R = 6\Lambda$, permitiendo reescribir las ecuaciones de movimiento de la forma

$$R_{\mu\nu} - 2\Lambda g_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} \epsilon_{\mu}^{\sigma\rho} \nabla_{\sigma} R_{\rho\nu} = 0. \quad (4.2.10)$$

A su vez, el tensor de Cotton en tres dimensiones tiene una íntima relación respecto a variedades conformemente planas.

Definición 38 Una variedad $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ se dice conformemente plana (localmente) si para cada punto $p \in \mathcal{M}$, existe un entorno $U \subseteq \mathcal{M}$ y una métrica equivalente conforme $\omega^2 g_{\mu\nu}$, donde ω es una función suave no nula, tal que $(U, \omega^2 g_{\mu\nu})$ es plana.

Si consideramos una variedad de dimensión mayor a tres, una condición necesaria y suficiente para que sea conformemente plana es que el tensor de Weyl (2.1.27) sea nulo. Por otra parte, en tres dimensiones el tensor de Riemann viene dado por

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = 2R_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma} + 2R_{\sigma[\nu}g_{\mu]\rho} + Rg_{\rho[\nu}g_{\mu]\sigma}, \quad (4.2.11)$$

donde $T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$ y, por consiguiente, tenemos que el tensor de Ricci contiene toda la información sobre la curvatura de la variedad. Al utilizar la ecuación (4.2.11) en la expresión del tensor de Weyl dada en (2.1.27), para $D = 3$ tenemos que éste se desvanece. No obstante, para el caso tridimensional, una variedad es conformemente plana si y sólo si el tensor de Cotton se desvanece. Adicionalmente, la inclusión del término topológico involucra derivadas de tercer orden en la métrica, junto con ser una teoría unitaria [104], esto es, libre de partículas fantasmas (aquellas que poseen energía cinética negativa), lo que fundamenta el signo incorrecto en la acción (4.2.6), y taquiones (poseen una masa al cuadrado negativa) [98].

Gravedad masiva topológica linealizada

Consideremos ahora linealizar la métrica como

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.2.12)$$

donde $\bar{g}_{\mu\nu}$ es una métrica base de curvatura constante. El tensor de Ricci, escalar de Ricci y el tensor de Cotton linealizados son respectivamente [105–107]

$$R_{\mu\nu}^{(L)} = \frac{1}{2} (\bar{\nabla}^\sigma \bar{\nabla}_\mu h_{\nu\sigma} + \bar{\nabla}^\sigma \bar{\nabla}_\nu h_{\mu\sigma} - \bar{\square} h_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu h), \quad (4.2.13)$$

$$R^{(L)} = -\bar{\square} h + \bar{\nabla}^\sigma \bar{\nabla}^\mu h_{\sigma\mu} - 2\Lambda h, \quad (4.2.14)$$

$$C_{\mu\nu}^{(L)} = \epsilon_\mu^{\sigma\rho} \bar{\nabla}_\sigma \left(R_{\rho\nu}^{(L)} - \frac{1}{4} R^{(L)} \bar{g}_{\rho\nu} - 2\Lambda h_{\rho\nu} \right), \quad (4.2.15)$$

donde las operaciones de subir y bajar índices, así como también de la derivada covariante las realizamos respecto a la métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$. Las ecuaciones de movimiento linealizadas para (4.2.9) están dadas por

$$G_{\mu\nu}^{(L)} - 2\Lambda h_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} C_{\mu\nu}^{(L)} = 0, \quad (4.2.16)$$

con $G_{\mu\nu}^{(L)} = R_{\mu\nu}^{(L)} - \frac{1}{2} R^{(L)} \bar{g}_{\mu\nu}$. Multiplicando la expresión (4.2.16) por $\bar{g}^{\mu\nu}$, tenemos que $\bar{R}^{(L)} = 0$ y las ecuaciones de movimiento se convierten en

$$\left(R_{\mu\nu}^{(L)} - 2\Lambda h_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\mu} \epsilon_\mu^{\sigma\rho} \bar{\nabla}_\sigma \left(R_{\rho\nu}^{(L)} - 2\Lambda h_{\rho\nu} \right) = 0. \quad (4.2.17)$$

Adicionalmente, los autores en [105] definen el tensor $\tilde{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu} h$ y las ecuaciones (4.2.17) pasan a ser

$$\left(\bar{\square} + \frac{2}{\ell^2} \right) \left(h_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} \epsilon_\mu^{\sigma\rho} \bar{\nabla}_\sigma h_{\rho\nu} \right) = 0. \quad (4.2.18)$$

Asimismo, definen los siguientes tres operadores diferenciales \mathcal{D}^I , \mathcal{D}^D y \mathcal{D}^M que conmutan mutuamente:

$$(\mathcal{D}^{I/D})_\mu^\sigma := \delta_\mu^\sigma \pm \ell \epsilon_\mu^{\rho\sigma} \bar{\nabla}_\rho, \quad (\mathcal{D}^M)_\mu^\sigma := \delta_\mu^\sigma + \frac{1}{\mu} \epsilon_\mu^{\rho\sigma} \bar{\nabla}_\rho, \quad (4.2.19)$$

donde tenemos que la ecuación (4.2.18) puede escribirse como

$$(\mathcal{D}^I \mathcal{D}^D \mathcal{D}^M h)_{\mu\nu} = 0, \quad (4.2.20)$$

obteniéndose tres ramas de soluciones:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}^M h^M)_{\mu\nu} &:= h_{\mu\nu}^M + \frac{1}{\mu} \epsilon_\mu^{\sigma\rho} \bar{\nabla}_\sigma h_{\rho\nu}^M = 0, \\ (\mathcal{D}^D h^D)_{\mu\nu} &:= h_{\mu\nu}^D - \ell \epsilon_\mu^{\sigma\rho} \bar{\nabla}_\sigma h_{\rho\nu}^D = 0, \\ (\mathcal{D}^I h^I)_{\mu\nu} &:= h_{\mu\nu}^I + \ell \epsilon_\mu^{\sigma\rho} \bar{\nabla}_\sigma h_{\rho\nu}^I = 0. \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

La primera solución corresponde a gravitones masivos, mientras que las otras dos dan referencia a gravitones sin masa moviéndose hacia la derecha y hacia la izquierda respectivamente [105].

4.2.3. Nueva gravedad masiva

A continuación estudiaremos una segunda teoría gravitatoria masiva tridimensional conocida como nueva gravedad masiva (NGM), la cual es equivalente a la acción de Fierz-Pauli (unitaria) linealizada para gravitones masivos libres de spin-2 [108]. De manera introductoria, consideremos la siguiente acción en D -dimensiones

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{-g} [R + \beta_1 R^2 + \beta_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \beta_3 (R_{\mu\nu\sigma\rho} R^{\mu\nu\sigma\rho} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2)], \quad (4.2.22)$$

donde hemos agregado correcciones de curvaturas cuadráticas a la gravedad de Einstein con β_i 's constantes y κ una constante de acoplamiento. Una de las ventajas de esta teoría es que adquiere renormalizabilidad, propiedad que no posee la acción de Einstein-Hilbert en un estado puro. Sin embargo, la inclusión del término $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ conlleva la aparición de un término fantasma, y la teoría pasa a ser no unitaria [98, 109, 110]. El término que acompaña a la constante de acoplamiento β_3 corresponde al término de Gauss-Bonnet estudiado en la sección 3.2, donde su contribución a la acción (4.2.22) depende de la dimensión del espacio-tiempo. En particular, si consideramos el caso $D = 4$, el término de Gauss-Bonnet pasa a ser un término de superficie, por lo tanto, no contribuye a las ecuaciones de movimiento. Mientras que para $D = 3$, tenemos que este término desaparece. Si variamos la acción (4.2.22) obtenemos [98]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} = 0, \quad (4.2.23)$$

donde

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} = & 2\beta_1 R \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} \right) + (2\beta_1 + \beta_2) (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) R + 2\beta_3 [R R_{\mu\nu} - 2R_{\mu\sigma\nu\rho} R^{\sigma\rho} \\ & + R_{\mu\sigma\rho\tau} R^{\sigma\rho\tau} - 2R_{\mu\sigma} R^{\sigma}{}_\nu - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (R_{\tau\lambda\sigma\rho} R^{\tau\lambda\sigma\rho} - 4R_{\sigma\rho} R^{\sigma\rho} + R^2)] + \beta_1 \square \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \\ & + 2\beta_1 \left(R_{\mu\sigma\nu\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R_{\sigma\rho} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

el cual contiene derivadas de cuarto orden respecto a la métrica. En particular, para la teoría NGM existe una relación especial entre las constantes de acoplamiento β_1 y β_2 , dada por $\beta_1 = -\frac{3}{8}\beta_2$, de tal forma que la traza de $K_{\mu\nu}$ sea proporcional a esta combinación lineal de R^2 con $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$, removiendo el modo de spin-0 que sería un fantasma [97, 108]. Con todo lo anterior, tenemos que la teoría NMG está dada por

$$S_{\text{NGM}} = -\frac{1}{2\kappa} \int d^3 x \sqrt{-g} \left[R - 2\lambda - \frac{1}{m^2} K \right], \quad (4.2.25)$$

donde

$$K = R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2. \quad (4.2.26)$$

El signo negativo se justifica debido a la unitariedad de la teoría, m es un parámetro de masa que acompaña a K y λ es una constante que no necesariamente corresponde a la constante cosmológica Λ . Las ecuaciones de movimiento de (4.2.25) son [108, 111]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2m^2} K_{\mu\nu} = 0, \quad (4.2.27)$$

donde

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square R g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\mu \nabla_\nu R + 2\square R_{\mu\nu} + 4R_{\mu\sigma\nu\rho}R^{\sigma\rho} - \frac{3}{2}RR_{\mu\nu} - R_{\sigma\rho}R^{\sigma\rho}g_{\mu\nu} + \frac{3}{8}R^2g_{\mu\nu}. \quad (4.2.28)$$

Multiplicando (4.2.27) por la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ y utilizando $g^{\mu\nu}K_{\mu\nu} = K$, obtenemos la expresión

$$m^2(6\lambda - R) - K = 0,$$

ello implica que, para una solución de las ecuaciones (4.2.27) con $m \neq 0$

$$R = 6\lambda \Leftrightarrow K = 0.$$

Adicionalmente, si consideramos un espacio-tiempo maximalmente simétrico en tres dimensiones, donde

$$R_{\mu\sigma\nu\rho} = \Lambda(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu}), \quad R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu}, \quad R = 6\Lambda, \quad (4.2.29)$$

y $K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Lambda^2g_{\mu\nu}$, se obtiene una relación entre la constante λ , la constante cosmológica Λ y el parámetro de masa m de la forma

$$\lambda = \Lambda \left(1 - \frac{\Lambda}{4m^2} \right). \quad (4.2.30)$$

Lo anterior implica que las ecuaciones (4.2.27) admiten una solución si y sólo si $\frac{m^2}{\Lambda} \geq 1$. Dependiendo del signo de m^2 y la constante λ , podemos separar los casos en AdS₃, dS₃ ó de Minkowski [111].

Nueva gravedad masiva linealizada

De manera análoga a la teoría GMT, analizaremos las ecuaciones de movimiento (4.2.27) linealizadas entorno a una métrica base de curvatura constante $\bar{g}_{\mu\nu}$, donde el tensor y escalar de Ricci linealizado corresponden a las expresiones (4.2.13) y (4.2.14). Además, las restantes cantidades son las siguientes [111]

$$R_{\rho\nu\mu}^{\lambda(L)} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\lambda\sigma}(\bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\mu h_{\sigma\rho} + \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\rho h_{\mu\sigma} - \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\sigma h_{\mu\rho}) - (\mu \leftrightarrow \nu), \quad (4.2.31)$$

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu R)^{(L)} = \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu R^{(L)}, \quad (\nabla_\sigma \nabla_\rho R_{\mu\nu})^{(L)} = \bar{\nabla}_\sigma \bar{\nabla}_\rho R_{\mu\nu}^{(L)} - 2\Lambda \bar{\nabla}_\sigma \bar{\nabla}_\rho h_{\mu\nu}. \quad (4.2.32)$$

Sustituyendo lo anterior en las ecuaciones de movimiento (4.2.27), obtenemos

$$G_{\mu\nu}^{(L)} + \lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{2m^2}K_{\mu\nu}^{(L)} = 0, \quad (4.2.33)$$

donde

$$G_{\mu\nu}^{(L)} = R_{\mu\nu}^{(L)} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R^{(L)} - 3\Lambda h_{\mu\nu}, \quad (4.2.34)$$

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu}^{(L)} &= -\frac{1}{2}\bar{\square}R_{\mu\nu}^{(L)} - \frac{1}{2}\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu R^{(L)} + 2\bar{\square}R_{\mu\nu}^{(L)} - 4\Lambda\bar{\square}h_{\mu\nu} - 5\Lambda R_{\mu\nu}^{(L)} \\ &+ \frac{3}{2}\Lambda R^{(L)}\bar{g}_{\mu\nu} + \frac{19}{2}\Lambda^2 h_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

Tomando la traza de la ecuación (4.2.34) obtenemos que $R^{(L)} = 0$, transformando las ecuaciones de movimiento linealizadas como

$$\left(1 + \frac{5\Lambda}{2m^2} \right) (R_{\mu\nu}^{(L)} - 2\Lambda h_{\mu\nu}) - \frac{\bar{\square}}{m^2} (R_{\mu\nu}^{(L)} - 2\Lambda h_{\mu\nu}) = 0. \quad (4.2.36)$$

Asimismo, de la misma manera que el caso GMT, los autores en [111] definen el tensor $\tilde{h} := h_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}h$, obteniéndose

$$h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\tilde{h}, \quad R^{(L)} = \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \tilde{h}^{\mu\nu} + \Lambda \tilde{h} = 0, \quad (4.2.37)$$

donde se concluye que $\bar{\nabla}_\mu \tilde{h}^{\mu\nu} = 0$, implicando que $\tilde{h} = -2h = 0$. Finalmente, la ecuación (4.2.36) se convierte en

$$\left[\bar{\square} - \left(m^2 + \frac{5}{2}\Lambda \right) \right] [\bar{\square} - 2\Lambda] h_{\mu\nu} = 0. \quad (4.2.38)$$

Lo que nos permite concluir la existencia de dos ramas de soluciones, la primera de ellas corresponde al sector de gravitones masivos, mientras que la segunda está asociada a gravitones sin masa [111].

4.3. Cálculo de la masa de agujeros negros considerando el formalismo cuasilocal

Debido a la importancia del formalismo cuasilocal en esta tesis, resulta necesario dar a conocer algunos ejemplos presentes en la literatura, donde para cada uno de ellos, mostraremos la masa $M_{\text{cuasilocal}}$ (4.1.70), entropía de Wald S_W (4.1.22) y temperatura de Hawking T (4.1.5) (con $\hbar = 1$) respectivamente. Comenzaremos el estudio considerando la siguiente acción

$$\begin{aligned} S[g_{\mu\nu}, \Phi] &= \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{-g} \left((1 - \kappa \xi \Phi^2) R - 2\Lambda + \beta_1 R^2 + \beta_2 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \beta_3 R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} \right) \\ &+ \int d^D x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - U(\Phi) \right], \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

donde la sección gravitatoria corresponde a la acción de Einstein-Hilbert con una constante cosmológica Λ , además de las correcciones de curvaturas cuadráticas más generales en D -dimensiones y κ es una constante de acoplamiento. Mientras que la fuente de materia incluye a un campo escalar no mínimamente acoplado junto a un potencial, estudiado previamente en el capítulo 3. Para cada uno de estos ejemplos, se considerará un ansatz métrico dado en (3.3.1) con $\gamma = 0$.

Por otro lado, dado que la acción (4.3.1) posee una fuente de materia, las ecuaciones expuestas en (4.1.72) y (4.1.73) deben modificarse. Observemos que, siguiendo el procedimiento realizado en [92], tanto el potencial de Noether como el término de superficie de la primera línea de la acción (4.3.1) mantienen la misma estructura, donde el tensor $P^{\alpha\beta\gamma\delta}$ está dado por

$$\begin{aligned} P^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\kappa} - \xi \Phi^2 \right) (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) + \frac{\beta_1}{2\kappa} R (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \\ &+ \frac{\beta_2}{4\kappa} (g^{\beta\delta} R^{\alpha\gamma} - g^{\beta\gamma} R^{\alpha\delta} - g^{\alpha\delta} R^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} R^{\beta\delta}) + \frac{\beta_3}{\kappa} R^{\alpha\beta\gamma\delta}. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Ahora debemos encontrar la contribución de la otra sección correspondiente al término cinético usual del campo escalar junto al potencial $U(\Phi)$. Aplicando el mismo formalismo, tenemos que el término de superficie total de la acción (4.3.1) adquiere la forma

$$\Theta^\mu(\delta g, \delta \Phi) = \Theta_{\text{grav}}^\mu(\delta g) + \Theta_{\text{mat}}^\mu(\delta \Phi), \quad (4.3.3)$$

donde

$$\Theta_{\text{mat}}^\mu(\delta\Phi) = \sqrt{-g} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \delta\Phi = -\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu\Phi \delta\Phi. \quad (4.3.4)$$

De lo anterior, construimos la corriente conservada J_{mat}^μ como

$$J_{\text{mat}}^\mu := -2T^{\mu\nu}\xi_\nu + \xi^\mu \left(-\frac{1}{2}\partial_\sigma\Phi\partial^\sigma\Phi - U(\Phi) \right) - \Theta_{\text{mat}}^\mu(\delta_\xi\Phi), \quad (4.3.5)$$

donde δ_ξ denota la variación del campo escalar bajo difeomorfismo y es dado por

$$\delta_\xi\Phi = \mathcal{L}_\xi\Phi = \xi^\sigma\nabla_\sigma\xi, \quad (4.3.6)$$

mientras que

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial^\mu\Phi\partial^\nu\Phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\sigma\Phi\partial^\sigma\Phi - g^{\mu\nu}U(\Phi) \right). \quad (4.3.7)$$

Sin embargo, con todo lo anterior tenemos que la corriente J_{mat}^μ se desvanece trivialmente. Como resultado final, tenemos que la expresión para el potencial de Noether total $K^{\mu\nu}$ debe ser

$$K^{\mu\nu} = K_{\text{grav}}^{\mu\nu}, \quad (4.3.8)$$

con $P^{\alpha\beta\gamma\delta}$ dado en (4.3.2).

Como primer ejemplo, estudiaremos el agujero negro encontrado en [62] con $k = 2$, sin una fuente de materia. Su respectivo elemento de línea está dado por

$$ds_0^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{Ml^{(D-5)/2}}{r^{(D-5)/2}} \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{Ml^{(D-5)/2}}{r^{(D-5)/2}} \right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} d\Sigma_{D-2,0}^2, \quad (4.3.9)$$

donde M es una constante de integración asociada a la masa. Asimismo, las constantes β_i 's y cosmológica adquieren la forma

$$\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{4l^2}, \quad \beta_1 = -\frac{1}{4}\beta_2 = \beta_3 = \frac{l^2}{2(D-3)(D-4)}. \quad (4.3.10)$$

Mediante las fórmulas (4.1.22) y (4.1.5) para la entropía y temperatura respectivamente, podemos notar que

$$S_W = \frac{2\pi r_h^{D-2} \Sigma_{D-2,0}}{l^{D-2}\kappa}, \quad T = \frac{(D-1)r_h}{8\pi l^2}, \quad r_h = lM^{\frac{2}{D-1}}, \quad (4.3.11)$$

donde r_h denota la ubicación del horizonte de eventos y $\Sigma_{D-2,0}$ representa la contribución finita de la integración $(D-2)$ -dimensional sobre las variables planares. De lo anterior, el potencial de Noether (4.3.8) y el término de superficie (4.3.3) son dados por

$$K^{rt} = \frac{(D-5)(D-2)M^2}{2l(D-4)\kappa} + \frac{(D+1)M}{l(D-4)\kappa} \left(\frac{r}{l} \right)^{\frac{D-1}{2}} - \frac{4}{r(D-4)\kappa} \left(\frac{r}{l} \right)^D, \quad (4.3.12)$$

$$\int_0^M dM \Theta^r = \frac{(D-2)M^2}{2l(D-4)\kappa} - \frac{(D+1)M}{l(D-4)\kappa} \left(\frac{r}{l} \right)^{\frac{D-1}{2}}. \quad (4.3.13)$$

Esto implica que la masa $M_{\text{cuasilocal}}$ de la solución (4.3.9) para a ser

$$M_{\text{cuasilocal}} = \frac{(D-2)r_h^{D-1} \Sigma_{D-2,0}}{4\kappa l^D}, \quad (4.3.14)$$

donde podemos verificar que la entropía y temperatura (4.3.11) junto con la masa (4.3.14) satisfacen la primera ley de la termodinámica (4.1.4).

El segundo ejemplo a analizar, si no consideramos una fuente de materia, corresponde a los resultados encontrados en [75], logrando obtener las respectivas masas para las tres familias de agujeros negros asintóticamente Lifshitz [112], mostrando que satisfacen la primera ley (4.1.4). La primera familia de soluciones está dada para un rango del exponente dinámico $z > 2 - D$, siendo descrita por el elemento de línea

$$ds_0^2 = -\frac{r^{2z}}{l^{2z}} \left(1 - \frac{Ml^{(z+D-2)/2}}{r^{(z+D-2)/2}}\right) dt^2 + \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{Ml^{(z+D-2)/2}}{r^{(z+D-2)/2}}\right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} d\Sigma_{D-2,0}^2, \quad (4.3.15)$$

donde $r_h = l M^{\frac{2}{z+D-2}}$. Aquí, las constantes de acoplamiento son parametrizadas de la forma

$$\Lambda = \frac{(D-2)}{4l^2} \left\{ (197D - 389)z^4 + 4(19D^2 - 200D + 325)z^3 + (D-2)[2(5D^2 - 73D + 356)z^2 + 4(D^3 - 2D^2 + 15D - 62)z + (D+2)(D-1)(D-2)^2] \right\} / P_4(z), \quad (4.3.16)$$

$$\beta_1 = l^2 \left\{ 27z^6 - 18(3D-4)z^5 + 3(19D^2 - 168D + 356)z^4 - 12(11D^3 - 84D^2 + 196D - 120)z^3 - (D-2)[(19D^3 - 330D^2 + 2052D - 3640)z^2 + 2(3D^4 - 30D^3 + 124D^2 - 536D + 1024)z + (D+2)(D-2)^2(D^2 - 4D + 36)] \right\} / \left((2(D-3)(D-4)(z+D-2)^2 P_4(z)) \right), \quad (4.3.17)$$

$$\beta_2 = -2l^2 [3z^2 + (D+2)(D-2)] \left\{ 9z^4 - 6(3D-4)z^3 - 8(D^2 - 10)z^2 + 2(D^3 - 4D^2 + 32D - 80)z - (D-2)[D^3 + 2D^2 - 12(D-2)] \right\} / \left((D-3)(D-4)(z+D-2)^2 P_4(z) \right), \quad (4.3.18)$$

$$\beta_3 = l^2 [3z^2 + (D+2)(D-2)] \left\{ 9z^3 - 3(9D-14)z^2 - (D-2)[(5D-62)z + D^2 - 4D + 36] \right\} / \left((2(D-3)(D-4)(z+D-2) P_4(z)) \right), \quad (4.3.19)$$

donde P_4 es un polinomio de grado cuatro respecto al exponente dinámico z dado por

$$P_4(z) = 27z^4 - 4(27D - 45)z^3 - (D-2)[2(5D - 116)z^2 + 4(D^2 - D + 30)z + (D+2)(D-2)^2].$$

Para este caso, la masa $M_{\text{cuasilocal}}$, entropía de Wald S_W y la temperatura de Hawking T son

$$M_{\text{cuasilocal}} = (D-2) \Sigma_{D-2,0} \left(\frac{r_h}{l} \right)^{z+D-2} \left[\frac{(3z^2 + D^2 - 4)(D-2+3z)(3z-D-2)}{4lP_4(z)\kappa} \right], \quad (4.3.20)$$

$$S_W = 2\pi \Sigma_{D-2,0} \left(\frac{r_h}{l} \right)^{D-2} \left[\frac{(3z^2 + D^2 - 4)(D-2+3z)(3z-D-2)}{P_4(z)\kappa} \right], \quad (4.3.21)$$

$$T = \frac{(z+D-2)}{8\pi l} \left(\frac{r_h}{l} \right)^z. \quad (4.3.22)$$

La segunda familia considera el caso $z > 1$, cuya solución adquiere la forma

$$ds_0^2 = -\frac{r^{2z}}{l^{2z}} \left(1 - \frac{Ml^{2(z-1)}}{r^{2(z-1)}}\right) dt^2 + \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{Ml^{2(z-1)}}{r^{2(z-1)}}\right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} d\Sigma_{D-2,0}^2, \quad (4.3.23)$$

donde el horizonte se encuentra ubicado en $r_h = l M^{\frac{1}{2(z-1)}}$. Para esta situación, la solución (4.3.23) existe a través de la siguiente elección de las constantes de acoplamiento

$$\Lambda = -\frac{(z-1)[z^2 - Dz - (D-1)(D-2)]}{2l^2(z-D)}, \quad (4.3.24)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 = l^2 & \left[3(D-1)(D-2)z^3 - (2D^3 - 2D^2 - 11D + 20)z^2 + (3D^3 - 14D^2 + 19D + 10)z \right. \\ & \left. + (D+2)(D-4) \right] / \left[2(D-2)(D-3)(D-4)z(z-1)(z-D)(3z+D-4) \right], \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = -l^2(D-1)(2z-D-2) & \left[6(D-2)z^2 - (D^2 - 3D + 8)z - 2(D-4) \right] \\ & / \left[2(D-2)(D-3)(D-4)z(z-1)(z-D)(3z+D-4) \right], \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

$$\beta_3 = \frac{l^2(D-1)(2z-D-2)}{4(D-3)(D-4)z(z-D)}, \quad (4.3.27)$$

y se puede mostrar que las respectivas cantidades termodinámicas son dadas por

$$M_{\text{cuasilocal}} = 0, \quad S_W = 0, \quad T = \frac{(z-1)}{2\pi l} \left(\frac{r_h}{l}\right)^z. \quad (4.3.28)$$

La última familia corresponde al caso $z < 0$, descrito por un exponente dinámico negativo $z = -|z|$, cuya métrica es

$$ds^2 = -\frac{l^{2|z|}}{r^{2|z|}} \left(1 - \frac{Ml^{|z|}}{r^{|z|}}\right) dt^2 + \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{Ml^{|z|}}{r^{|z|}}\right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} d\Sigma_{D-2,0}^2, \quad (4.3.29)$$

con $r_h = lM^{\frac{1}{|z|}}$. Mientras que las correspondientes constantes de acoplamiento toman la forma

$$\Lambda = \frac{|z|[2|z|^2 - 4(D-2)|z| + (D-2)(D-3)]}{4l^2(2|z| - D + 2)}, \quad (4.3.30)$$

$$\beta_1 = \frac{l^2[3|z|^2 - 2(D-2)|z| + 2D - 5]}{2(D-3)(D-4)|z|(2|z| - D + 2)}, \quad (4.3.31)$$

$$\beta_2 = -4\beta_3, \quad (4.3.32)$$

$$\beta_3 = \frac{l^2[6|z|^2 - 4(D-2)|z| + (D-1)(D-2)]}{4(D-3)(D-4)|z|(2|z| - D + 2)}, \quad (4.3.33)$$

donde obtenemos que

$$M_{\text{cuasilocal}} = 0, \quad S_W = 0, \quad T = \frac{|z|}{4\pi l} \left(\frac{l}{r_h}\right)^{|z|}. \quad (4.3.34)$$

De acuerdo a lo analizado en el capítulo 3, en el artículo [1] se estudian soluciones de agujeros negros topológicos en dimensión D -arbitraria considerando la acción (4.3.1), donde la constante cosmológica y las constantes de acoplamiento β_i 's adquieren la forma obtenida en (4.3.10). Concretamente, para un parámetro de acoplamiento no minimal dado por

$$\xi = \frac{D-2}{4D}, \quad (4.3.35)$$

junto con un potencial de la forma

$$U(\Phi) = \frac{(D-2)^2}{32l^2} \Phi^2, \quad (4.3.36)$$

su solución es

$$\begin{aligned} ds_0^2 &= - \left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{Ml^{(D-6)/2}}{r^{(D-6)/2}} \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{Ml^{(D-6)/2}}{r^{(D-6)/2}} \right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} d\Sigma_{D-2,0}^2, \\ \Phi(r) &= 2 \sqrt{\frac{MD}{\kappa(D-2)}} \left(\frac{l}{r} \right)^{\frac{D-2}{4}}, \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

donde $r_h = l M^{\frac{2}{D-2}}$ y la temperatura de Hawking es $T = \frac{(D-2)r_h}{8\pi l^2}$. No obstante, para este caso en particular tenemos que la entropía de Wald S_W se desvanece. Si utilizamos el formalismo cuasilocal dado por el potencial de Noether (4.3.8) y el término de superficie (4.3.3), tenemos que

$$\begin{aligned} K^{rt} &= \frac{r(D^2 - 5D + 2)M^2}{l^2(D-4)\kappa} - \frac{(D^2 - 5D + 2)M}{l(D-4)\kappa} \left(\frac{r}{l} \right)^{\frac{D}{2}} \\ &\quad - \frac{4}{r(D-4)\kappa} \left(\frac{r}{l} \right)^D, \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

$$\int_0^M dM \Theta^r = - \frac{r(D^2 - 5D + 2)M^2}{l^2(D-4)\kappa} + \frac{(D^2 - 5D + 2)M}{l(D-4)\kappa} \left(\frac{r}{l} \right)^{\frac{D}{2}}, \quad (4.3.39)$$

y se tiene que la masa $M_{\text{cuasilocal}}$ se desvanece igualmente, siendo consistente con la primera ley (4.1.4) y con los resultados expuestos en [113].

Al considerar un espacio-tiempo tridimensional y la teoría nueva gravedad masiva, estudiada en la sección 4.2, además del agujero negro de Lifshitz con $z = 3$ [74] existe otra solución caracterizada por un exponente dinámico $z = 1$ [114] cuyo elemento de línea es el siguiente

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} + br - 4GM \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} + br - 4GM \right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} d\Sigma_{1,0}^2, \quad (4.3.40)$$

donde b y M son constantes de integración, además de

$$\Lambda = m^2 = -\frac{1}{2l^2}. \quad (4.3.41)$$

Aquí la entropía de Wald S_W y la temperatura de Hawking T son

$$S_W = \frac{\pi l \sqrt{l^2 b^2 + 16GM}}{2G}, \quad T = \frac{\sqrt{l^2 b^2 + 16GM}}{4\pi l}, \quad (4.3.42)$$

mientras que la masa adquiere la forma

$$M_{\text{cuasilocal}} = M + \frac{l^2 b^2}{16G}, \quad (4.3.43)$$

corroborando la primera ley (4.1.4).

Finalmente, daremos a conocer un ejemplo que se escapa a los expuestos con anterioridad, éste considera el caso particular $D = 5$ en la acción (4.3.1) cuando las constantes de acoplamiento toman la forma (4.3.10) sin una fuente de materia, mientras que el ansatz métrico corresponde a (3.3.1) con $\gamma = 1$. Estas soluciones fueron estudiadas en detalle en [59, 61, 62], las cuales son conocidas en la literatura como teorías de Chern-Simons. La solución viene dada por

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} + 1 - \sqrt{M+1} \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} + 1 - \sqrt{M+1} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Sigma_{3,1}^2, \quad (4.3.44)$$

con $r_h = (\sqrt{M+1} - 1)^{1/2} l$. Aquí la entropía de Wald y temperatura de Hawking toman la siguiente forma

$$S_W = \frac{2\pi \Sigma_{3,1} r_h (r_h^2 + 3l^2)}{\kappa}, \quad T = \frac{r_h}{2\pi l^2}, \quad (4.3.45)$$

donde $\Sigma_{3,1}$ corresponde a la contribución finita de la integración de dimensión tres sobre las variables angulares. Mientras que la masa $M_{\text{cuasilocal}}$ para esta solución es

$$M_{\text{cuasilocal}} = \frac{3Ml^2}{4\kappa} = \frac{3r_h^2 (r_h^2 + 2l^2) \Sigma_{3,1}}{4l^2\kappa}, \quad (4.3.46)$$

donde podemos corroborar que la primera ley (4.1.4) se cumple.

4.4. Primera ley y fórmula de Cardy generalizada para agujeros negros de Lifshitz en tres dimensiones

Debido a la motivación de explorar y probar algunas ideas de la correspondencia AdS/CFT, especialmente con el fin de comprender de una mejor manera teorías de campos fuertemente acopladas con escalamiento anisotrópico, en [115] analizan el caso tridimensional donde consideran la teoría gravitatoria dada en (4.2.25), junto con un campo escalar no mínimamente acoplado, estudiado en la sección 3.1, encontrándose tres interesantes ramas de agujeros negros asintóticamente Lifshitz.

Por otra parte la presencia de solitones (esto es soluciones de ciertas ecuaciones de onda no lineales, con una energía localizada y finita, una velocidad de propagación característica y una persistencia estructural que se mantiene incluso cuando dos solitones chocan [116]), en modelos gravitatorios de dimensión tres, son esenciales para el cálculo de la fórmula de Cardy [117] y de su expresión generalizada [118], permitiendo calcular parámetros tales como la masa y la entropía de agujeros negros donde el solitón corresponde a un estado base o fundamental.

A continuación se estudiarán familias de agujeros negros asintóticamente Lifshitz en dimensión tres, correspondientes a los resultados del artículo [3], calculando sus respectivas masas considerando el método cuasilocal estudiado en la sección 4.1. Asimismo, mediante la entropía de Wald (4.1.2) y temperatura de Hawking (4.1.5) se corroborará la primera ley de la termodinámica. Adicionalmente, se calcularán las masas de sus homólogos solitónicos, confirmando la fórmula de Cardy generalizada expuesta en [118].

First law and anisotropic Cardy formula for three-dimensional Lifshitz black holes

Eloy Ayón-Beato,^{1,2,3,*} Moisés Bravo-Gaete,^{4,†} Francisco Correa,^{5,3,‡} Mokhtar Hassaine,^{4,§} María Montserrat Juárez-Aubry,^{1,2,6,||} and Julio Oliva^{2,¶}

¹*Departamento de Física, CINVESTAV-IPN, Apartado Postal 14-740, 07000 México D.F., México*

²*Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Austral de Chile, Casilla 567, Valdivia, Chile*

³*Centro de Estudios Científicos (CECs), Casilla 1468, Valdivia, Chile*

⁴*Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, Casilla 747, Talca, Chile*

⁵*Leibniz Universität Hannover, Appelstraße 2, 30167 Hannover, Germany*

⁶*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Puebla, Vía Atlixcáyotl No. 2301, Reserva Territorial Atlixcáyotl, Puebla, C.P. 72453 Puebla, México*

(Received 14 January 2015; published 2 March 2015)

The aim of this paper is to confirm in new concrete examples that the semiclassical entropy of a three-dimensional Lifshitz black hole can be recovered through an anisotropic generalization of the Cardy formula derived from the growth of the number of states of a boundary nonrelativistic field theory. The role of the ground state in the bulk is played by the corresponding Lifshitz soliton obtained by a double Wick rotation. In order to achieve this task, we consider a scalar field nonminimally coupled to new massive gravity for which we study different classes of Lifshitz black holes as well as their respective solitons, including new solutions for a dynamical exponent $z = 3$. The masses of the black holes and solitons are computed using the quasilocal formulation of conserved charges recently proposed by Gim *et al.* and based on the off-shell extension of the ADT formalism. We confirm the anisotropic Cardy formula for each of these examples, providing a stronger base for its general validity. Consistently, the first law of thermodynamics together with a Smarr formula are also verified.

DOI: [10.1103/PhysRevD.91.064006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.064006)

PACS numbers: 04.70.Bw, 04.50.Kd, 04.70.Dy

I. INTRODUCTION

During the last decade, there has been an intense activity to promote the ideas underlying the gauge/gravity duality [1] in order to have a better understanding of strongly coupled field theories with anisotropic scaling. These latter are characterized by a scaling symmetry where space and time scale with different weights; their gravity dual metric called the Lifshitz spacetime [2] is given by

$$ds^2 = -\frac{r^{2z}}{l^{2z}} dt^2 + \frac{l^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} d\vec{x}^2. \quad (1)$$

Here, z is the dynamical critical exponent which reflects the anisotropy of the scaling symmetry

$$t \mapsto \tilde{\lambda}^z t, \quad r \mapsto \tilde{\lambda}^{-1} r, \quad \vec{x} \mapsto \tilde{\lambda} \vec{x}.$$

Finite temperature effects are intended to be holographically introduced through black holes commonly known as Lifshitz black holes whose asymptotic behaviors match with the spacetime (1). As it is now well known, for $z \neq 1$,

in order for the Einstein gravity to accommodate the Lifshitz spacetimes, some extra matter source is required like p -form gauge fields, Proca fields [2–4], Brans-Dicke scalars [5], or, eventually, nonlinear electrodynamic theories [6]. There also exists the option of considering higher-order gravity theories for which there are examples of Lifshitz black holes without source; see, e.g., [7–12]. In this paper, we will focus on a combination of these two options in three dimensions by considering a gravity action given by a special combination of quadratic curvature corrections to Einstein gravity known as new massive gravity (NMG) [13], together with a source described by a self-interacting scalar field nonminimally coupled to gravity. We are then interested in the following three-dimensional action

$$S[g, \Phi] = \frac{1}{2\kappa} \int d^3x \sqrt{-g} \left[R - 2\lambda - \frac{1}{m^2} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2 \right) \right] - \int d^3x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi + \frac{\xi}{2} R \Phi^2 + U(\Phi) \right], \quad (2)$$

where R denotes the scalar curvature, $R_{\mu\nu}$ the Ricci tensor, ξ stands for the nonminimal coupling parameter, and $U(\Phi)$ represents the self-interaction potential. There is a variety of reasons that make this model worth being explored. Among others, it is well known that nonminimally coupled scalar fields are excellent laboratories in order to evade

* ayon-beato-at-fis.cinvestav.mx

† mbravog-at-inst-mat.utalca.cl

‡ correa-at-cecs.cl

§ hassaine-at-inst-mat.utalca.cl

|| mjuarez-at-fis.cinvestav.mx

¶ julio.oliva-at-uach.cl

standard “no-hair” theorems. In fact, it is known that NMG supports a vacuum Lifshitz black hole for critical exponent $z = 3$ [7] that is additionally characterized as the only static axisymmetric asymptotically Lifshitz solution that can be written as a Kerr-Schild transformation of the Lifshitz spacetime (1) [14]. Remarkably, it has been recently shown that the spectrum of dynamical critical exponents z supported by new massive gravity at finite temperature becomes largely enriched if one includes self-interacting nonminimally coupled scalar fields as sources of the Lifshitz black holes according to the previous action [15]. Besides, it is known that in standard three-dimensional anti-de Sitter (AdS) gravity supported by scalar fields, solitons play a fundamental role as they can be treated as ground states; the existence of scalar-tensor solitons turns out to be essential for microscopically counting for the black holes’ entropy using the Cardy formula [16]. Here, we check that these ideas also hold in the case of asymptotically Lifshitz spacetimes in the presence of scalar fields, by carrying out the microscopical computation of the black hole entropy using the anisotropic generalization of the Cardy formula introduced by Gonzalez *et al.* [17].

As previously emphasized, the action (2) allows different classes of Lifshitz black hole configurations with different values of the parameters and dynamical exponent. With these solutions at hand, it is tempting to compute their respective masses. However, the task of identifying the conserved charges is a highly nontrivial problem whose difficulty is increased in our case because of two main reasons. Indeed, we are dealing with Lifshitz black holes which have a rather nonstandard asymptotic behavior (1), and even more, the gravity theory we consider (2) contains quadratic corrections. In order to tackle this problem, we will test the quasilocal formulation of conserved charges recently proposed in [18,19] and based on the off-shell extension of the Abbott-Deser-Tekin (ADT) formalism [20]. In the ADT formalism, which is a covariant generalization of the ADM method [21], the metric $g_{\mu\nu}$ is linearized around the zero mass spacetime with metric $\bar{g}_{\mu\nu}$ as $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. However, in this approach, the perturbed metric $h_{\mu\nu}$ in the case of Lifshitz black holes may not satisfy the correct assumptions concerning the falloff boundary conditions, and consequently yields an expression for the mass that does not satisfy the first law of thermodynamics as shown in [22]. This problem has been recently circumvented by the authors of [18,19] who have proposed a quasilocal generalization of the ADT formalism that can be used even with slow falloff conditions. In order to be as self-contained as possible and even if our work is focused in the three-dimensional case, we briefly present the main ingredients of the quasilocal ADT method in arbitrary dimension D following the notations and results of [18,19]. One of the interesting aspects of this formalism lies in the fact that the computations are done only on the basis of the full Lagrangian defining the theory

$$S[g, \Phi] = \int d^D x \sqrt{-g} \mathcal{L},$$

and the Killing vectors ξ^μ associated to the conserved charges without explicitly using the linearization of the field equations. Here, Φ collectively denotes any matter content. The main result of Ref. [18] is the following prescription for the off-shell ADT potential

$$\sqrt{-g} \mathcal{Q}_{\text{ADT}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \delta K^{\mu\nu} - \xi^{[\mu} \Theta^{\nu]} \quad (3)$$

in terms of the surface term Θ^μ arising from the variation of the action

$$\delta S = \int d^D x [\sqrt{-g} (\mathcal{E}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \delta_\Phi \mathcal{L}) + \partial_\mu \Theta^\mu],$$

and the off-shell Noether potential $K^{\mu\nu}$ associated to the identical conservation of the off-shell Noether current

$$J^\mu = \sqrt{-g} (\mathcal{L} g^{\mu\nu} + 2 \mathcal{E}^{\mu\nu}) \xi_\nu - \Theta^\mu = \partial_\nu K^{\mu\nu}.$$

It is important to remark that the exclusive use of off-shell conserved currents in the derivation makes that the background metric is not required to satisfy the field equations. Another important fact is that the standard linearization method is only compatible at the asymptotic regime. Hence, in order to circumvent this problem and to construct quasilocal charges, the authors in [18,19] consider linearizing along a one-parameter family of configurations as has been advocated, for example, in [23]. More concretely, for the configurations under study, a parameter $0 \leq s \leq 1$ can be introduced which allows the interpolation with the asymptotic solution at $s = 0$. In doing so, the quasilocal conserved charge reads

$$Q(\xi) = \int_{\mathcal{B}} d^{D-2} x_{\mu\nu} \left(\Delta K^{\mu\nu}(\xi) - 2 \xi^{[\mu} \int_0^1 ds \Theta^{\nu]}(\xi|s) \right), \quad (4)$$

where $\Delta K^{\mu\nu}(\xi) \equiv K_{s=1}^{\mu\nu}(\xi) - K_{s=0}^{\mu\nu}(\xi)$ denotes the difference of the Noether potential between the interpolated solutions, and $d^{D-2} x_{\mu\nu}$ represents the integration over the codimension-two boundary \mathcal{B} . In our case (2), the involved quantities are given by

$$\Theta^\mu = 2\sqrt{-g} \left(P^{\mu\alpha\beta\gamma} \nabla_\gamma \delta g_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma P^{\mu\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right), \quad (5)$$

$$K^{\mu\nu} = \sqrt{-g} (2 P^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\rho \xi_\sigma - 4 \xi_\sigma \nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma}), \quad (6)$$

with $P^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \partial \mathcal{L} / \partial R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Notice that we have added the contribution to the surface term coming from the scalar field, which was not included in the original of

Refs. [18,19] since they dealt with the vacuum case. It is worth to note that generic matter contributions to the quasilocal ADT formalism have been investigated in [24].

After computing the masses of our solutions, we subject the quasilocal ADT method to two nontrivial tests. First, we will verify that the first law of thermodynamics holds in each case by computing the Wald formula [25] for the entropy as

$$S_W = -2\pi\Omega_{D-2} \left(\frac{r_h}{l}\right)^{D-2} [P^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu}]_{r=r_h}, \quad (7)$$

together with the Hawking temperature T ; here, r_h stands for the location of the horizon. Independently, in three dimensions, a Lifshitz black hole characterized by a dynamical exponent z and mass \mathcal{M} has a corresponding soliton with dynamical exponent z^{-1} and mass \mathcal{M}_{sol} obtained by operating a double Wick rotation [17]. We will confirm that our mass expressions are compatible with the anisotropic generalization of the Cardy formula proposed in [17]

$$S_C = 2\pi l(z+1) \left[\left(-\frac{\mathcal{M}_{\text{sol}}}{z} \right)^z \mathcal{M} \right]^{\frac{1}{z+1}}. \quad (8)$$

This formula is obtained starting from a boundary non-relativistic field theory and computing the asymptotic growth of the number of states with fixed energy, assuming the role of ground state in the bulk is to be played by the soliton. Notice that for AdS asymptotics, $z=1$, this formula becomes exactly the Cardy formula used in [16] for the case of standard gravity supported by scalar fields. Remarkably, both tests will be checked satisfactorily by the quasilocal ADT method.

The rest of the paper is organized as follows. In the next section, we will study different classes of Lifshitz black hole solutions for which we will obtain their mass using the quasilocal ADT formalism. We explicitly verify the fulfillment of the first law in all these cases. Moreover, for each Lifshitz black hole solution, we obtain their corresponding soliton counterpart, compute their mass, and spotlight the validity of the anisotropic Cardy formula (8). Finally, the last section is devoted to our conclusions where we also anticipate the generalization of some of these results to higher dimensions.

II. NONMINIMALLY DRESSED LIFSHITZ BLACK HOLES

The field equations obtained by varying the action (2) read

$$G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2m^2} K_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (9a)$$

$$\square\Phi - \xi R\Phi = \frac{dU(\Phi)}{d\Phi}, \quad (9b)$$

where the higher-order contribution $K_{\mu\nu}$ and the non-minimally coupled energy-momentum tensor $T_{\mu\nu}$ are defined by

$$K_{\mu\nu} = 2\square R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\square + \nabla_\mu \nabla_\nu - 9R_{\mu\nu})R - 8R_{\mu\alpha}R^\alpha{}_\nu + g_{\mu\nu} \left(3R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{13}{8}R^2 \right), \quad (9c)$$

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \nabla_\sigma \Phi \nabla^\sigma \Phi + U(\Phi) \right) + \xi (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu + G_{\mu\nu}) \Phi^2. \quad (9d)$$

In what follows, we will consider Lifshitz black holes within the following ansatz

$$ds^2 = -\frac{r^{2z}}{l^{2z}} f(r) dt^2 + \frac{l^2}{r^2} \frac{dr^2}{f(r)} + \frac{r^2}{l^2} d\varphi^2, \quad (10)$$

with coordinates ranges defined by $-\infty < t < \infty$, $0 < r < \infty$, and the angular variable $0 \leq \varphi < 2\pi l$. We start by reanalyzing one of the solutions obtained by some of the authors in Ref. [15], the single one characterized by having a nonvanishing Wald entropy and, therefore, suitable for our analysis. For the exponent $z=3$, the configurations of Ref. [15] only contain the vacuum black hole of NMG [7]; for this reason, we later concentrate on this value of the exponent and exhibit nonminimally dressed Lifshitz black holes also in this case.

A. Nonminimally dressed black holes for generic z

The following family of Lifshitz black hole solutions was found in Ref. [15]

$$ds^2 = -\frac{r^{2z}}{l^{2z}} \left[1 - M \left(\frac{l}{r} \right)^{\frac{z+1}{2}} \right] dt^2 + \frac{l^2}{r^2} \left[1 - M \left(\frac{l}{r} \right)^{\frac{z+1}{2}} \right]^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} d\varphi^2, \quad (11a)$$

$$\Phi(r) = \sqrt{\frac{(z-3)(9z^2 - 12z + 11)M}{2\kappa(z-1)(z^2 - 3z + 1)}} \left(\frac{l}{r} \right)^{\frac{z+1}{4}}, \quad (11b)$$

where the scalar field has the self-interaction

$$U(\Phi) = \frac{(z-1)(21z^3 - 13z^2 + 31z - 15)}{32l^2(9z^2 - 12z + 11)} \Phi^2 - \frac{(z-1)^3(z^2 - 3z + 1)(9z^2 - 12z + 19)\kappa}{32l^2(z-3)(9z^2 - 12z + 11)^2} \Phi^4, \quad (11c)$$

and the coupling constants are parametrized by

$$\begin{aligned}
 m^2 &= -\frac{z^2 - 3z + 1}{2l^2}, \\
 \lambda &= -\frac{z^2 + z + 1}{2l^2}, \\
 \xi &= \frac{3z^2 - 4z + 3}{2(9z^2 - 12z + 11)}. \quad (11d)
 \end{aligned}$$

Before proceeding with the computations of the Noether potential and the surface term in order to derive the mass, we would like to emphasize some aspects of this solution. First of all, because of the expression of the scalar field, this solution has no AdS limit $z = 1$. The other special value of the dynamical exponent is given by $z = 3$, for which the scalar field as well as the potential vanish identically and one ends with the vacuum black hole of NMG [7]. We notice from now that for this class of solution, as well as for the two other solutions derived below, the allowed potential always involves a mass term.

It is easy to see that this class of solution has a nonvanishing Wald entropy and a Hawking temperature given by

$$\mathcal{S}_W = -\frac{\pi^2(z+1)^2(3z-5)r_h}{2\kappa(z-1)(z^2-3z+1)}, \quad (12)$$

$$T = \frac{(z+1)r_h^z}{8\pi l^{z+1}}, \quad r_h = lM^{\frac{2}{z+1}}. \quad (13)$$

Let us now compute the mass through the quasilocal ADT formalism. For the timelike Killing vector $\xi^t = (1, 0, 0)$, and after some tedious but straightforward computations, the expressions for the Noether potential and the surface term are given by

$$\begin{aligned}
 \int_0^M dM \Theta^r &= \frac{(z+1)(9z^3 - 31z^2 + 31z - 25)M}{16\kappa l(z-1)(z^2-3z+1)} \left(\frac{r}{l}\right)^{\frac{z+1}{2}} \\
 &\quad - \frac{(z+1)(15z^3 - 60z^2 + 67z - 50)M^2}{32\kappa l(z-1)(z^2-3z+1)}, \\
 K^{rt} &= -\frac{(z+1)(9z^3 - 31z^2 + 31z - 25)M}{16\kappa l(z-1)(z^2-3z+1)} \left(\frac{r}{l}\right)^{\frac{z+1}{2}} \\
 &\quad + \frac{3(z+1)(z-3)(5z^2 - 6z + 5)M^2}{32\kappa l(z-1)(z^2-3z+1)}.
 \end{aligned}$$

This implies that the mass \mathcal{M} of the Lifshitz black hole solution (11) turns out to be

$$\mathcal{M} = -\frac{\pi(z+1)^2(3z-5)}{16\kappa(z-1)(z^2-3z+1)} \left(\frac{r_h}{l}\right)^{z+1}. \quad (14)$$

It is simple to verify that the black hole entropy (12) and the mass (14) satisfy the first law of black hole

TABLE I. Range of possibilities for the dynamical exponent z allowing positive mass black holes, $\mathcal{M} > 0$.

κ	Range of z
$\kappa > 0$	$1.7 \approx 5/3 < z < (3 + \sqrt{5})/2 \approx 2.6$
$\kappa < 0$	$2.6 \approx (3 + \sqrt{5})/2 < z \leq 3$

thermodynamics $d\mathcal{M} = Td\mathcal{S}_W$. In fact, they satisfy an anisotropic version of the Smarr formula

$$\mathcal{M} = \frac{T}{z+1} \mathcal{S}_W, \quad (15)$$

which stipulates that the mass \mathcal{M} as a function of the entropy \mathcal{S}_W is a homogeneous function of degree $z+1$ [26]. Notice that these nice properties are satisfied independently of the sign of the mass.

It is also interesting to note that for the vacuum case $z = 3$ [7], this expression of the mass coincides with the one derived in different papers using others formalisms [8,17,27,28], provided that the Einstein constant is taken negative $\kappa = -8\pi G$, i.e., by choosing the so-called “wrong” sign of NMG which turns tensor ghosts at the linearized level into unitary Fierz-Pauli massive excitations on maximally symmetric vacua [13]. Clearly, the range of the dynamical exponent z which ensures a positive mass strongly depends on the sign of the coupling constant κ . Imposing the positivity of the mass and the reality of the scalar field, the critical exponent z must be restricted according to Table I.

We now derive the corresponding soliton solution which exists for the same range of parameters and self-interacting potential than those of the black hole solution (11). This soliton solution turns out to have a dynamical exponent z^{-1} and a characteristic scale lz^{-1} which is a consequence of the two-dimensional isomorphism between the Lifshitz Lie algebras with dynamical exponents z and z^{-1} obtained by swapping the role of the Hamiltonian with the momentum generator [17]. We will present in detail the different steps in this case and only report the main results in the other two solutions. We first consider the Euclidean version of the Lifshitz black hole (11) obtained by the Wick rotation $t = i\tau$,

$$ds^2 = \frac{r^{2z}}{l^{2z}} f(r) d\tau^2 + \frac{l^2}{r^2 f(r)} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} d\varphi^2, \quad (16)$$

where the metric function $f(r)$ can be read from Eq. (11), and the static scalar field remains the same. In order to avoid conical singularities, the Euclidean time must be periodic with period $\beta = T^{-1}$, that is, $0 \leq \tau < \beta$ and the angle keeps being identified as $0 \leq \varphi < 2\pi l$. Under the Euclidean diffeomorphism defined by

$$(\tau, r, \varphi) \mapsto \left(\bar{\tau} = \left(\frac{2\pi l}{\beta} \right)^{\frac{1}{z}} \varphi, \bar{r} = \frac{\beta}{2\pi z} \left(\frac{r}{l} \right)^z, \bar{\varphi} = \frac{2\pi l}{\beta} \tau \right), \quad (17)$$

the line element (16) becomes

$$ds^2 = \left(\frac{z\bar{r}}{l} \right)^{\frac{2}{z}} d\bar{\tau}^2 + \frac{l^2}{z^2 \bar{r}^2 F(\bar{r})} d\bar{r}^2 + \frac{z^2 \bar{r}^2}{l^2} F(\bar{r}) d\bar{\varphi}^2, \quad (18)$$

$$F(\bar{r}) = 1 - \bar{M} \left(\frac{l}{z\bar{r}} \right)^{\frac{z+1}{2z}}, \quad \bar{M} = \left(\frac{4}{z+1} \right)^{\frac{z+1}{2z}};$$

i.e., the Euclidean Lifshitz black hole is diffeomorphic to another asymptotically Lifshitz solution with dynamical exponent z^{-1} , scale lz^{-1} , and temperature

$$\bar{\beta} = (2\pi l)^{1+\frac{1}{z}} \beta^{-\frac{1}{z}}. \quad (19)$$

It is, in fact, a soliton; its regular character is not manifest in these coordinates which have the advantage of exposing the Lifshitz asymptotic behavior with exponent z^{-1} and scale lz^{-1} . Finally, the corresponding Lorentzian soliton obtained through $\bar{\tau} = i\bar{t}$ reads

$$ds^2 = - \left(\frac{z\bar{r}}{l} \right)^{\frac{2}{z}} d\bar{t}^2 + \frac{l^2}{z^2 \bar{r}^2 F(\bar{r})} d\bar{r}^2 + \frac{z^2 \bar{r}^2}{l^2} F(\bar{r}) d\bar{\varphi}^2, \quad (20a)$$

$$\Phi(\bar{r}) = \sqrt{\frac{(z-3)(9z^2 - 12z + 11)\bar{M}}{2\kappa(z-1)(z^2 - 3z + 1)}} \left(\frac{l}{z\bar{r}} \right)^{\frac{z+1}{4z}}. \quad (20b)$$

Now promoting the fixed constant to a variable one, $\bar{M} \mapsto s\bar{M}$, we obtain a one-parameter family of local solutions which facilitates the computation of the mass along the same lines as before. Before proceeding with the computation of the mass, let us analyze this last point carefully. For the black hole solution, since the constant M is an integration constant, a parameter s with range $s \in [0, 1]$ could have been introduced in the solution via the change $M \mapsto sM$. This change is useful only for computing the mass, since in this case, the variation will be operated with the parameter s , and the surface term will be rather integrated as $\int_0^1 ds \Theta^r$. Nevertheless, the result is the same if one promotes the constant M as the moving parameter and integrating the surface term from 0 to M as we did previously. Now, for the counterpart soliton, one can start with the black hole solution parametrized in terms of s and operate the same diffeomorphism (17). The resulting soliton solution will correspond to the solution (20) with $\bar{M} \mapsto s\bar{M}$, and the integration of the surface term will be given by $\int_0^1 ds \Theta^{\bar{r}}$. However, as in the black hole case, the new variable constant \bar{M} can be used as the moving parameter, and the result is exactly the same. Hence, choosing the Killing vector as $\xi^{\bar{i}} = (1, 0, 0)$, the Noether potential and the surface term take the following form

$$\int_0^{\bar{M}} d\bar{M} \Theta^{\bar{r}} = \frac{(z+1)(9z^3 - 31z^2 + 31z - 25)\bar{M}}{16\kappa l(z-1)(z^2 - 3z + 1)} \left(\frac{z\bar{r}}{l} \right)^{\frac{z+1}{2z}} - \frac{(z+1)(15z^3 - 60z^2 + 67z - 50)\bar{M}^2}{32\kappa l(z-1)(z^2 - 3z + 1)},$$

$$K^{\bar{r}\bar{i}} = \frac{(z+1)(9z^3 - 31z^2 + 31z - 25)\bar{M}}{16\kappa l(z-1)(z^2 - 3z + 1)} \times \left[\bar{M} - \left(\frac{z\bar{r}}{l} \right)^{\frac{z+1}{2z}} \right],$$

giving a unique value for the mass of the Lifshitz soliton, independent of any integration constant, as expected,

$$\mathcal{M}_{\text{sol}} = \frac{\pi z(3z-5)}{\kappa(z-1)(z^2-3z+1)} \left(\frac{z+1}{4} \right)^{\frac{z+1}{z}}. \quad (21)$$

It is straightforward to check that the mass of the soliton and the mass of the black hole have opposite signs (14), as expected. As long as the mass of the soliton is negative $\mathcal{M}_{\text{sol}} < 0$ (see Table I), the holographic picture unveiled in Ref. [17] applies: the semiclassical entropy of the Lifshitz black hole (11) can be understood from the asymptotic growth of the number of states of a 1 + 1 nonrelativistic field theory with the ground state corresponding in the bulk to the soliton (20). This gives rise to the anisotropic generalization of the Cardy formula (8), which after evaluation, perfectly coincides with the Wald formula (12)

$$\mathcal{S}_W = \mathcal{S}_C. \quad (22)$$

We would like to emphasize that the bulk semiclassical derivation of Ref. [17] is also applicable to negative mass black holes (positive mass solitons), which as we already show are compatible with the first law. In this case, the anisotropic formula involves the absolute values of the masses and consequently with the first law produces a negative entropy; i.e., a general formula would be

$$\mathcal{S}_C = \epsilon 2\pi l(z+1) \left[\left(\frac{|\mathcal{M}_{\text{sol}}|}{z} \right)^z |\mathcal{M}| \right]^{\frac{1}{z+1}}, \quad (23)$$

where $\epsilon = \pm 1$ corresponds to the sign of the black hole mass. Obviously, for $\epsilon = -1$, a holographic interpretation makes no sense; even the mere existence of a thermodynamical one can be challenged.

Moreover, for the vacuum dynamical exponent $z = 3$ and with $\kappa = -8\pi G$, the soliton mass (21) becomes $\mathcal{M}_{\text{sol}} = -3/(4G)$, which precisely corresponds to the mass of the vacuum gravitational soliton found in [17]. In the following sections, we exhibit new nonminimally dressed Lifshitz solutions for the same exponent $z = 3$, and since the involved steps are similar, only the important results are reported.

B. Nonminimally dressed black holes for $z = 3$

For dynamical exponent $z = 3$, a new family of Lifshitz black hole solutions is presented:

$$ds^2 = -\frac{r^6}{l^6} \left(1 - \frac{Ml^4}{r^4}\right) dt^2 + \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{Ml^4}{r^4}\right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} d\varphi^2, \quad (24a)$$

$$\Phi(r) = \sqrt{\frac{M}{\kappa(2 - 13\xi)} \frac{l^2}{r^2}}. \quad (24b)$$

This configuration is supported by the self-interacting potential

$$U(\Phi) = -\frac{2 - 13\xi}{2l^2} [2\Phi^2 + (2 - \xi)\kappa\Phi^4], \quad (24c)$$

where the nonminimal coupling parameter ξ is not restricted *a priori*, and the remaining coupling constants are related as in vacuum

$$\frac{\lambda}{13} = m^2 = -\frac{1}{2l^2}. \quad (24d)$$

As before, choosing the Killing vector $\xi^t = (1, 0, 0)$, the Noether potential and the surface term are calculated as

$$\int_0^M dM \Theta^r = -\frac{2(4\xi - 1)M^2 l^3}{\kappa(13\xi - 2)r^4} + \frac{(104\xi - 17)M}{\kappa l(13\xi - 2)},$$

$$K^{rt} = \frac{2(4\xi - 1)M^2 l^3}{\kappa(13\xi - 2)r^4} - \frac{2(68\xi - 11)M}{\kappa l(13\xi - 2)},$$

from which we obtain the mass of the Lifshitz black hole (24) as

$$\mathcal{M} = -\frac{2\pi(32\xi - 5)}{\kappa(13\xi - 2)} \left(\frac{r_h}{l}\right)^4. \quad (25)$$

It is easy to see that this expression for the mass satisfies the first law, since the related Wald entropy and temperature are expressed by

$$\mathcal{S}_W = -\frac{8\pi^2(32\xi - 5)r_h}{\kappa(13\xi - 2)}, \quad (26)$$

$$T = \frac{r_h^3}{\pi l^4}, \quad r_h = lM^{1/4}, \quad (27)$$

which is also compatible with the Smarr formula (15) for $z = 3$. The possible values for the nonminimal coupling parameter warranting the existence of the solution and from them those allowing positive mass are all summarized in Table II.

TABLE II. Range of possibilities for the nonminimal coupling parameter ξ .

κ	Range of ξ	$\mathcal{M} > 0$
$\kappa > 0$	$\xi < 2/13 \approx 0.154$	\emptyset
$\kappa < 0$	$\xi > 2/13 \approx 0.154$	$\xi > 5/32 \approx 0.156$

As in the previous case, operating the same diffeomorphism (17) with $z = 3$ on the Euclidean version of the solution (24), we obtain a Lifshitz soliton whose Lorentzian counterpart is

$$ds^2 = -\left(\frac{3\bar{r}}{l}\right)^{2/3} d\bar{t}^2 + \frac{l^2}{9\bar{r}^2} \left[1 - \bar{M} \left(\frac{l}{3\bar{r}}\right)^{4/3}\right]^{-1} d\bar{r}^2$$

$$+ \frac{9\bar{r}^2}{l^2} \left[1 - \bar{M} \left(\frac{l}{3\bar{r}}\right)^{4/3}\right] d\bar{\varphi}^2, \quad (28a)$$

$$\Phi(\bar{r}) = \sqrt{\frac{\bar{M}}{\kappa(2 - 13\xi)} \left(\frac{l}{3\bar{r}}\right)^{2/3}}, \quad \bar{M} = 2^{-4/3}. \quad (28b)$$

Once again, introducing a one-parameter family of locally equivalent solutions via $\bar{M} \mapsto s\bar{M}$, the Noether potential and the surface term are obtained as

$$\int_0^{\bar{M}} d\bar{M} \Theta^{\bar{r}} = -\frac{2(4\xi - 1)\bar{M}^2}{\kappa l(13\xi - 2)} \left(\frac{l}{3\bar{r}}\right)^{4/3} + \frac{(104\xi - 17)\bar{M}}{\kappa l(13\xi - 2)},$$

$$K^{\bar{r}\bar{t}} = \frac{2(4\xi - 1)\bar{M}^2}{\kappa l(13\xi - 2)} \left(\frac{l}{3\bar{r}}\right)^{4/3} - \frac{2(4\xi - 1)\bar{M}}{\kappa l(13\xi - 2)},$$

which, in turn, implies the following fixed mass for the soliton (28):

$$\mathcal{M}_{\text{sol}} = \frac{3\pi(32\xi - 5)}{2^{1/3}\kappa(13\xi - 2)}. \quad (29)$$

For $\xi > 5/32$ and $\kappa < 0$, it is straightforward to check that the generalized Cardy formula (8) fits perfectly with the expressions of the masses of the Lifshitz black hole (25), its soliton counterpart (29), and the Wald entropy (26).

Here again, the cases with negative black hole masses, that can be inferred from Table II, i.e., $\xi < 2/13$ for $\kappa > 0$ and $2/13 < \xi < 5/32$ for $\kappa < 0$, are compatible with the first law, the Smarr formula (15), and its entropy can be rewritten *à la* Cardy according to the general formula (23) without further interpretation. In fact, for one of these nonminimal couplings, namely, $\xi = 3/20 < 2/13$ with $\kappa > 0$, the solution can be improved by generalizing the self-interaction with the addition of a cubic contribution. The result is a sort of rigid dressing of the vacuum $z = 3$ black hole [7].

C. Dressing the vacuum $z = 3$ black hole for $\xi = 3/20$

In the scenario where the nonminimal coupling takes the value $\xi = 3/20$ and $\kappa > 0$, the solution (24) is improved to

$$ds^2 = -\frac{r^6}{l^6} \left(1 - \frac{\alpha\sqrt{M}l^2}{r^2} - \frac{Ml^4}{r^4} \right) dt^2 + \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha\sqrt{M}l^2}{r^2} - \frac{Ml^4}{r^4} \right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} d\varphi^2, \quad (30a)$$

$$\Phi(r) = \sqrt{\frac{20M}{\kappa}} \frac{l^2}{r^2}, \quad (30b)$$

provided that the self-interaction potential is generalized as

$$U(\Phi) = -\frac{1}{20l^2} \Phi^2 - \frac{\alpha\sqrt{\kappa}}{5\sqrt{5}l^2} \Phi^3 - \frac{37\kappa}{800l^2} \Phi^4, \quad (30c)$$

with no restrictions in the cubic coupling constant α and the remaining coupling constants fixed as in (24d). Additionally to the $\alpha = 0$ limit, where we consistently recover the black hole solution (24) for $\xi = 3/20$, this solution allows another nontrivial limit: for $M \rightarrow 0$ and $\alpha \rightarrow \infty$ keeping fixed the quantity $M_v = \alpha\sqrt{M}$ this solution becomes just the vacuum $z = 3$ black hole [7] with integration constant M_v . This solution can be interpreted as a sort of rigid dressing of the vacuum $z = 3$ black hole by a self-interacting scalar field with nonminimal coupling $\xi = 3/20$.

Calculating the Wald entropy and temperature of this black hole gives

$$S_W = -\frac{32\pi^2 \sqrt{\alpha^2 + 4} r_h}{\kappa(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4})}, \quad (31)$$

$$T = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4} r_h^3}{\pi l^4 (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4})}, \quad r_h^2 = \frac{l^2 \sqrt{M}}{2} (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}). \quad (32)$$

For the same timelike Killing vector, the expressions of the Noether potential and the surface term read

$$\int_0^M dM \Theta^r = \frac{4\alpha\sqrt{M}r^2}{\kappa l^3} - \frac{(\alpha^2 - 28)M}{\kappa l} - \frac{20l\alpha M^{3/2}}{\kappa r^2} - \frac{16l^3 M^2}{\kappa r^4},$$

$$K^{rt} = \frac{16l^3 M^2}{\kappa r^4} + \frac{20l\alpha M^{3/2}}{\kappa r^2} - \frac{32M}{\kappa l} - \frac{4\alpha\sqrt{M}r^2}{\kappa l^3},$$

giving the mass

$$\mathcal{M} = -\frac{8\pi(\alpha^2 + 4)}{\kappa(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4})^2} \left(\frac{r_h}{l} \right)^4. \quad (33)$$

As in the previous examples, the first law is satisfied as well as the Smarr formula. Notice that the cubic interaction does not enhance the sign of the mass, which remains negative as in the case with $\alpha = 0$.

Following the same lines of the two previous examples, the corresponding soliton reads

$$ds^2 = -\left(\frac{3\bar{r}}{l} \right)^{2/3} d\bar{t}^2 + \frac{l^2}{9\bar{r}^2} \frac{d\bar{r}^2}{F(\bar{r})} + \frac{9\bar{r}^2}{l^2} F(\bar{r}) d\bar{\varphi}^2, \quad (34a)$$

$$\Phi(\bar{r}) = \sqrt{\frac{20\bar{M}}{\kappa}} \left(\frac{l}{3\bar{r}} \right)^{2/3}, \quad (34b)$$

$$F(\bar{r}) = 1 - \alpha\sqrt{\bar{M}} \left(\frac{l}{3\bar{r}} \right)^{2/3} - \bar{M} \left(\frac{l}{3\bar{r}} \right)^{4/3}, \quad (34c)$$

$$\bar{M} = \left(\frac{2}{(\alpha^2 + 4)(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4})} \right)^{2/3}. \quad (34d)$$

In this case, the Noether potential and the surface term yield

$$\int_0^{\bar{M}} d\bar{M} \Theta^r = \frac{4\alpha\bar{M}^{1/2}}{\kappa l} \left(\frac{3\bar{r}}{l} \right)^{2/3} - \frac{(\alpha^2 - 28)\bar{M}}{\kappa l} - \frac{20\alpha\bar{M}^{3/2}}{\kappa l} \left(\frac{l}{3\bar{r}} \right)^{2/3} - \frac{16\bar{M}^2}{\kappa l} \left(\frac{l}{3\bar{r}} \right)^{4/3},$$

$$K^{rt} = -\frac{4\alpha\bar{M}^{1/2}}{\kappa l} \left(\frac{3\bar{r}}{l} \right)^{2/3} + \frac{4(\alpha^2 - 4)\bar{M}}{\kappa l} + \frac{20\alpha\bar{M}^{3/2}}{\kappa l} \left(\frac{l}{3\bar{r}} \right)^{2/3} + \frac{16\bar{M}^2}{\kappa l} \left(\frac{l}{3\bar{r}} \right)^{4/3}.$$

Finally, the rigid mass of the soliton is given by

$$\mathcal{M}_{\text{sol}} = \frac{12\pi(\alpha^2 + 4)^{1/3}}{2^{1/3}\kappa(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4})^{2/3}}, \quad (35)$$

which again allows us to rewrite the entropy (31) à la Cardy, providing an additional realization of the general formula (23).

III. CONCLUSIONS

In this paper, we confirm diverse general results concerning Lifshitz black holes in new concrete examples. More precisely, we are interested in identifying the mass of any reasonable asymptotically Lifshitz configuration. For this, we successfully test the quasilocal formulation of conserved charges recently proposed in [18,19] and based on the off-shell extension of the ADT formalism [20]. We focus our attention on the three-dimensional case where the advantage lies in the fact that our expressions for the

masses can be checked, on one hand, by using the first law of black hole thermodynamics and, on the other hand, by independently verifying the anisotropic generalization of the Cardy formula [17]. In order to achieve this task, we supplement the action of new massive gravity [13], which already supports a Lifshitz black hole in vacuum [7], with the one of a self-interacting scalar field nonminimally coupled to gravity. Some of the authors have proven that this is a useful strategy to enlarge the zoo of three-dimensional Lifshitz black holes [15]. We start by studying a family of solutions formerly found in Ref. [15] for the generic dynamical exponent z and characterized by a nonvanishing Wald entropy. Later, we concentrate in the exponent $z = 3$, relevant for the vacuum [7], but excluded from the nontrivial configurations exhibited in [15]. We find a new family of Lifshitz black holes for a generic value of the nonminimal coupling parameter ξ . Both families allow massive and quartic contributions in their self-interactions; however, the last solution is enhanced for $\xi = 3/20$ by turning on also a cubic contribution. We derive the black hole mass of each of these solutions through the generalization of the ADT formalism. The advantages of this method lie essentially in the fact that the expression for the mass can be obtained without assuming *a priori* any asymptotic conditions, without linearizing the equations of motion, and uniquely requiring to work out with the Lagrangian and the appropriate Killing vector. We compute the Wald entropy and check that the first law of black hole thermodynamics is valid in these three cases for the obtained mass. In fact, all of them satisfy an anisotropic version of the Smarr formula saying the mass is a homogeneous function of the entropy with degree $z + 1$. We operate a completely independent verification of the results of the method in three steps. We first derive the corresponding soliton solution for the three different classes of solutions; second, we compute their respective mass using the same quasilocal formulation of conserved charges. In order to apply the method in these cases, we use a one-parameter family of solutions locally equivalent to the solitons that properly have no integration constants and consistently obtain a fixed value for their masses. Finally, we confirm the validity of the anisotropic generalization of the Cardy formula (8) obtained from holographic arguments under the assumption that the soliton plays in the bulk the role of the ground state of a nonrelativistic boundary theory [17]. The family (11) was originally derived in Ref. [15] together with other two classes of Lifshitz black hole solutions. It is simple to verify that the two remaining classes have a zero Wald entropy. In the interest of performing a cross-check of the efficiency of the quasilocal method, we verify that the generalized ADT formalism yields to a zero mass in these cases, which again fits consistently with the first law and the other tested

formulas. In addition to the zero mass Lifshitz black holes produced in the studied theory, the three examples analyzed in the paper contain Lifshitz black holes with negative mass. It is important to emphasize that our checking of the first law is performed independently of the sign of the mass. The same happens for the Smarr formula. Regarding the anisotropic Cardy formula, we point out a subtlety for these cases, where, additionally, the mass of the corresponding soliton is positive. This invalidates the holographic interpretation provided in Ref. [15]; however, their semiclassical arguments still apply, which allow a general writing of their formula involving the absolute values of the masses and a sign correction in the entropy compatible with the first law. All the cases under study are compatible with this general formula (23). Returning to the Smarr formula, it would be interesting to derive the expression (15) by exploiting a scaling symmetry of the field equations and to derive the corresponding Noether conserved current. Evaluating this latter at infinity and at the horizon and equating these two expressions, the expectation is to obtain the anisotropic Smarr formula, generalizing the results of [29]. Finally, we would like to stress that it is worth to pursue testing of this method by obtaining the mass of higher-dimensional Lifshitz black holes. This task has been started in [19] for special cases of the vacuum configurations with square gravity corrections found in [9], and for which it is known that the naive extension of the ADT formalism does not work [22]. See, also, [30] for a different perspective based on the first law.

ACKNOWLEDGMENTS

This work has been partially funded by FONDECYT Grants No. 1121031, No. 1130423, No. 1141073, No. 11090281, No. 11121651, CONACYT Grants No. 175993 and No. 178346, and CONICYT Grants No. 80130051 and No. 79112034. This project was partially funded by Proyectos CONICYT, Research Council UK (RCUK) Grant No. DPI20140053. E. A.-B. is supported by the “Programa Atracción de Capital Humano Avanzado del Extranjero, MEC” from CONICYT. M. B.-G. is supported by the BECA DOCTORAL CONICYT Grant No. 21120271. F. C. is also supported by the Alexander von Humboldt Foundation. M. H. is also supported by the Departamento de Relaciones Internacionales “Programa Regional MATHAMSUD 13 MATH-05.” M. M. J.-A. received financial support from the “Programa de Becas Nacionales” of CONACYT, “Plataforma de Movilidad Estudiantil Alianza del Pacífico” of the Agencia de Cooperación Internacional de Chile, and “Apoyo para obtención de grado” of CINVESTAV. CECs is funded by the Chilean Government through the Centers of Excellence Base Financing Program of CONICYT.

- [1] J. M. Maldacena, *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999).
- [2] S. Kachru, X. Liu, and M. Mulligan, *Phys. Rev. D* **78**, 106005 (2008).
- [3] M. Taylor, [arXiv:0812.0530](https://arxiv.org/abs/0812.0530).
- [4] D.-W. Pang, *J. High Energy Phys.* 01 (2010) 116.
- [5] H. Maeda and G. Giribet, *J. High Energy Phys.* 11 (2011) 015.
- [6] A. Alvarez, E. Ayón-Beato, H. A. González, and M. Hassaine, *J. High Energy Phys.* 06 (2014) 041.
- [7] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet, and M. Hassaine, *Phys. Rev. D* **80**, 104029 (2009).
- [8] R. G. Cai, Y. Liu, and Y. W. Sun, *J. High Energy Phys.* 10 (2009) 080.
- [9] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet, and M. Hassaine, *J. High Energy Phys.* 04 (2010) 030.
- [10] J. Matulich and R. Troncoso, *J. High Energy Phys.* 10 (2011) 118.
- [11] J. Oliva and S. Ray, *Phys. Rev. D* **86**, 084014 (2012).
- [12] A. Giacomini, G. Giribet, M. Leston, J. Oliva, and S. Ray, *Phys. Rev. D* **85**, 124001 (2012).
- [13] E. A. Bergshoeff, O. Hohm, and P. K. Townsend, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 201301 (2009).
- [14] E. Ayón-Beato, M. Hassaine, and M. M. Juárez-Aubry, *Phys. Rev. D* **90**, 044026 (2014).
- [15] F. Correa, M. Hassaine, and J. Oliva, *Phys. Rev. D* **89**, 124005 (2014).
- [16] F. Correa, C. Martinez, and R. Troncoso, *J. High Energy Phys.* 01 (2011) 034; 02 (2012) 136; F. Correa, A. Faundez, and C. Martinez, *Phys. Rev. D* **87**, 027502 (2013).
- [17] H. A. Gonzalez, D. Tempo, and R. Troncoso, *J. High Energy Phys.* 11 (2011) 066.
- [18] W. Kim, S. Kulkarni, and S. H. Yi, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 081101 (2013).
- [19] Y. Gim, W. Kim, and S. H. Yi, *J. High Energy Phys.* 07 (2014) 002.
- [20] L. F. Abbott and S. Deser, *Nucl. Phys.* **B195**, 76 (1982); *Phys. Lett.* **116B**, 259 (1982); S. Deser and B. Tekin, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 101101 (2002); *Phys. Rev. D* **67**, 084009 (2003); C. Senturk, T. C. Sisman, and B. Tekin, *Phys. Rev. D* **86**, 124030 (2012).
- [21] R. L. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, *Gen. Relativ. Gravit.* **40**, 1997 (2008).
- [22] D. O. Devecioglu and O. Sarioglu, *Phys. Rev. D* **83**, 021503 (2011); **83**, 124041 (2011).
- [23] R. M. Wald and A. Zoupas, *Phys. Rev. D* **61**, 084027 (2000); G. Barnich and F. Brandt, *Nucl. Phys.* **B633**, 3 (2002); G. Barnich, *Classical Quantum Gravity* **20**, 3685 (2003); G. Barnich and G. Compere, *Phys. Rev. D* **71**, 044016 (2005); **73**, 029904(E) (2006); *J. Math. Phys.* **49**, 042901 (2008).
- [24] S. Hyun, J. Jeong, S. A. Park, and S. H. Yi, [arXiv:1410.1312](https://arxiv.org/abs/1410.1312).
- [25] R. M. Wald, *Phys. Rev. D* **48**, R3427 (1993); V. Iyer and R. M. Wald, *Phys. Rev. D* **50**, 846 (1994).
- [26] L. Smarr, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 71 (1973); **30**, 521(E) (1973).
- [27] O. Hohm and E. Tonni, *J. High Energy Phys.* 04 (2010) 093.
- [28] Y. S. Myung, Y. W. Kim, and Y. J. Park, *Eur. Phys. J. C* **70**, 335 (2010).
- [29] M. Banados and S. Theisen, *Phys. Rev. D* **72**, 064019 (2005).
- [30] Z. Y. Fan and H. Lu, [arXiv:1501.00006](https://arxiv.org/abs/1501.00006).

4.5. Agujeros negros asintóticamente Lifshitz en presencia de un campo eléctrico

Si consideramos teorías gravitatorias sin una fuente de materia, donde además de la acción de Einstein-Hilbert con una constante cosmológica Λ se incluyen las correcciones de curvaturas cuadráticas más generales en D -dimensiones, dadas en (4.2.22), las ecuaciones de movimiento son de la forma

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} = 0, \quad (4.5.1)$$

con $K_{\mu\nu}$ dado en (4.2.24). Esta teoría sostiene el espacio-tiempo de Lifshitz (4.0.2) mediante la siguiente parametrización de las constantes de acoplamiento [75] (luego de redefinir $\beta_1 := \beta_1 + \beta_3$, $\beta_2 := \beta_2 - 4\beta_3$ y fijar $l := 1$)

$$\Lambda = -\frac{1}{4} [2z^2 + (D-2)(2z+D-1) - 4(D-3)(D-4)z(z+D-2)\beta_3], \quad (4.5.2)$$

$$\beta_2 = \frac{1-2[2z^2 + (D-2)(2z+D-1)]\beta_1 - 4[z^2 - (D-2)z + 1]\beta_3}{2(z^2 + D - 2)}. \quad (4.5.3)$$

Mediante un proceso similar a lo realizado en la sección 3.3, a través de una transformación de Kerr-Schild sobre la métrica (4.0.2), el vector nulo y geodésico $k = dt - \frac{dr}{r^{z+1}}$ transforma el espacio-tiempo de Lifshitz de la forma $ds^2 = ds_L^2 + Mr^{2z}F(r)k \otimes k$, y la nueva métrica se convierte en

$$ds^2 = -r^{2z} \left(1 - MF(r)\right) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 \left(1 - MF(r)\right)} + r^2 \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2, \quad (4.5.4)$$

donde hemos definido una nueva coordenada temporal

$$dt \rightarrow dt - \frac{Mr^{2z}F(r)}{r^{3z+1}(1 - MF(r))} dr.$$

Aquí, M es una constante y $F(r)$ es la función métrica a determinar. Si trabajamos con las ecuaciones de movimiento (4.5.1) y la nueva métrica (4.5.4), obtendremos las tres familias de soluciones de agujeros negros asintóticamente Lifshitz descubiertas en [75]. No obstante, podemos incluir a la teoría anterior un campo de Maxwell lineal

$$S^{\text{Maxwell}}[g_{\mu\nu}, A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^D x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.5.5)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ corresponde al tensor de Maxwell y el vector potencial es de la forma $A_\mu dx^\mu = A_t(r) dt$. Esto implica que las nuevas ecuaciones de movimiento toman la forma

$$E_{\mu\nu} := G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} = 0, \quad (4.5.6)$$

donde

$$T_{\mu\nu}^{\text{Maxwell}} = \left[F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right], \quad (4.5.7)$$

además de

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (4.5.8)$$

y κ es una constante de acoplamiento. Asimismo, por medio de la métrica (4.5.4), la ecuación (4.5.8) se convierte en

$$F_{rt} = Q r^{z-D+1},$$

donde Q es una constante de integración.

Desde el punto de vista del formalismo cuasilocal, tenemos que tanto el término de superficie Θ^μ como el potencial de Noether $K^{\mu\nu}$ son dados por

$$\Theta^\mu(\delta g, \delta A) = \Theta_{\text{grav}}^\mu(\delta g) + \sqrt{-g} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \delta A_\nu, \quad K^{\mu\nu} = K_{\text{grav}}^{\mu\nu} - \sqrt{-g} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \xi^\sigma A_\sigma, \quad (4.5.9)$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}. \quad (4.5.10)$$

Por otro lado, los efectos de la transformación Kerr-Schild conllevan a expandir las ecuaciones de movimiento (4.5.6) de la forma

$$\begin{aligned} E_t^t &= M\Sigma_1 + M^2\Sigma_2 + \frac{\kappa Q^2}{2r^{2(D-2)}} = 0, \\ E_r^r &= M(\Sigma_1 - \Sigma_3) + M^2(\Sigma_2 + F\Sigma_3) + \frac{\kappa Q^2}{2r^{2(D-2)}} = 0, \\ E_i^i &= M(\Sigma_1 - \Sigma_4) + M^2(\Sigma_5 - F(\Sigma_1 - \Sigma_4)) - \frac{\kappa Q^2}{2r^{2(D-2)}} = 0, \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

donde por simplicidad hemos definido

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{i=0}^4 \sigma_{1i} r^i \frac{d^i F}{dr^i}, & \Sigma_2 &= F \left(\sum_{i=0}^4 \sigma_{2i} r^i \frac{d^i F}{dr^i} \right) + rF' \left(\sum_{i=1}^3 \psi_{2i} r^i \frac{d^i F}{dr^i} \right) + \omega_{22} r^4 (F'')^2, \\ \Sigma_3 &= \sum_{i=0}^4 \sigma_{3i} r^i \frac{d^i F}{dr^i}, & \Sigma_4 &= \sum_{i=0}^4 \sigma_{4i} r^i \frac{d^i F}{dr^i}, \\ \Sigma_5 &= F(\sigma_{50} F + \sigma_{52} r^2 F'') + rF' \left(\sum_{i=0}^3 \psi_{5i} r^i \frac{d^i F}{dr^i} \right) + \omega_{52} r^4 (F'')^2. \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Para ser lo más claro posible, los diferentes coeficientes σ_{ij} , ψ_{ij} y ω_{ij} son proporcionados en el Apéndice. De las dos primeras ecuaciones de (4.5.11) se tiene que $\Sigma_3 = 0$. Esto último corresponde a una ecuación diferencial de Cauchy de cuarto orden para la función métrica $F(r)$, cuya solución se puede expresar como

$$F(r) = \sum_{i=1}^4 \frac{C_i}{r^{\alpha_i}}, \quad (4.5.13)$$

donde los C_i 's son constantes de integración, mientras que los α_i 's son raíces del polinomio característico

$$\sigma_{34}\alpha_i^4 + (-\sigma_{33} + 6\sigma_{34})\alpha_i^3 + (\sigma_{32} - 3\sigma_{33} + 11\sigma_{34})\alpha_i^2 + (-\sigma_{31} + \sigma_{32} - 2\sigma_{33} + 6\sigma_{34})\alpha_i + \sigma_{30} = 0.$$

Adicionalmente, por medio de la combinación $E_t^t + E_i^i = 0$ y la ecuación $E_t^t = 0$, nos permiten concluir que solamente una de las constantes C_i es no nula y podemos mostrar la existencia de cuatro interesantes familias de agujeros negros cargados asintóticamente Lifshitz en dimensión D arbitraria, las cuales estudiaremos a continuación y corresponden a los resultados presentes en el artículo [4].

Thermodynamics of charged Lifshitz black holes with quadratic correctionsMoisés Bravo-Gaete^{*} and Mokhtar Hassaine[†]*Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, Casilla 747, Talca, Chile*

(Received 14 January 2015; published 16 March 2015)

In arbitrary dimension, we consider the Einstein-Maxwell Lagrangian supplemented by the more general quadratic-curvature corrections. For this model, we derive four classes of charged Lifshitz black hole solutions for which the metric function is shown to depend on a unique integration constant. The masses of these solutions are computed using the quasilocal formalism based on the relation established between the off-shell Abbott-Deser-Tekin and Noether potentials. Among these four solutions, three of them are interpreted as extremal in the sense that their masses vanish identically. For the last family of solutions, both the quasilocal mass and the electric charge are shown to depend on the integration constant. Finally, we verify that the first law of thermodynamics holds for each solution and a Smarr formula is also established for the four solutions.

DOI: 10.1103/PhysRevD.91.064038

PACS numbers: 04.70.Bw, 04.50.Kd

I. INTRODUCTION

During the last decade, there has been a certain interest in extending the ideas underlying the standard relativistic AdS/CFT correspondence [1] to nonrelativistic physics in order to gain a better understanding of condensed matter physics, and particularly to physical systems that exhibit a dynamical scaling near fixed points. These latter are characterized by an invariance under a rescaling symmetry with different weights between space and time that reads

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad \vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x}. \quad (1)$$

The constant z (which is called the dynamical exponent) reflects the anisotropic symmetry. In analogy with the anti-de Sitter (AdS) case, the gravity dual metric in D dimensions (also known as the Lifshitz metric [2]) is given by

$$ds_{\mathcal{L}}^2 = -\left(\frac{r}{l}\right)^{2z} dt^2 + \frac{l^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2, \quad (2)$$

and it is easy to see that the anisotropic scaling transformation (1) together with the rule $r \rightarrow \lambda^{-1} r$ act as an isometry for this metric.

Soon after the introduction of the Lifshitz background (2), it was realized that—in contrast with the standard AdS case ($z = 1$)—these metrics are not solutions of the vacuum Einstein equations, and they instead require the introduction of some matter source or the consideration of higher-order curvature terms [2]. Finite-temperature effects are introduced via Lifshitz black holes, i.e., black hole metrics whose asymptotic behavior reproduces the Lifshitz

background (2). A variety of relatively important Lifshitz black hole solutions have been reported in the literature. For example, for the three-dimensional new massive gravity theory introduced in Ref. [3], there exists a Lifshitz black hole solution with a dynamical exponent $z = 3$ [4]. Higher-dimensional generalizations of this vacuum solution have been derived in Ref. [5] for more general quadratic corrections of Einstein gravity. In four-dimensional conformal gravity, Lifshitz black holes were constructed for dynamical exponents $z = 0$ and $z = 4$ in Ref. [6], and their Maxwell electrically charged versions were recently studied in Ref. [7]. Other examples of charged Lifshitz black hole solutions have been obtained in the presence of Abelian sources [8,9], in the case of a Maxwell-Proca theory [10], or more generally for a non-linear electrodynamics source [11]. Scalar fields can also accommodate Lifshitz black hole metrics in the case of type IIB supergravity with a dynamical exponent $z = 3/2$ [12] or with a nonminimal coupling parameter (see Refs. [13] and [14]), or in the case of a particular truncation of Horndeski theory [15].

Although Lifshitz black holes can be found analytically and their temperature and entropy can be easily computed, the study of their thermodynamics remains a difficult task. Indeed, the definition of Lifshitz mass (because of the rather unconventional falloff behavior) is far less clear than that in the AdS case. Also, an important class of Lifshitz solutions have been obtained in the case of higher-derivative terms, which render difficult their linearization analysis. Recently, a novel way of obtaining quasilocal charges for black hole solutions of any diffeomorphism-invariant gravity theory was proposed in Refs. [16] and [17]. The main result of these two references is the fact that the off-shell Abbott-Deser-Tekin (ADT) potential [18–20] can be expressed in terms of the off-shell Noether potential, which is only built in the basis of the Lagrangian and the Killing vectors associated to the conserved charges

^{*}mbravog-at-inst-mat.otalca.cl[†]hassaine-at-inst-mat.otalca.cl

(without having to consider the linearization of the field equations). Another important feature of this method lies in the fact that it may apply for arbitrary asymptotic spacetimes, and not necessarily for asymptotically flat or AdS spacetimes. For example, this formalism has been shown to be effective in obtaining the correct mass of the $z = 3$ Lifshitz black hole solution of new massive gravity [4] (see also Ref. [17]). More recently, the authors of Ref. [14] have considered a model of new massive gravity in three dimensions with a nonminimal scalar field for which they obtained three classes of Lifshitz black hole solutions. The masses of these solutions computed within the quasilocal formalism fit perfectly with the first law of thermodynamics, and as an additional check they showed that these expressions for the masses are in accordance with the anisotropic Cardy formula [21] assuming that the ground state is the respective soliton [14].

In the present paper, we further explore this quasilocal formalism in the case of charged Lifshitz black holes. In arbitrary dimensions D , we consider the Einstein-Maxwell Lagrangian supplemented by a cosmological constant with the quadratic corrections built from the scalar curvature R , the Ricci tensor $R_{\mu\nu}$, and the Riemann tensor $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ as

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + \beta_1 R^2 + \beta_2 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} \\ &\quad + \beta_3 R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}) - \frac{1}{4} \int d^D x \sqrt{-g} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= \int d^D x \sqrt{-g} \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (3)$$

where $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ corresponds to the field strength of the Maxwell field, and the β_i are constants. The field equations obtained by varying the action (3) read

$$E_{\mu\nu} := G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} = 0, \quad (4a)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (4b)$$

where

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (4c)$$

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= (\beta_2 + 4\beta_3) \square R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (4\beta_1 + \beta_2) g_{\mu\nu} \square R \\ &\quad - (2\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3) \nabla_\mu \nabla_\nu R + 2\beta_3 R_{\mu\gamma\alpha\beta} R_\nu{}^{\gamma\alpha\beta} \\ &\quad + 2(\beta_2 + 2\beta_3) R_{\mu\alpha\beta\gamma} R^{\alpha\beta} - 4\beta_3 R_{\mu\alpha} R_\nu{}^\alpha + 2\beta_1 R R_{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\beta_1 R^2 + \beta_2 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \beta_3 R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}) g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4d)$$

We are interested in looking for charged black hole solutions of the field equations (4) with a purely electric ansatz, such that asymptotically the metric behaves like the

Lifshitz spacetime (2). In doing so, we opt for the following Lifshitz-type ansatz:

$$ds_D^2 = -\left(\frac{r}{l}\right)^{2z} f(r) dt^2 + \frac{l^2}{r^2} \frac{dr^2}{f(r)} + \frac{r^2}{l^2} \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2, \quad (5)$$

where we require the unknown metric function $f(r)$ to satisfy $\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r) = 1$, and the Maxwell potential to be of the form $A_\mu dx^\mu = A_t(r) dt$.

The paper is organized as follows. In the next section, we show that the metric function within our ansatz (5) behaves generically as $f(r) = 1 - M(\frac{l}{r})^\chi$, where M is an integration constant and χ is a positive constant that always depends on the dimension D . Using this result together with the integration of the Maxwell equation (4b), we write down the generic formula for the quasilocal mass associated to the Killing vector $\xi^\mu \partial_\mu = \partial_t$. In Sec. III, we exhibit explicitly the four families of charged Lifshitz black hole solutions, and for each of them we compute the mass, the electric charge, and the entropy, and we verify that the first law of thermodynamics holds in each case. In Sec. IV we discuss the lower-dimensional cases ($D = 3$ and $D = 4$), and in the last section we report our conclusions. Finally, an appendix is added for clarity, where we give some of the formulas needed to derive our results.

II. QUASILOCAL MASS, ENTROPY, AND ELECTRIC CHARGE

In this section, we will show that the metric function within our ansatz (5) behaves generically as $f(r) = 1 - M(\frac{l}{r})^\chi$, and with this result [together with the integration of the Maxwell equation (4b)] we will express in a generic way the expression of the quasilocal mass. The details concerning the explicit solutions will be given in the next section.

Considering the metric ansatz (5), the following combination of the Einstein equations [Eq. (4a)] yields a fourth-order Cauchy differential equation for the unknown metric function $f(r)$ [which is given by Eq. (A1) in the Appendix]:

$$-\frac{l^4}{f(r)} (E_t^t - E_r^r) = 0. \quad (6)$$

The solution of $f(r)$ is generically expressed as

$$f(r) = 1 - \sum_{i=1}^4 M_i \left(\frac{l}{r}\right)^{\alpha_i}, \quad (7)$$

where the M_i are some integration constants and the α_i are the roots of the characteristic polynomial. Before following this generic analysis, we would like to stress two things. First, there also exists the possibility of having multiple roots for which the metric function $f(r)$ will involve logarithmic contributions, but in these cases the remaining

independent Einstein equations will force all of the integration constants associated with the logarithmic contributions to be zero. Second, in the special case where the quadratic corrections yield the Gauss-Bonnet density (namely, $\beta_1 = -\frac{1}{4}\beta_2 = \beta_3$), the fourth-order Euler equation reduces to the constraint

$$\frac{f(r)[\beta_2(D-3)(D-4)f(r) + 2l^2](z-1)(D-2)}{l^4} = 0,$$

which in turns implies that the dynamical exponent must be restricted to $z = 1$. In this particular case, the charged black hole solutions are asymptotically AdS, and these solutions have already been studied in Refs. [22–24]. However, in our case we are only interested in the purely Lifshitz black holes, which means $z \neq 1$. Following our analysis (and after a tedious computation), one can show that the combination of the Einstein equations $E'_t + E_i = 0$ forces only one of the integration constants of the metric function (7) to be nonzero and conveniently fixes the constants β_1, β_3 , and Λ . This means that the metric solution can be generically written as

$$f(r) = 1 - M \left(\frac{l}{r}\right)^\chi, \quad (8)$$

where M is an integration constant, and the combination $E'_t + E_i = 0$ is simply given by

$$(2 - 2z + \chi)M^2(\chi + 2 - D)(-z + 2 - D + 2\chi) \times \Xi_1 \left(\frac{r}{l}\right)^{-2\chi} + (-2D + 4 + \chi)M\Xi_2 \left(\frac{r}{l}\right)^{-\chi} = 0, \quad (9)$$

where Ξ_1 and Ξ_2 are constants whose expressions are given in the Appendix. Finally, the remaining independent Einstein equation $E'_t = 0$ can be cast in the form

$$E'_t = -\frac{1}{2}(D-2)(2-2z+\chi)(2\chi-D+2-z) \times \Xi_1 M^2 \left(\frac{r}{l}\right)^{-2\chi} - (D-2)\Xi_2 M \left(\frac{r}{l}\right)^{-\chi} + \frac{1}{2}\kappa Q^2 \left(\frac{r}{l}\right)^{-2(D-2)} = 0, \quad (10)$$

where we have explicitly used the expression for the purely electrical Maxwell field solution of Eq. (4b),

$$F_{rt} = Q \left(\frac{r}{l}\right)^{z-D+1}, \quad (11)$$

where Q is an integration constant. From Eqs. (9) and (10), it is now simple to see that there exist four classes of

solutions for the ansatz metric (5) with a metric function given by Eq. (8), and these are summarized as follows.

Family	Q	χ	z	Extra
A	$\propto M$	$D-2$	Free	$\Xi_2 = 0$
B	$\propto \sqrt{M}$	$2(D-2)$	Free	$\Xi_1 = 0$
C	$\propto \sqrt{M}$	$2(D-2)$	$D-1$	
D	$\propto \sqrt{M}$	$2(D-2)$	$3(D-2)$	

The details concerning these four solutions will be reported in the next section.

We are now in a position to write down the expression for the quasilocal mass for the generic solutions described by the ansatz metric (5) with a metric function given by Eq. (8), together with the form of the Maxwell field given by Eq. (11). Interestingly enough, we will show that these four classes of solutions may also emerge from the expression for the quasilocal mass.

As stated in the Introduction, the main result of Refs. [16,17] lies in the following relation:

$$\sqrt{-g}Q_{\text{ADT}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta K^{\mu\nu} - \xi^{[\mu}\Theta^{\nu]},$$

which allows one to relate the off-shell ADT potential $Q_{\text{ADT}}^{\mu\nu}$ [18,19] to the off-shell Noether potential $K^{\mu\nu}$. In this relation, $\xi^\mu \partial_\mu$ denotes the Killing vector field which in our case is ∂_t , and Θ^μ represents a surface term arising from the variation of the action. For the model considered here, these expressions are given by

$$\Theta^\mu(\delta g, \delta A) = 2\sqrt{-g}[P^{\mu(\alpha\beta)\gamma}\nabla_\gamma\delta g_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta}\nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\delta A_\nu], \quad (13)$$

$$K^{\mu\nu} = \sqrt{-g}[2P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\rho\xi_\sigma - 4\xi_\sigma\nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma} + F^{\mu\nu}\xi^\sigma A_\sigma], \quad (14)$$

with $P^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}}$, where \mathcal{L} is the Lagrangian defined in Eq. (3). As shown before, the solution depends continuously on a constant M , and hence in order to define the conserved charge in the interior region and not in the asymptotic region a parameter s with range $s \in [0, 1]$ is introduced as sM . The advantage of this redefinition lies in the fact that it allows us to interpolate between the free-parameter solution $s = 0$ and the solution with $s = 1$. In doing so, the quasilocal charge is defined as

$$\mathcal{M}(\xi) = \int_{\mathcal{B}} d^{D-2}x_{\mu\nu} \left(\Delta K^{\mu\nu}(\xi) - 2\xi^{[\mu} \int_0^1 ds \Theta^{\nu]}(\xi|s) \right), \quad (15)$$

where $\Delta K^{\mu\nu}(\xi) \equiv K_{s=1}^{\mu\nu}(\xi) - K_{s=0}^{\mu\nu}(\xi)$ denotes the variation of the Noether potential from the vacuum solution, and

$d^{D-2}x_{\mu\nu}$ represents the integration over the compact codimension-two subspace. In the present case, this last expression becomes

$$\mathcal{M}(\xi) = \left[\frac{M^2 \Psi_1}{2\kappa} \frac{r^{D-2+z-2\chi}}{l^{D+1+z-2\chi}} + \frac{M \Psi_2}{2\kappa} \frac{r^{D-2+z-\chi}}{l^{D+1+z-\chi}} - \frac{Q^2}{2(z-D+2)} \frac{r^{z-D+2}}{l^{z-D+1}} \right] \Omega_{D-2}, \quad (16)$$

where Ψ_1 and Ψ_2 are constants (reported in the Appendix) and Ω_{D-2} represents the finite contribution of the $(D-2)$ -dimensional integration over the planar variables. Note that the value $z = D - 2$ must be excluded from this analysis; however, in this case one can show that the solution becomes uncharged ($Q = 0$) and reduces to the vacuum solution reported in Ref. [5]. It is clear that the expression on the right-hand side must not depend on the radial coordinate r and this corresponds precisely to the four classes of solutions (12), as we will show explicitly in the next section.

Since we will be interested in the thermodynamics properties of the solutions, the entropy of the solutions will be computed through the Wald formula,

$$S_W = -2\pi\Omega_{D-2} \left(\frac{r_h}{l} \right)^{D-2} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta R_{abcd}} \varepsilon_{ab} \varepsilon_{cd} \right]_{r=r_h}, \quad (17)$$

where r_h denotes the location of the horizon. On the other hand, the Hawking temperature reads

$$T = \frac{r_h^{z+1}}{4\pi l^{z+1}} f'(r_h). \quad (18)$$

In order to see that our expressions for the masses obey the first law of thermodynamics, we also need the expression for the electric charge \mathcal{Q} , which is generically given by

$$\mathcal{Q} = \int d\Omega_{D-2} \left(\frac{r}{l} \right)^{D-1-z} F_{rt}. \quad (19)$$

III. FOUR CLASSES OF CHARGED LIFSHITZ BLACK HOLE SOLUTIONS

We now report in detail the four classes of charged Lifshitz black hole solutions (12). In each case, we compute the mass \mathcal{M} through Eq. (15), the entropy S_W [Eq. (17)], the temperature T , the electric charge \mathcal{Q} , and the electric potential $\Phi = -A(r_h)$. Having these quantities in hand, we verify that the first law of thermodynamics,

$$d\mathcal{M} = TdS_W + \Phi d\mathcal{Q}, \quad (20)$$

holds for each of the solutions. We show that among our four solutions, three of them have the peculiarity that the mass vanishes identically; these latter solutions can be interpreted as extremal charged Lifshitz black holes, similar to those recently studied in Ref. [25].

A. Extremal charged solution with arbitrary dynamical exponent

The first solution holds for an arbitrary value of the dynamical exponent, and is given by

$$\begin{aligned} ds_D^2 &= -\left(\frac{r}{l} \right)^{2z} f(r) dt^2 + \frac{l^2}{r^2} \frac{dr^2}{f(r)} + \frac{r^2}{l^2} \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2, \\ f(r) &= 1 - M \left(\frac{l}{r} \right)^{D-2}, \\ F_{rt}(r) &= M \Sigma_1 \left(\frac{r}{l} \right)^{z-D+1}, \end{aligned} \quad (21)$$

where

$$\begin{aligned} (\Sigma_1)^2 &= \{(2z-D)[2z^2 - (z-1)(D-2)] \\ &\quad \times (z-D+2)(z+D-2)(D-2)\} / [4\kappa l^2 z P_3(z)], \end{aligned}$$

and

$$P_3(z) = 2z^3 - 2z^2(2D-3) - (D-2)[z(D-9) + 4].$$

In this case, the coupling constants of the theory are related as follows:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= l^2 [2(D-2)z^5 - (3D^2 - 4D - 8)z^4 + (10D^2 - 36D + 28)z^3 - (D-2) \times (D^2 + 11D - 32)z^2 \\ &\quad + (2D-5)(D-2) \times (D+2)z - 2(D-2)^3] / [2z^2(D-2)(D-3)(D-4)P_3(z)], \\ \beta_2 &= l^2 \{ [2z^2 - z(D-2) + D-2] [-2(D-2)z^3 + Dz(z-1)(3D-7) + (D-2)(D^2 - 3D + 4)] \} / \\ &\quad [(D-2)(D-4)(D-3)z^2 P_3(z)], \\ \beta_3 &= \frac{l^2 [2z^2 - (z-1)(D-2)]}{4(D-3)(D-4)z^2}, \\ \Lambda &= -\frac{(D-2)[z^2 + (2z-1)(D-2)]}{4zl^2}. \end{aligned}$$

Plugging this solution into Eq. (16) implies that the mass \mathcal{M} vanishes identically. On the other hand, the Wald entropy is nonzero and given by

$$S_W = \frac{4\pi\Omega_{D-2}(\Sigma_1)^2 r_h^{D-2}}{(z-D+2)(D-2)l^{D-4}}, \quad (22)$$

while the Hawking temperature is

$$T = \frac{(D-2)r_h^z}{4\pi l^{z+1}}. \quad (23)$$

The charge and the electric potential read, respectively,

$$\mathcal{Q} = \Sigma_1 \Omega_{D-2} \left(\frac{r_h}{l}\right)^{D-2}, \quad (24)$$

and

$$\Phi = -A(r_h) = -\frac{\Sigma_1 r_h^z}{(z-D+2)l^{z-1}}. \quad (25)$$

It is straightforward to check that in spite of having zero mass, the first law (20) still holds in the form

$$d\mathcal{M} = 0 = TdS_W + \Phi d\mathcal{Q},$$

and hence this solution can be interpreted as an extremal charged Lifshitz black hole.

B. Second extremal family with an arbitrary z

A second extremal family of solutions is found when $\chi = 2(D-2)$ and for an arbitrary value of the dynamical exponent,

$$ds_D^2 = -\left(\frac{r}{l}\right)^{2z} f(r) dt^2 + \frac{l^2}{r^2} \frac{dr^2}{f(r)} + \frac{r^2}{l^2} \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2, \\ f(r) = 1 - M \left(\frac{l}{r}\right)^{2(D-2)}, \\ F_{rt} = \sqrt{M} \Sigma_2 \left(\frac{r}{l}\right)^{z-D+1}, \quad (26)$$

where

$$(\Sigma_2)^2 = \{[2z^2 + (D-2)(D-1-4z)] \\ \times (D-2)(z+2D-4)(z-D+2)\} / [2\kappa l^2 z P_2(z)],$$

with

$$P_2(z) = z^2 - (D-2)(D-4+2z).$$

The space of parameters is defined by

$$\beta_1 = l^2 [2(D-2)z^4 + (25D-7D^2-20)z^3 + 2(D-2)(3D^2-8D+3)z^2 - (D-2) \\ \times (3D^2-5D-4)z - 2(D-4)(D-2)^3] / [4(D-2)z(D-3)(D-4)(z-D+2)P_2(z)], \\ \beta_2 = l^2 \{[-4(D-2)z^2 + (20-25D+7D^2)z + 2(D-1)(D-2)(D-4)] \\ \times [2z^2 + (D-2)(D-1-4z)]\} / [4(D-4)z(z-D+2)(D-3)(D-2)P_2(z)], \\ \beta_3 = \frac{l^2 [2z^2 + (D-2)(D-4z-1)]}{4(D-3)(D-4)(z-D+2)z}, \\ \Lambda = \frac{(D-2)[-z^2 + (D-2)(D-1-z)]}{2l^2(z-D+2)}.$$

Note that this solution has been recently reported in Ref. [7]. As before, the mass vanishes, while the other relevant thermodynamical quantities are given by

$$S_W = \frac{2\pi\Omega_{D-2}(\Sigma_2)^2 r_h^{D-2}}{(D-2)(z-D+2)l^{D-4}}, \quad (27a)$$

$$T = \frac{(D-2)r_h^z}{2\pi l^{z+1}}, \quad (27b)$$

$$\mathcal{Q} = \Sigma_2 \Omega_{D-2} \left(\frac{r_h}{l}\right)^{D-2}, \quad (27c)$$

$$\Phi = -\frac{\Sigma_2 r_h^z}{(z-D+2)l^{z-1}}, \quad (27d)$$

in accordance with the results obtained in Ref. [7] via the Wald formalism. The extremal character of the charged solution is encoded in the relation $d\mathcal{M}=0=TdS_W+\Phi d\mathcal{Q}$.

C. Third extremal solution with fixed $z = (D-1)$

A third family of solutions is found when the dynamical exponent takes the value $z = (D-1)$, and is given by

$$ds_D^2 = -\left(\frac{r}{l}\right)^{2(D-1)} f(r) dt^2 + \frac{l^2}{r^2} \frac{dr^2}{f(r)} + \frac{r^2}{l^2} \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2,$$

$$f(r) = 1 - M \left(\frac{l}{r}\right)^{2(D-2)},$$

$$F_{rt} = \sqrt{M} \Sigma_3, \tag{28}$$

where

$$(\Sigma_3)^2 = \{(D-2)[(5D^3 - 20D^2 + 17D + 4)l^2 - 2(4D-7)(D-3)(D-2)^2\beta_2]\} / [\kappa l^4(5D-8)(D-3)],$$

and the values of the coupling constants are given by

$$\beta_1 = \frac{(2D-3)l^2 - 2(D-3)(D^2 - D - 1)\beta_2}{2(D-1)(D-3)(5D-8)},$$

$$\beta_3 = -\frac{l^2}{4(D-3)},$$

$$\Lambda = -\frac{(D-2)(D-1)^2}{2l^2}.$$

Note that in this case the value of β_2 is not fixed, and this is the reason why the solution differs from the previous one when $z = D - 1$. The Wald entropy and the Hawking temperature are given by

$$S_W = \frac{2\pi\Omega_{D-2}(\Sigma_3)^2 r_h^{D-2}}{(D-2)l^{D-4}}, \tag{29}$$

$$\beta_1 = -[4(15D^2 - 91D + 142)(D-2)^3\beta_2 + l^2(-17 - 38D^2 + 8D^3 + 53D)]/[4(D-2)^2Q_3(D)],$$

$$\beta_3 = \frac{l^2(7D-13)^2 - 16(D-1)(2D-5)(D-2)^2\beta_2}{8(D-2)Q_3(D)},$$

$$\Lambda = -[96(2D-5)(D-1)(D-3)(D-4)(D-2)^3\beta_2 + l^2(D-2)(881D^4 - 8378D^3 + 30195D^2 - 48626D + 29384)]/[4l^4Q_3(D)],$$

where we have defined

$$Q_3(D) = 47D^3 - 369D^2 + 972D - 848.$$

For this particular solution, the expression for the mass (16) is nonzero, and is given by

$$\mathcal{M} = -\{[(48(D-1)(D-3)(D-4)(D-2)^2\beta_2 + l^2(7D-13)(13D^2 - 59D + 76))(2D-5)] \times r_h^{4(D-2)} \Omega_{D-2}\} / [8\kappa Q_3(D)l^{4D-5}]. \tag{32}$$

$$T = \frac{(D-2)r_h^{D-1}}{2\pi l^D}, \tag{30}$$

while the mass (16) vanishes. The electric charge and potential are given by

$$Q = \Sigma_3 \Omega_{D-2} \left(\frac{r_h}{l}\right)^{D-2}, \quad \Phi = -\frac{\Sigma_3 r_h^{D-1}}{l^{D-2}},$$

and once again we verify that the first law of thermodynamics (20) holds in its extremal form.

D. Nonextremal solution with $z = 3(D-2)$

Finally, a fourth family of solutions is found when the dynamical exponent takes the value $z = 3(D-2)$,

$$ds_D^2 = -\left(\frac{r}{l}\right)^{6(D-2)} f(r) dt^2 + \frac{l^2}{r^2} \frac{dr^2}{f(r)} + \frac{r^2}{l^2} \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2,$$

$$f(r) = 1 - M \left(\frac{l}{r}\right)^{2(D-2)},$$

$$F_{rt} = \sqrt{M} \Sigma_4 \left(\frac{r}{l}\right)^{2D-5}, \tag{31}$$

where

$$(\Sigma_4)^2 = \{(D-2)(D-3)[l^2(7D-13)(11D-27) - 8(13D^2 - 66D + 86)(D-2)^2\beta_2](D-4)\} / [\kappa Q_3(D)l^4],$$

and the values of the coupling constants are fixed as

Note that this expression of the mass vanishes for the selection

$$\beta_2 = -\frac{l^2(7D-13)(13D^2 - 59D + 76)}{48(D-1)(D-3)(D-4)(D-2)^2},$$

but this case reduces to the second family of solutions for a fixed value of the dynamical exponent $z = 3(D-2)$.

Calculating the Wald entropy, we obtain

$$S_W = -\{\pi r_h^{D-2} \Omega_{D-2} [8(25D-58)(D-3) \times (D-4)(D-2)^2 \beta_2 + l^2(7D-13) \times (15D^2-49D+28)]\} / [\kappa l^D Q_3(D)], \quad (33)$$

while the Hawking temperature reads

$$T = \frac{(D-2)r_h^{3(D-2)}}{2\pi l^{3D-5}}. \quad (34)$$

The electric thermodynamical quantities are given by

$$Q = \Sigma_4 \Omega_{D-2} \left(\frac{r_h}{l}\right)^{D-2}, \quad \Phi = -\frac{\Sigma_4 r_h^{3(D-2)}}{2(D-2)l^{3D-7}}, \quad (35)$$

and it is simple to check that the first law (20) is satisfied.

IV. LOWER-DIMENSIONAL CASES $D = 3$ AND $D = 4$

It is clear that all of these solutions are valid for $D \geq 5$, due to the Gauss-Bonnet theorem in four dimensions and the vanishing of the Gauss-Bonnet term in three dimensions. This in turn implies that it is possible to switch off the contribution of the coupling constant β_3 in four and three dimensions by realizing the following shift:

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rightarrow (\beta_1 - \beta_3, \beta_2 + 4\beta_3, 0). \quad (36)$$

In three dimensions, among the four solutions derived previously, only the last one can be projected in $D = 3$ for a dynamical exponent $z = 3$, but in this case the solution is no longer charged since $Q = 0$. The resulting solution turns out to be the $z = 3$ Lifshitz black hole of new massive gravity [4]. It is interesting to note that in this case the expression for the mass [Eq. (32)] becomes

$$\mathcal{M} = -\frac{2\pi r_h^4}{\kappa l^4},$$

which corresponds to the value of the mass found in Ref. [21] with $\kappa = -8\pi G$.

Nevertheless, the third solution is regular in four dimensions and becomes an extremal charged Lifshitz black hole with dynamical exponent $z = 3$, given by

$$ds_4^2 = -\left(\frac{r}{l}\right)^6 f(r) dt^2 + \frac{l^2}{r^2 f(r)} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} \sum_{i=1}^2 dx_i^2, \\ f(r) = 1 - M \left(\frac{l}{r}\right)^4, \\ F_{rt} = 2\sqrt{-\frac{3\beta_2 M}{\kappa l^4}}, \quad (37)$$

while the coupling constants are

$$\beta_1 = \frac{l^2}{72} - \frac{11}{36}\beta_2, \quad \Lambda = -\frac{9}{l^2}.$$

V. COMMENTS AND CONCLUSIONS

The aim of this paper was to confirm (using some concrete examples) the validity of the recently proposed method [16,17] to compute the quasilocal mass for an arbitrary diffeomorphism-invariant theory. This formalism is interesting for many reasons. Specifically, it does not require one to linearize the field equations and gives finite conserved charges independently of the asymptotic behavior of the metric solution. In our case, since we were interested in charged Lifshitz black holes of the Einstein-Maxwell theory supplemented by the more general quadratic-curvature corrections, the quasilocal formalism fits perfectly with our intentions. In doing so, we have derived four classes of charged Lifshitz black hole solutions, two of which do not require the dynamical exponent to be fixed. Three of these solutions are interpreted as extremal since the mass vanishes identically while the electric charge is nonzero. In these cases, we have confirmed the validity of the first law of thermodynamics. For the last family, the quasilocal mass and electric charge depend on the unique integration constant appearing in the solution, and we have also confirmed that the first law holds in this case. Generically, all of these solutions are only valid for $D \geq 5$ because of the presence of the quadratic-curvature corrections. However, the solution with nonzero mass can be lowered to three dimensions, and in this case the dynamical exponent becomes $z = 3$ while the electric charge vanishes, and the solution becomes the Lifshitz $z = 3$ black hole solution of new massive gravity [4]. Interestingly enough, in this case the expression for the mass becomes precisely that of the Lifshitz $z = 3$ black hole solution of new massive gravity [21].

As a last remark, we may notice that for all four solutions derived here it is easy to guess the form of the Smarr formula, which is given by

$$\mathcal{M} = \frac{1}{4}(TS_W + \Phi Q).$$

It will be interesting to explore whether this Smarr formula is a consequence of some scaling symmetry of the reduced action.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Eloy Ayón-Beato for useful discussions. M.B. is supported by BECA DOCTORAL CONICYT 21120271. M.H. is partially supported by Grant No 1130423 from FONDECYT and from CONICYT, Departamento de Relaciones Internacionales "Programa Regional MATHAMSUD 13 MATH-05." This project was partially funded by Proyectos CONICYT- Research Council UK - RCUK -DPI20140053.

APPENDIX: SOME USEFUL EXPRESSIONS

In order for our study to be clear and self-contained, we report some of the formulas needed to derive our results.

1. The fourth-order Cauchy differential equation arising from the combination $-\frac{l^4}{f}(E_t^t - E_r^r) = 0$

$$\begin{aligned}
 & r^3(2\beta_3 + 2\beta_1 + \beta_2) \left[r \frac{d^4 f}{dr^4} + 2(z + D + 1) \frac{d^3 f}{dr^3} \right] + r^2 [(-2z^2 + 2(-D + 8)z + 2(D + 5)(D - 1))\beta_1 \\
 & + (-z^2 + 2(D + 1)z + D^2 + 2D - 1)\beta_2 + (-2z^2 + 2(5D - 4)z + 2D^2 + 6)\beta_3] \frac{d^2 f}{dr^2} \\
 & - (z + D - 1)r[2(z - 1)(2z + 3D - 5)\beta_1 + (2z^2 - z - D + 1)\beta_2 + (4z^2 - 6zD + 10z + 2D - 6)\beta_3] \frac{df}{dr} \\
 & - [(4z^2 + 8z - 4zD + 4)\beta_3 + (2D + 2z^2 - 4)\beta_2 + (4z^2 + 4zD - 8z + 2D^2 - 6D + 4)\beta_1]f - l^2(z - 1)(D - 2) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{A1}$$

2. Expressions for Ξ_1 and Ξ_2 appearing in Eq. (9)

$$\begin{aligned}
 \Xi_1 = & -\{l^2[\chi^2 + (-3z + 4 - 2D)\chi + 2z^2 + (D - 2)(D + 2z - 1)][2\chi^3 + (-4D + 8)\chi^2 \\
 & + (-2z^2 + (4D - 8)z + (D - 1)(D - 4))\chi - z(D - 3)(D - 4)] + \chi(D - 3)(D - 4) \\
 & \times (\chi + 2 - D - z)[\chi^3 + (-3D - 2z + 6)\chi^2 + (-z^2 + (3D - 6)z + 8 + 2D(D - 4))\chi + 2z^3 \\
 & - 2z(z - 2)(D - 2)]\beta_2\} / \{2(\chi + 2 - D - z)\chi[(D(D - 3) + 4(D - 2)z)\chi^2 \\
 & + ((-4D + 8)z^2 + (19D - 5D^2 - 16)z - D(D - 2) \times (D - 3))\chi + (4D - 8)z^3 + (16 - 2D - 2D^2)z^2 \\
 & + 3(D - 2)(D^2 - 3D + 4)z - 2(D - 2) \times (D^2 - 3D + 4)]l^4\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Xi_2 = & \{2l^2[\chi^4 + (4 - D - 2z)\chi^3 + (-z^2 + (2z - 3) \times (D - 2))\chi^2 + (2z^3 + (-3D + 4)z^2 \\
 & + (4D - 6)z - D)\chi + z(D - 3)(D - 4)(-1 + z)] \times [\chi^2 + (-3z + 4 - 2D)\chi + 2z^2 + (2D - 4)z \\
 & + (D - 1)(D - 2)] + \chi(D - 3)(D - 4) \times (-D + 2 + \chi - z)[\chi^4 + (-4z + 6 - 2D)\chi^3 \\
 & + (3z^2 + (5D - 14)z + (D - 2)(D - 6))\chi^2 + (4z^3 - Dz^2 - (D - 2)(D - 6)z + 2(D - 2)^2)\chi \\
 & - 4z^4 + (4D - 4)z^3 - 4z(3z - 2)(D - 2)]\beta_2\} / \{2[((4D - 8)z + D(D - 3))\chi^2 + ((-4D + 8)z^2 \\
 & + (19D - 5D^2 - 16)z - D(D - 2)(D - 3))\chi + (4D - 8)z^3 + (16 - 2D - 2D^2)z^2 + 3(D - 2) \\
 & \times (D^2 - 3D + 4)z - 2(D - 2)(D^2 - 3D + 4)]\chi l^4\}.
 \end{aligned}$$

3. Expressions for Ψ_1 and Ψ_2 appearing in Eq. (16)

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 = & -(2\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3)\chi^3 + [(2\beta_2 + 4\beta_3 + 4\beta_1)z + (2\beta_2 + 5\beta_1 + 3\beta_3)(D - 2)]\chi^2 \\
 & + [(2\beta_1 + 2\beta_3 + \beta_2)z^2 - 3(3\beta_3 + \beta_1 + \beta_2)(D - 2)z - (D - 2)(2(2D - 3)\beta_1 + \beta_2(D - 2) - 2\beta_3)]\chi \\
 & - 2(2\beta_3 + \beta_2 + 2\beta_1)z^3 - (2\beta_1 - \beta_2 - 6\beta_3)(D - 2)z^2 - 2(3\beta_3 + \beta_1 + \beta_2)(D - 2)z + (D - 2) \\
 & \times [(D - 2)(\beta_1(D - 1) + \beta_2) + 2\beta_3],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_2 = & 2(2\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3)\chi^3 - [4(2\beta_3 + 2\beta_1 + \beta_2)z + (4\beta_3 + 8\beta_1 + 3\beta_2)(D - 2)]\chi^2 \\
 & + [-2(2\beta_3 + \beta_2 + 2\beta_1)z^2 + 3(\beta_2 + 4\beta_3)(D - 2)z + (D - 2)((D - 2)\beta_2 + 4(D - 1)\beta_1 - 4\beta_3)]\chi \\
 & + 4(2\beta_3 + \beta_2 + 2\beta_1)z^3 + 2(2\beta_1 - \beta_2 - 6\beta_3)(D - 2)z^2 + 4(3\beta_3 + \beta_1 + \beta_2)(D - 2)z - [2(D - 2)\beta_2 \\
 & + 2(D - 1)(D - 2)\beta_1 + 4\beta_3 - l^2](D - 2).
 \end{aligned}$$

- [1] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998).
- [2] S. Kachru, X. Liu, and M. Mulligan, *Phys. Rev. D* **78**, 106005 (2008).
- [3] E. A. Bergshoeff, O. Hohm, and P. K. Townsend, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 201301 (2009).
- [4] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet, and M. Hassaine, *Phys. Rev. D* **80**, 104029 (2009).
- [5] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet, and M. Hassaine, *J. High Energy Phys.* **04** (2010) 030.
- [6] H. Lu, Y. Pang, C. N. Pope, and J. F. Vazquez-Poritz, *Phys. Rev. D* **86**, 044011 (2012).
- [7] Z. Y. Fan and H. Lu, Thermodynamical first laws of black holes in quadratically extended gravities, [arXiv:1501.00006](https://arxiv.org/abs/1501.00006) [*Phys. Rev. D* (to be published)].
- [8] M. Taylor, Non-relativistic holography, [arXiv:0812.0530](https://arxiv.org/abs/0812.0530).
- [9] U. Danielsson and L. Thorlacius, *J. High Energy Phys.* **03** (2009) 070.
- [10] D. W. Pang, *J. High Energy Phys.* **01** (2010) 116.
- [11] A. Alvarez, E. Ayón-Beato, H. A. González, and M. Hassaine, *J. High Energy Phys.* **06** (2014) 041.
- [12] T. Azeyanagi, W. Li, and T. Takayanagi, *J. High Energy Phys.* **06** (2009) 084.
- [13] F. Correa, M. Hassaine, and J. Oliva, *Phys. Rev. D* **89**, 124005 (2014).
- [14] E. Ayon-Beato, M. Bravo-Gaete, F. Correa, M. Hassaine, M. M. Juárez-Aubry, and J. Oliva, First law and anisotropic Cardy formula for three-dimensional Lifshitz black holes, [arXiv:1501.01244](https://arxiv.org/abs/1501.01244) [*Phys. Rev. D* (to be published)].
- [15] M. Bravo-Gaete and M. Hassaine, *Phys. Rev. D* **89**, 104028 (2014).
- [16] W. Kim, S. Kulkarni, and S.-H. Yi, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 081101 (2013).
- [17] Y. Gim, W. Kim, and S.-H. Yi, *J. High Energy Phys.* **07** (2014) 002.
- [18] S. Deser and B. Tekin, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 101101 (2002).
- [19] S. Deser and B. Tekin, *Phys. Rev. D* **67**, 084009 (2003).
- [20] C. Senturk, T. C. Sisman, and B. Tekin, *Phys. Rev. D* **86**, 124030 (2012).
- [21] H. A. Gonzalez, D. Tempo, and R. Troncoso, *J. High Energy Phys.* **11** (2011) 066.
- [22] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **49**, 975 (1994).
- [23] J. Crisostomo, R. Troncoso, and J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **62**, 084013 (2000).
- [24] R. Aros, R. Troncoso, and J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **63**, 084015 (2001).
- [25] H. S. Liu and H. Lu, Thermodynamics of Lifshitz black holes, *J. High Energy Phys.* **12** (2014) 071.

Capítulo 5

Teoría de Horndeski

En la sección 3.2 estudiamos la gravedad de Lovelock, correspondiente a la extensión más natural de la Relatividad General para espacio-tiempos de dimensiones superiores. Dado lo anterior, cabe preguntarse si existen otras teorías de tal manera que incluyan otros campos no triviales, tales como un campo escalar, con características similares a la teoría de Lovelock. La respuesta ha sido entregada por G. Horndeski en la década de 1970, formulando una teoría dotada de la métrica $g_{\mu\nu}$, un campo escalar Φ , así como también de sus derivadas [119] en dimensión cuatro, donde se destaca que, aunque el Lagrangiano contiene derivadas de orden superior, las ecuaciones de movimiento son a lo más de segundo orden.

Una manera intuitiva de obtener la acción de Horndeski es mediante un modelo de similares características conocido como *Galileon* [120, 121] a través de la introducción de cuatro funciones que dependen del término cinético $X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi$ y del campo escalar Φ [122], esto es

$$S[X, \Phi, g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[K(X, \Phi) - G^{(3)}(X, \Phi) \square\Phi + G^{(4)}_{,X} \left((\square\Phi)^2 - (\nabla\nabla\Phi)^2 \right) + R G^{(4)}(X, \Phi) - \frac{1}{6} G^{(5)}_{,X} \left((\square\Phi)^3 - 3\square\Phi (\nabla\nabla\Phi)^2 + 2(\nabla\nabla\Phi)^3 \right) + G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \Phi G^{(5)}(X, \Phi) \right], \quad (5.0.1)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned} G^{(n)}_{,X} &:= \frac{\partial G^{(n)}}{\partial X}, \quad n = \{3, 4, 5\}, \\ (\nabla\nabla\Phi)^2 &:= (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi) (\nabla^\mu \nabla^\nu \Phi), \\ (\nabla\nabla\Phi)^3 &:= (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi) (\nabla^\mu \nabla^\rho \Phi) (\nabla_\rho \nabla^\nu \Phi). \end{aligned}$$

Notemos que para una elección de las funciones: $K(X, \Phi) = X - \frac{\Lambda}{\kappa}$, $G^{(4)}(X, \Phi) = \frac{1}{2\kappa} - \frac{\xi}{2}\Phi^2$ y $G^{(3)} = 0 = G^{(5)}$, obtenemos la teoría asociada a un campo escalar no mínimamente acoplado estudiado en la sección 3.1 en dimensión cuatro, con $\kappa = 8\pi G$. En particular, en este capítulo estamos interesados en una subclase de la teoría (5.0.1) caracterizada por poseer las simetrías $\Phi \rightarrow -\Phi$ y $\Phi \rightarrow \Phi + \text{constante}$ [123]. Concretamente, para las expresiones

$$K(X, \Phi) = \alpha X - 2\kappa\Lambda, \quad G^{(4)}(X, \Phi) = \kappa\zeta + \frac{\eta}{2} X, \quad G^{(3)} = 0 = G^{(5)},$$

donde Λ es la constante cosmológica, mientras que κ, ζ, α y η son constantes de acoplamiento, la acción

(5.0.1) adquiere la forma

$$S[g_{\mu\nu}, \Phi] = \int \sqrt{-g} d^4 x \left[\kappa(\zeta R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} (\alpha g_{\mu\nu} - \eta G_{\mu\nu}) \nabla^\mu \Phi \nabla^\nu \Phi \right]. \quad (5.0.2)$$

Las ecuaciones de movimiento, respecto a la métrica y al campo escalar, son

$$\zeta G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa} \left[\alpha T_{\mu\nu}^{(1)} + \eta T_{\mu\nu}^{(2)} \right], \quad (5.0.3)$$

$$\nabla_\mu J^\mu = 0, \quad J^\mu = (\alpha g^{\mu\nu} - \eta G^{\mu\nu}) \nabla_\nu \Phi, \quad (5.0.4)$$

donde los tensores $T_{\mu\nu}^{(i)}$ son definidos como

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(1)} &= \left(\nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \Phi \nabla^\lambda \Phi \right). \\ T_{\mu\nu}^{(2)} &= \frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi R - 2 \nabla_\lambda \Phi \nabla_{(\mu} \Phi R_{\nu)}^\lambda - \nabla^\lambda \Phi \nabla^\rho \Phi R_{\mu\lambda\nu\rho} \\ &\quad - (\nabla_\mu \nabla^\lambda \Phi) (\nabla_\nu \nabla_\lambda \Phi) + (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi) \square \Phi + \frac{1}{2} G_{\mu\nu} (\nabla \Phi)^2 \\ &\quad - g_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} (\nabla^\lambda \nabla^\rho \Phi) (\nabla_\lambda \nabla_\rho \Phi) + \frac{1}{2} (\square \Phi)^2 - \nabla_\lambda \Phi \nabla_\rho \Phi R^{\lambda\rho} \right]. \end{aligned}$$

El plan de este capítulo está organizado como sigue. En la próxima sección estudiamos configuraciones de agujeros negros considerando la acción (5.0.2), donde una de manera de eludir el teorema de no-pelo expuesto en [124] es imponer que la componente radial de la corriente conservada (5.0.4) se desvanezca trivialmente, sin la necesidad de aplicar alguna condición al campo escalar Φ , esto es

$$\alpha g^{rr} - \eta G^{rr} = 0. \quad (5.0.5)$$

En la sección 5.2 se dan a conocer las soluciones encontradas en [5], estudiando agujeros negros de Lifshitz, cuya particularidad está en la dependencia temporal del campo escalar junto a un valor particular del exponente dinámico z . Finalmente, en la sección 5.3 se exponen los resultados presentes en [6], analizando la termodinámica de agujeros negros, los cuales para el caso tridimensional obtenemos la solución conocida como BTZ.

5.1. Agujeros negros en presencia de una fuente particular de la teoría de Horndeski

La primera solución de agujero negro dada la teoría (5.0.2), sin una constante cosmológica, fue encontrada en [125], la cual en su notación tenemos que $\zeta = \frac{m_p^2}{2}$, $\alpha = 1$, $\kappa = 1$ y $\eta = \frac{z}{m_p^2}$, donde m_p es la masa de Planck y z es un número real. Considerando un caso particular de la métrica (3.3.1) para un espacio-tiempo tetradimensional, junto con $\gamma = 1$ y un campo escalar de la forma $\Phi = \Phi(r)$, tenemos que la solución de este sistema es de la forma

$$f(r) = \frac{3}{4} + \frac{r^2}{l^2} - \frac{2M}{m_p^2 r} + \frac{\sqrt{z}}{4m_p r} \arctan\left(\frac{m_p r}{\sqrt{z}}\right), \quad (5.1.1)$$

$$g(r) = \frac{4(m_p^2 r^2 + z)^2 f(r)}{(m_p^2 r^2 + 2z)^2}, \quad (5.1.2)$$

$$(\Phi'(r))^2 = -\frac{m_p^6 r^2 (m_p^2 r^2 + 2z)^2}{4z (m_p^2 r^2 + z)^3 f(r)}, \quad (5.1.3)$$

donde (\prime) corresponde a la derivada del campo escalar respecto a la coordenada r , M es una constante de integración asociada a la masa, mientras que l se define como $l^2 := 12z/m_p^2$. Esta solución describe un agujero negro con un horizonte de eventos localizado en $r = r_h$ para $M > 0$. Adicionalmente, en [125] se analizaron las propiedades termodinámicas mediante la continuación analítica $t \rightarrow -i\tau$. En orden de evitar la singularidad cónica en el horizonte de la métrica Euclidiana, el tiempo Euclidiano τ es periódico con periodo β

$$\beta = \frac{4\pi\sqrt{g_{\tau\tau}g_{rr}}}{g'_{\tau\tau}} \Big|_{r=r_h} = \frac{8\pi z r_h}{(m_p^2 r_h^2 + 2z)}, \quad (5.1.4)$$

y la temperatura de Hawking está dada por $T = \beta^{-1}$. De igual manera, para encontrar los otros parámetros termodinámicos, se consideró la técnica de S. W. Hawking y D. N. Page [126], definiendo la acción Euclidiana regularizada de la forma

$$S_{\text{Reg}} := S_{\text{E}}(g_{\mu\nu}, \Phi) - S_{\text{E}}(g_{\mu\nu}^{(0)}, \Phi^{(0)}), \quad (5.1.5)$$

donde $g_{\mu\nu}^{(0)}$ y $\Phi^{(0)}$ corresponden a la métrica y al campo escalar considerando $M = 0$ (los cuales describen un solitón gravitacional) a la solución dada por las expresiones (5.1.1 - 5.1.3), mientras que la integral de la acción está definida entre el horizonte r_h y $R \gg r_h$. Si consideramos la constante β_0 como la temperatura inversa del solitón, ésta se relaciona con β requiriendo la condición

$$\beta_0^2 f(r = R, M = 0) = \beta^2 f(r = R, M), \quad (5.1.6)$$

para posteriormente tomar el límite $R \rightarrow +\infty$ en la acción regularizada (5.1.5). Lo anterior permite obtener la masa $M_{\text{Reg}} = \partial S_{\text{Reg}}/\partial\beta$, la entropía $S = \beta M_{\text{Reg}} - S_{\text{Reg}}$ y el calor específico $C = \partial M_{\text{Reg}}/\partial T$ como

$$M_{\text{Reg}} = M + \frac{m_p \sqrt{z} x^3 (x^2 + 2)^2}{8(x^2 - 2)(x^2 + 1)}, \quad (5.1.7)$$

$$S = \frac{\pi z x^2 (2x^4 + x^2 - 2)}{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}, \quad (5.1.8)$$

$$C = \frac{2\pi z x^2 (x^2 + 2)(2x^8 - 4x^6 - 11x^4 - 4x^2 + 4)}{(x^2 + 1)^2 (x^2 - 2)^3}, \quad (5.1.9)$$

donde se ha definido $x := m_p r_h / \sqrt{z}$.

A pesar de esta rica estructura termodinámica, considerando el caso $z > 0$ tenemos que el cuadrado de la derivada del campo escalar (5.1.3) es negativo para $r > r_h$, lo cual implica que el campo escalar Φ es complejo. Sin embargo, en [127] logran eludir este inconveniente extendiendo la teoría a través de la inclusión de una constante cosmológica a la acción, haciendo posible encontrar agujeros negros con un campo escalar real para la región fuera del horizonte de eventos, primero para dimensión cuatro y luego para una extensión dimensional arbitraria. Concretamente, para $\kappa = \frac{1}{16\pi G}$, $\zeta = 1$ y un ansatz métrico de la forma (3.3.1), la solución para las ecuaciones de movimiento (5.0.3) y (5.0.4) en cuatro dimensiones para $\gamma = \pm 1$ y $\eta\Lambda \neq \alpha$ es la siguiente:

$$f(r) = \frac{r^2}{l^2} + \frac{\gamma}{\alpha} \sqrt{\alpha\eta\gamma} \left(\frac{\alpha + \Lambda\eta}{\alpha - \Lambda\eta} \right)^2 \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{\alpha\eta\gamma}}{\eta\gamma} r\right)}{r} - \frac{M}{r} + \frac{3\alpha + \Lambda\eta}{\alpha - \eta\Lambda} \gamma, \quad (5.1.10)$$

$$g(r) = \frac{(\alpha - \eta\Lambda)^2 (\alpha r^2 + \eta\gamma)^2 f(r)}{\alpha^2 [(\alpha - \eta\Lambda) r^2 + 2\eta\gamma]^2}, \quad (5.1.11)$$

$$(\Phi'(r))^2 = -\frac{2r^2 \kappa \alpha^2 (\alpha + \eta\Lambda) [(\alpha - \eta\Lambda) r^2 + 2\eta\gamma]^2}{\eta (\alpha - \eta\Lambda)^2 (\alpha r^2 + \eta\gamma)^3 f(r)}, \quad (5.1.12)$$

donde M es una constante de integración y se ha definido

$$l^{-2} := \frac{\alpha}{3\eta}, \quad (5.1.13)$$

mientras que para $\gamma = 0$ la solución se reduce a una expresión de la forma

$$f(r) = \frac{r^2}{l^2} - \frac{\mu}{r} = g(r), \quad (\Phi'(r))^2 = -\frac{2\kappa(\alpha + \eta\Lambda)}{\alpha\eta} \frac{1}{f(r)}. \quad (5.1.14)$$

Podemos observar que estas soluciones son asintóticamente localmente dS ó AdS en el sentido que son soluciones a la ecuaciones de Einstein, donde el tensor de Riemann se aproxima asintóticamente a (3.0.1).

Adicionalmente, para el caso esféricamente simétrico ($\gamma = 1$) se describe un agujero negro con un horizonte de eventos localizado en $r = r_h$ para $M > 0$, donde el campo escalar se desvanece en el horizonte. Respecto a las propiedades termodinámicas, se consideró, de manera análoga a lo realizado en [125], el método de Hawking y Page [126], donde la temperatura T , la masa M_{Reg} y la entropía S adquieren la forma

$$T = \frac{\sqrt{3}x_h}{4\pi l} + \frac{\sqrt{3}l_0^2}{2\pi l (l_0^2 + l^2) x_h}, \quad (5.1.15)$$

$$\begin{aligned} M_{\text{Reg}} &= \frac{2}{3^{3/2}} \frac{\kappa\pi l}{l_0^2 (1 + x_h^2) (l^2 + l_0^2) [(l^2 + l_0^2) x_h^2 - 2l_0^2]} \left[3(1 + x_h^2) (l^2 - l_0^2)^2 \left((l^2 + l_0^2) x_h^2 - 2l_0^2 \right) \arctan(x_h) \right. \\ &\quad - 2(l^2 - 2l_0^2) (l^2 + l_0^2)^2 x_h^7 - 2(l^2 + 5l_0^2) (l^2 - 2l_0^2) (l^2 + l_0^2) x_h^5 \\ &\quad \left. + (l_0^6 + 7l^4 l_0^2 - 13l^2 l_0^4 - 3l^6) x_h^3 + 6l_0^2 (l^2 - 3l_0^2) (l^2 + l_0^2) x_h \right], \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

$$S = \frac{8\pi^2 l^2 \kappa x_h^2}{3l_0^2} \left[\frac{(l^2 + l_0^2) (l^2 - 2l_0^2) x_h^4 + l_0^2 (l^2 - l_0^2) x_h^2 + 2l_0^4}{(1 + x_h^2) (2l_0^2 - (l_0^2 + l^2) x_h^2)} \right], \quad (5.1.17)$$

con $x_h := \sqrt{\frac{\alpha}{\eta}} r_h$. Para satisfacer la condición de energía débil, se define el parámetro $l_0 := \sqrt{-\frac{3}{\Lambda}}$ y se tiene que la constante cosmológica Λ es negativa. Además, en términos de l_0 se debe cumplir $l^2 > l_0^2$ y se puede examinar que estas expresiones satisfacen la primera ley de la termodinámica (4.1.4).

Por otro lado, debido al hecho que la teoría posee una constante cosmológica, se puede considerar de manera adicional la construcción de la acción (5.0.2) con $\alpha = 0$. Como antes, considerando un ansatz dado por (3.3.1) para $\gamma = \pm 1$ y un espacio-tiempo tetradimensional, se obtiene una solución del sistema de la forma

$$f(r) = (60\gamma^2 - 20\Lambda\gamma r^2 + 3\Lambda^2 r^4) - \frac{M}{r}, \quad (5.1.18)$$

$$g(r) = \frac{\gamma f(r)}{15(\Lambda r^2 - 2\gamma)^2}, \quad (5.1.19)$$

$$(\Phi'(r))^2 = -\frac{30\kappa\Lambda r^2 (\Lambda r^2 - 2\gamma)^2}{\eta\gamma^2 f(r)}, \quad (5.1.20)$$

con M correspondiente a una constante de integración. Esta solución es asintóticamente localmente plana y para obtener un campo escalar real fuera de un horizonte de eventos, se necesita que $\Lambda/\eta < 0$. Notemos que $\gamma = 0$ es un caso particular y debe ser tratado de manera distinta. Sin embargo, lo que se obtiene es un caso degenerado, debido a que una de las funciones métricas del ansatz (3.3.1) es completamente arbitraria.

Recientemente, en [128] se estudian agujeros negros asintóticamente localmente AdS y asintóticamente planas considerando una versión eléctricamente cargada a la solución encontrada en [127], analizando primero el caso tetradimensional y posteriormente la extensión en dimensiones superiores. Para ello, adicionan a la acción (5.0.2) el término (3.1.22), donde $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, el cual es considerado eléctricamente cargado, esto es $A_\mu dx^\mu = A_t(r)dt$. Como antes, para un ansatz métrico de la forma (3.3.1) en cuatro dimensiones y un campo escalar estático $\Phi = \Phi(r)$, se tiene que las ecuaciones de movimiento satisfacen la siguiente solución para $\gamma = \pm 1$ y $\eta\Lambda \neq \alpha$

$$f(r) = \frac{r^2}{l^2} + \frac{\gamma}{\alpha} \sqrt{\alpha\eta\gamma} \left(\frac{\alpha + \Lambda\eta + \frac{\alpha^2}{4\eta\kappa\gamma} q^2}{\alpha - \Lambda\eta} \right)^2 \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{\alpha\eta\gamma}}{\eta\gamma} r\right) - M}{r} + \frac{\alpha^2}{\kappa(\alpha - \Lambda\eta)^2} \frac{q^2}{r^2} + \frac{\alpha^3}{16\eta\kappa^2\gamma^2(\alpha - \Lambda\eta)^2} \frac{q^4}{r^2} - \frac{\alpha^2}{48\kappa^2\gamma(\alpha - \Lambda\eta)^2} \frac{q^4}{r^4} + \frac{3\alpha + \Lambda\eta}{\alpha - \Lambda\eta} \gamma, \quad (5.1.21)$$

$$g(r) = \frac{16r^4\kappa^2(\alpha - \eta\Lambda)^2(\alpha r^2 + \eta\gamma)^2 f(r)}{\alpha^2 [4\kappa(\alpha - \eta\Lambda)r^4 + 8\eta\kappa\gamma r^2 - \eta q^2]^2}, \quad (5.1.22)$$

$$(\Phi'(r))^2 = -\frac{1}{32} \frac{\alpha^2 [4\kappa(\alpha + \eta\Lambda)r^4 + \eta q^2] [4\kappa(\alpha - \eta\Lambda)r^4 + 8\eta\kappa\gamma r^2 - \eta q^2]^2}{r^6 \eta \kappa^2 (\alpha - \eta\Lambda)^2 (\alpha r^2 + \eta\gamma)^3 f(r)}, \quad (5.1.23)$$

$$A_t(r) = \frac{1}{4} \frac{q\sqrt{\alpha}}{\eta^{\frac{3}{2}}\gamma^{\frac{5}{2}}\kappa} \left(\frac{4\beta\kappa\gamma^2(\alpha + \eta\Lambda) + \alpha^2 q}{(\alpha - \eta\Lambda)} \right) \arctan\left(\frac{\sqrt{\alpha\eta\gamma}}{\eta\gamma} r\right) + \alpha \left(\frac{8\eta\kappa\gamma^2 + \alpha q}{4\eta\kappa\gamma^2(\alpha - \eta\Lambda)} \right) \frac{q}{r} - \frac{\alpha}{12\kappa\gamma(\alpha - \eta\Lambda)} \frac{q^3}{r}, \quad (5.1.24)$$

donde las constantes de integración M y q están relacionadas a la masa y a la carga eléctrica respectivamente, definiendo el radio (A)dS como (5.1.13). De manera análoga a [127], el sistema $\gamma = 0$ debe tratarse de forma diferente y la solución del sistema es

$$f(r) = \frac{r^2}{l^2} - \frac{M}{r} + \frac{\alpha}{2\kappa(\alpha - \eta\Lambda)} \frac{q^2}{r^2} + \frac{\alpha\eta}{80\kappa^2(\alpha - \eta\Lambda)^2} \frac{q^4}{r^6}, \quad (5.1.25)$$

$$g(r) = \frac{16\kappa^2(\alpha - \Lambda\eta)r^8 f(r)}{[4\kappa(\alpha - \eta\Lambda)r^4 - \eta q^2]^2}, \quad (5.1.26)$$

$$(\Phi'(r))^2 = -\frac{1}{32} \frac{[4\kappa(\alpha + \eta\Lambda)r^4 + \eta q^2] [4\kappa(\alpha - \eta\Lambda)r^4 + \eta q^2]^2}{\alpha\eta r^{12}\kappa^2(\alpha - \Lambda\eta)^2 F(r)}, \quad (5.1.27)$$

$$A_t(r) = -\left(\frac{20\kappa(\alpha - \eta\Lambda)r^4 - \eta q^2}{20\kappa(\alpha - \eta\Lambda)r^5} \right) q, \quad (5.1.28)$$

donde en el límite $q \rightarrow 0$ se recuperan los resultados obtenidos en [127]. Observemos que estas soluciones son, como antes, asintóticamente localmente dS ó AdS. Al estudiar el caso particular con $\gamma = 1$, en orden de obtener un campo escalar real considerando un dominio fuera de un horizonte de eventos situado en $r = r_h$,

se concluye que se debe imponer una restricción para la constante cosmológica dada por

$$\Lambda < -\frac{q^2}{4r_h^4\kappa} - \frac{\alpha}{\eta}.$$

De la misma manera que en [127], considerando ahora el hecho que además de poseer una constante cosmológica Λ , existe una constante q adicional asociada a la carga eléctrica, los autores estudiaron la teoría considerando el caso $\alpha = 0$ y $\gamma = 1$ en dimensión cuatro, obteniéndose agujeros negros asintóticamente localmente planos dados por

$$f(r) = 48\kappa^2\Lambda^2r^4 - 320\kappa^2\Lambda r^2 + 120\kappa(8\kappa + \Lambda q^2) - \frac{M}{r} + \frac{240\kappa q^2}{r^2} - \frac{5q^4}{r^4}, \quad (5.1.29)$$

$$g(r) = \frac{r^4 f(r)}{15[4\kappa r^2(2 - \Lambda r^2) - q^2]^2}, \quad (5.1.30)$$

$$(\Phi'(r))^2 = -\frac{15(4\kappa\Lambda r^4 + q^2)[4\kappa r^2(2 - \Lambda r^2) - q^2]^2}{2r^6\eta} \frac{1}{f(r)}, \quad (5.1.31)$$

$$A_t(r) = \sqrt{15} \left(\frac{q^3}{3r^3} - \frac{8\kappa q}{r} - 4\kappa\Lambda r q \right). \quad (5.1.32)$$

Al imponer $\Lambda = 0$ se obtiene una solución asintóticamente plana, y para conseguir un campo escalar real fuera del horizonte se tiene que $\eta < 0$.

Otra manera de encontrar soluciones de agujeros negros considerando la acción (5.0.2) es por medio de un campo escalar de la forma [121, 129]

$$\Phi(t, r) = qt + \psi(r),$$

donde q es una constante de integración. Para lo que sigue a continuación, se utilizará la notación de [129] escribiendo las constantes de la forma $\alpha = 2\eta$, $\eta = 2\beta$, junto con $\kappa = 1$ y $\zeta > 0$. Como los casos anteriores, para un ansatz de la forma (3.3.1) en dimensión cuatro con $\gamma = 1$, tenemos que ψ' adquiere la forma

$$\psi'(r) = \pm \frac{\sqrt{r}}{f(r)(\beta + \eta r^2)} \left(q^2\beta(\beta + \eta r^2)f(r)' - \frac{\lambda}{2}(f(r)^2 r^2)' \right)^{1/2}. \quad (5.1.33)$$

Aquí se ha introducido la notación $\lambda := \zeta\eta + \beta\Lambda$. Finalmente, la componente (t, t) de las ecuaciones de movimiento (5.0.3) generan una ecuación diferencial ordinaria sobre la función métrica $f(r)$. Sin embargo, bajo la sustitución

$$f(r) = -\frac{M}{r} + \frac{1}{r} \int \frac{k(r)}{\beta + \eta r^2} dr, \quad (5.1.34)$$

donde M corresponde a una constante de integración, la ecuación diferencial se transforma en una ecuación algebraica con $k(r)$ como solución de la forma

$$q^2\beta(\beta + \eta r^2)^2 - [2\zeta\beta + (2\zeta\eta - \lambda)r^2]k(r) + C_0k(r)^{3/2} = 0. \quad (5.1.35)$$

En síntesis, con las ecuaciones (5.1.33 - 5.1.35) y con la condición (5.0.5), se obtiene un sistema que satisfacen las ecuaciones de movimiento (5.0.3) y (5.0.4). Lo anterior permite exponer algunos ejemplos explícitos dependiendo de las restricciones de las constantes de acoplamiento, así como también de la constante cosmológica. En primer lugar, para $\Lambda = \eta = 0$ la ecuación (5.1.35) no depende de la coordenada radial r , obteniéndose una configuración stealth sobre la métrica de Schwarzschild donde

$$f(r) = g(r) = 1 - \frac{M}{r}, \quad (5.1.36)$$

con M correspondiente a una constante de integración. Además, el campo escalar es no trivial siendo de la forma

$$\Phi_{\pm}(r) = qt \pm qM \left[2\sqrt{\frac{r}{M}} + \log \frac{\sqrt{r} - \sqrt{M}}{\sqrt{r} + \sqrt{M}} \right] + \Phi_0, \quad (5.1.37)$$

donde Φ_0 es otra constante de integración. Al escoger los parámetros $\eta \neq 0$ y $\Lambda \neq 0$ junto con $\lambda = \zeta\eta + \beta\Lambda = 0$, se encuentra una solución donde las funciones métricas $f(r)$ y $g(r)$ adquieren la forma

$$f(r) = 1 - \frac{M}{r}, \quad g(r) = \left(1 - \frac{M}{r}\right) \left(1 + \frac{\eta r^2}{\beta}\right), \quad (5.1.38)$$

mientras que la parte radial del campo escalar $\Phi(t, r)$ está dado por

$$\psi'(r) = \pm \frac{q}{f(r)} \sqrt{\frac{M}{r(1 + \frac{\eta}{\beta}r^2)}}, \quad (5.1.39)$$

junto con la restricción $q^2 = 2\zeta/\beta$. Un hecho interesante es considerar el caso $f(r) = g(r)$, lo cual implica que $k(r) = \frac{(\beta + \eta r^2)^2}{\beta}$. Si lo anterior se complementa con las restricciones $q^2 = \lambda/(\beta\eta)$ y $C_0 = (2\zeta\eta - \lambda)\sqrt{\beta}/\eta$, se obtiene una solución donde las funciones métricas toman la forma

$$f(r) = g(r) = 1 - \frac{M}{r} + \frac{\eta}{3\beta}r^2, \quad (5.1.40)$$

correspondientes a la métrica Schwarzschild-(A)dS expuesta en (3.3.2) para una constante cosmológica efectiva $\Lambda_{\text{eff}} = -\zeta\eta/\beta$, además de

$$\psi'(r) = \pm \frac{q}{f(r)} \sqrt{1 - f(r)}. \quad (5.1.41)$$

Como último ejemplo, los autores en [129] estudian soluciones considerando un campo escalar estático, esto es $q = 0$, junto con $C_0 = \sqrt{\beta(4\zeta^2\eta^2 - \lambda^2)}/\eta$, obteniéndose una expresión para la función métrica $f(r)$ dada por

$$h(r) = 1 - \frac{M}{r} + \frac{\eta}{3\beta} \frac{2\zeta\eta - \lambda}{2\zeta\eta + \lambda} r^2 + \frac{\lambda^2}{4\zeta^2\eta^2 - \lambda^2} \frac{\arctan(r\sqrt{\eta/\beta})}{r\sqrt{\eta/\beta}}, \quad (5.1.42)$$

mientras que $g(r)$ se obtiene por medio de las ecuaciones (5.0.5) y (5.1.42). La sección radial del campo escalar es de la forma

$$(\psi'(r))^2 = -\frac{\zeta\eta^3 r^2 (2\zeta\beta + (2\zeta\eta - \lambda)r^2)^2}{\beta(4\zeta^2\eta^2 - \lambda^2)(\beta + \eta r^2)^3 f(r)}, \quad (5.1.43)$$

la cual diverge en el horizonte de eventos.

5.2. Agujeros negros de Lifshitz con un campo escalar dependiente del tiempo en una teoría de Horndeski

A continuación se analizarán soluciones de agujeros negros asintóticamente Lifshitz para una dimensión D arbitraria, presentes en el artículo [5], considerando un ansatz métrico de la forma (4.0.3) y utilizando como ecuación fundamental la condición (5.0.5) de manera de evadir el teorema de no-pelo expuesto en [124]. Bajo estas hipótesis, se prueba que no es posible hallar soluciones a las ecuaciones de movimiento (5.0.3) y (5.0.4) para un campo escalar dependiente de la coordenada radial r . Sin embargo, logramos solucionar este inconveniente agregando una dependencia temporal al campo escalar, obteniéndose una solución para un valor particular del exponente dinámico z .

Lifshitz black holes with a time-dependent scalar field in a Horndeski theory

Moisés Bravo Gaete* and Mokhtar Hassaine†

Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, Casilla 747, Talca, Chile

(Received 21 April 2014; published 16 May 2014)

In arbitrary dimensions, we consider a particular Horndeski action given by the Einstein-Hilbert Lagrangian with a cosmological constant term, while the source part is described by a real scalar field with its usual kinetic term together with a nonminimal kinetic coupling. In order to evade the no-hair theorem, we look for solutions where the radial component of the conserved current vanishes identically. Under this hypothesis, we prove that this model cannot accommodate Lifshitz solutions with a radial scalar field. This problem is finally circumvented by turning on the time dependence of the scalar field, and we obtain a Lifshitz black hole solution with a fixed value of the dynamical exponent $z = \frac{1}{3}$. The same metric is also shown to satisfy the field equations arising only from the variation of the matter source.

DOI: 10.1103/PhysRevD.89.104028

PACS numbers: 04.20.Jb, 04.50.Gh

I. INTRODUCTION

During the last decade, there has been intense activity to promote the ideas underlying the gauge-gravity duality to nonrelativistic physics. The hope is to gain a better understanding of some strongly coupled condensed matter physics phenomena observed in laboratories, for a review see, e.g., [1]. In this context, the so-called Schrödinger or Lifshitz spacetimes are the natural candidates to be the gravity duals for nonrelativistic scale invariant theories, [2–4]. In the present work, we are concerned with the Lifshitz spacetimes given by

$$ds_{\mathcal{L}}^2 = -r^{2z} dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2, \quad (1)$$

where the dynamical exponent z reflects the anisotropy of the scaling symmetry

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad r \rightarrow \frac{r}{\lambda}, \quad \vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x}.$$

Here, \vec{x} denotes a $(D-2)$ -dimensional vector. As it is now well known, for $z \neq 1$, in order for the Einstein gravity to accommodate the Lifshitz spacetime, some extra matter source is required, like p -form gauge fields or some Proca model, see, e.g., [5]. There also exists the option of considering higher-order gravity theories for which there exist examples of Lifshitz black holes without source, see, e.g., [6,7]. By Lifshitz black holes, we mean a black hole geometry whose asymptotic behavior reproduces the Lifshitz spacetime (1). In this work, we deal with a source of the Einstein equations given by a real scalar field with its usual kinetic term together with a nonminimal kinetic coupling. More precisely, we consider the following D -dimensional action

$$S = \int \sqrt{-g} d^D x \left(R - 2\Lambda - \frac{1}{2} (\alpha g_{\mu\nu} - \eta G_{\mu\nu}) \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \right), \quad (2)$$

where R and $G_{\mu\nu}$ stand, respectively, for the Ricci scalar and the Einstein tensor. This model is part of the so-called Horndeski action which is the most general tensor-scalar action yielding at most to second-order field equations in four dimensions [8]. The action also enjoys the shifting symmetry $\phi \rightarrow \phi + \text{const}$. The field equations obtained by varying the action with respect to the two dynamical fields $g_{\mu\nu}$ and ϕ read

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\alpha T_{\mu\nu}^{(1)} + \eta T_{\mu\nu}^{(2)}], \quad (3a)$$

$$\nabla_\mu [(\alpha g^{\mu\nu} - \eta G^{\mu\nu}) \nabla_\nu \phi] = 0, \quad (3b)$$

where the stress tensors $T_{\mu\nu}^{(i)}$ are defined by

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(1)} &= \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi \right). \\ T_{\mu\nu}^{(2)} &= \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi R - 2 \nabla_\lambda \phi \nabla_{(\mu} \phi R_{\nu)}^\lambda - \nabla^\lambda \phi \nabla^\rho \phi R_{\mu\lambda\nu\rho} \\ &\quad - (\nabla_\mu \nabla^\lambda \phi) (\nabla_\nu \nabla_\lambda \phi) + (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \square \phi + \frac{1}{2} G_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 \\ &\quad - g_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} (\nabla^\lambda \nabla^\rho \phi) (\nabla_\lambda \nabla_\rho \phi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\square \phi)^2 - \nabla_\lambda \phi \nabla_\rho \phi R^{\lambda\rho} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

The first exact black hole solution of these equations without the cosmological constant was found in [9]. However, in this case, the scalar field becomes imaginary outside the horizon. Recently, this problem has been circumvented by adding a cosmological constant term yielding to asymptotically locally (A)dS (and even flat for $\alpha = 0$) black hole solutions with a real scalar field outside the horizon [10]. The field equations (3) admit

*mbravog@inst-mat.otalca.cl

†hassaine@inst-mat.otalca.cl

other interesting solutions with a nontrivial and regular time-dependent scalar field on a static and spherically symmetric spacetime [11]. Interestingly enough, this solution in the particular case of $\Lambda = \eta = 0$ reduces to an unexpected stealth configuration on the Schwarzschild metric [11].

Because of the anisotropy symmetry, the $(D-2)$ -dimensional base manifold of Lifshitz spacetimes (1) is planar. For this reason, we will restrict ourselves to looking for black hole solutions whose horizon topology is planar. Moreover, in order to escape from the no-hair theorem established in [12], we will also impose by hand that the radial component of the conserved current vanishes identically without restricting the radial dependence of the scalar field, that is

$$\alpha g^{rr} - \eta G^{rr} = 0. \quad (5)$$

Note that in all the references previously cited [9,11], the different authors also consider this restriction that simplifies the field equations. Under these two hypotheses [planar base manifold and the condition (5)], we will see that the only solution with a static radial scalar field is a planar AdS black hole already reported in Ref. [10]. Nevertheless, in order to extend the space of admissible planar black hole solutions, we turn on the time dependence of the scalar field. In this case, the condition (5) will impose that the time dependence of the scalar field is linear. In doing so, we will effectively obtain a Lifshitz black hole solution with a linear time-dependent scalar field for a specific value of the dynamical exponent $z = \frac{1}{3}$. The plan of the paper is organized as follows. In the next section, we provide the general analysis for a static and radial scalar field, and see that the only solution with a planar base manifold is the AdS black hole solution obtained in [10]. In Sec. III, we turn on the time dependence of the scalar field and construct a Lifshitz black hole solution with a time-dependent scalar field characterized by a dynamical exponent $z = \frac{1}{3}$. The last section is devoted to our conclusions.

II. GENERAL ANALYSIS WITH A STATIC SCALAR FIELD

Let us consider the following Ansatz

$$ds_{D,\gamma}^2 = -h(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{D-2,\gamma}^2, \quad \phi = \phi(r), \quad (6)$$

where $d\Omega_{D-2,\gamma}^2$ represents the line element of a $(D-2)$ -dimensional sphere, plane or hyperboloid which corresponds, respectively, to $\gamma = 1, 0$ or $\gamma = -1$. Here, we are mainly interested in the planar case $\gamma = 0$ but we prefer to keep this general form in order to stress the particularity of considering the planar case $\gamma = 0$. In this case, the condition on the radial component of the current conservation (5) permits us to relate the two metric functions as

$$f = \frac{h[2\alpha r^2 + (D-3)(D-2)\gamma\eta]}{(D-2)\eta[h'r + (D-3)h]}. \quad (7)$$

We are now in position to solve the Einstein equations (3a); their (r, r) component allows to express $\psi_{\text{static}} := \phi'$ as

$$\psi(r)_{\text{static}}^2 = -\frac{4r^2(\Lambda\eta + \alpha)(D-2)[rh' + h(D-3)]}{[2\alpha r^2 + (D-2)(D-3)\eta\gamma]^2 h}.$$

Substituting these two expressions in the remaining independent Einstein equations, that is the (t, t) or (i, i) component, one obtains a second order differential equation for the metric function h . Under the following substitution

$$h(r) = -\frac{\mu}{r^{D-3}} + \frac{2}{r^{D-3}} \int \frac{j(r)dr}{2\alpha r^2 + \gamma\eta(D-2)(D-3)}, \quad (8)$$

where μ is an integration constant, the differential equation becomes a third-order algebraic equation for the function $j(r)$,

$$\varepsilon_{\text{static}} := j[r^2(\Lambda\eta - \alpha) - \gamma\eta(D-2)(D-3)] + \frac{C_0 j^{3/2}}{r^{\frac{D-4}{2}}} = 0, \quad (9)$$

where C_0 is a second integration constant. From this last expression, it is clear that in the case $\gamma = 0$, the only possibility for the function j , apart from the trivial case $j = 0$ which is of little interest, is for $j \propto r^D$ whose full integration yields the planar AdS black hole solution reported previously in [10]. It is also interesting to stress from the expression (9) that in the planar case $\gamma = 0$, the point $\alpha = \eta\Lambda$ is degenerate in the sense that it will impose $C_0 = 0$, and in turn, the function j will be undetermined. Hence, for $\gamma = 0$ and for $\alpha = \eta\Lambda$, any metric functions f and h satisfying the constraint (7) will be solution of the field equations.

In what follows, we will see that a way to extend the space of admissible planar black hole solutions is to turn on the time dependence of the scalar field.

III. LIFSHITZ BLACK HOLE WITH A TIME-DEPENDENT SCALAR FIELD

As seen previously, Lifshitz spacetimes (1) with a static radial scalar field cannot source the particular Horndeski considered here (2). Inspired by the work done in [11], we wonder whether there exist Lifshitz static black hole solutions with a nontrivial time-dependent scalar field $\phi = \phi(t, r)$ satisfying the field equations (3). In doing so, we consider again the same Ansatz for the metric (6). We first note that the (t, r) component of the Einstein equations gives

$$\{2(D-2)\eta\dot{\phi}'fhr - \dot{\phi}[(\eta(D-2)(D-3)(f-\gamma) - 2\alpha r^2)h + (D-2)\eta rh'f]\}\phi' = 0, \quad (10)$$

where $(\dot{})$ denotes the derivative with respect to the time t and (\prime) the derivative with respect to the radial coordinate. Apart from the trivial option $\phi' = 0$ that does not yield interesting result, this equation is easily integrated as

$$\phi(t, r) = \zeta(r) + q(t)e^{\chi(r)}, \quad (11)$$

where ζ (resp. q) is a function of the radial coordinate (resp. of the time), and where we have defined

$$\chi(r) = \frac{1}{2} \int \left[\frac{\eta(D-2)(D-3)(f-\gamma) - 2\alpha r^2}{(D-2)\eta f r} + \frac{h'}{h} \right] dr. \quad (12)$$

One can see that under our hypothesis (7), the expression between the brackets (12) vanishes, yielding a scalar field to be given by

$$\phi(t, r) = \zeta(r) + q(t).$$

Injecting this expression into the conservation equation (3b), this implies that the scalar field must be linear in time

$$\phi(t, r) = \zeta(r) + \phi_1 t, \quad (13)$$

where ϕ_1 is an integration constant. The (r, r) component of the Einstein equations (3a) allows us to express $\varphi := \zeta'$ as

$$\varphi(r)^2 = \frac{(D-2)\eta\phi_1^2 h' r}{[2\alpha r^2 + (D-2)(D-3)\gamma\eta]h^2} + \psi(r)_{\text{static}}^2, \quad (14)$$

and the remaining independent Einstein equation, given by the (t, t) or (i, i) component, yields a second order differential equation for the metric function h . As before, through the substitution (8), the metric function h will be given by (8) where now j is a solution of the following third-order algebraic equation

$$\frac{1}{8}(D-3)\eta\phi_1^2[(D-2)(D-3)\gamma\eta + 2\alpha r^2]^2 r^{D-4} + \varepsilon_{\text{static}} = 0, \quad (15)$$

where $\varepsilon_{\text{static}}$ is defined by (9).

Here, it is interesting to note that, in contrast with the purely static case, the point defined by $\alpha = \eta\Lambda$ and $\gamma = 0$ is not degenerate if one considers time-dependent scalar field, $\phi_1 \neq 0$. Indeed, in this case, we obtain a Lifshitz black hole solution with a dynamical exponent $z = \frac{1}{3}$ given by

$$ds^2 = -r^{\frac{2}{3}}g(r)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2g(r)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2, \quad (16a)$$

$$g(r) = 1 - \frac{M}{r^{\frac{3D-7}{3}}}, \quad (16b)$$

$$\phi(t, r) = \int \varphi(r)dr + \phi_1 t, \quad (16c)$$

where

$$\varphi(r)^2 = \frac{1}{r^{\frac{8}{3}}g(r)} \left[\frac{\phi_1^2}{g(r)} - \frac{3\phi_1^2(D-3)}{(3D-7)} - \frac{4r^{\frac{2}{3}}}{\eta} \right], \quad (17)$$

and, where the coupling constants are tied as

$$\alpha = \frac{1}{6}(D-2)\eta(3D-7), \quad \Lambda = \frac{\alpha}{\eta}. \quad (18)$$

In contrast with the zero- Λ case studied in [9], the presence of the constant ϕ_1 ensures that there always exists a range for the parameters such that $\varphi(r)^2 \geq 0$ at least outside the horizon as it occurs in the standard AdS case [10]. For example, for $\eta < 0$, if the constants of integration satisfy

$$\phi_1^2 \leq -\frac{4(3D-7)}{3\eta(D-3)} M^{\frac{2}{3D-7}}$$

this will imply that

$$-\frac{3\phi_1^2(D-3)}{(3D-7)} - \frac{4r^{\frac{2}{3}}}{\eta} \geq 0$$

and hence outside the horizon the expression $\varphi(r)^2 \geq 0$.

Three remarks can be made concerning this solution. First, the limiting case $M = 0$ is well defined and hence the field equations (3) may accommodate pure Lifshitz spacetimes (1) only with a time-dependent scalar field. Second, the coupling constants are tied as (18) which in turn implies that

$$\frac{\alpha}{\eta} = \Lambda = \frac{1}{6}(D-2)(3D-7),$$

and consequently the limiting cases $\alpha = 0$ or $\eta = 0$ cannot be obtained from the solution but rather they must be considered from Eqs. (8), (9), (15). For example, for $\alpha = 0$ and $\eta \neq 0$, in the static case (9), the solution turns out to be an asymptotically flat black hole reported in [10] while in the time-dependent case with $\Lambda = 0$, one can yield to a stealth solution on the Schwarzschild metric [11]. For $\eta = 0$, the condition on the radial component of the conserved current (5) would imply that the metric component $g_{rr} = 0$, and hence the metric will not be invertible in this case. We know that in the case of Einstein gravity with a minimal scalar field, the most general solution with spherical symmetry has been derived a long time ago in [13].

It is also interesting to note that the same metric (16a)–(16b) is also a particular solution of the Horndeski equations (3) without the Einstein-Hilbert- Λ pieces, that is it satisfies the equations

$$\alpha T_{\mu\nu}^{(1)} + \eta T_{\mu\nu}^{(2)} = 0, \quad (19)$$

provided that the scalar field is given by

$$\phi(t, r) = \phi_1 \left(\int \varphi(r) dr + t \right)$$

$$\varphi(r) = \pm \frac{1}{f(r)r^{\frac{3}{4}}} \sqrt{\frac{[(3D-7) - 3(D-3)f(r)]}{(3D-7)}}, \quad (20)$$

and for the coupling constants given by (18).

IV. CONCLUSIONS

Here, we have considered a particular case of the Horndeski theory whose gravity theory is given by the Einstein piece and whose matter source is described by a scalar field with its usual kinetic term as well as an additional nonminimal kinetic coupling. For this model and for a static scalar field, we have shown that besides a planar AdS black hole, this system cannot accommodate other solutions with a planar base manifold. In order to circumvent this problem, we have seen that turning on the time dependence of the scalar field is primordial to obtain Lifshitz solutions. We have effectively derived a Lifshitz black hole solution for a particular value of the dynamical exponent $z = \frac{1}{3}$. There is *a priori* no physical reasons to explain the occurrence of this particular value of the dynamical exponent. It will be interesting to see whether other sectors of the Horndeski action may accommodate more general Lifshitz solutions with other values of the dynamical exponents.

We also believe that, because of the structure of the solutions obtained in this paper as well as those derived in [9–11], the model considered here or maybe in more general sectors of the Horndeski theory can be a good

laboratory in order to gain more insight concerning the black hole solutions with scalar field. The task of finding interesting solutions can also be explored for the recent theory formulated in [14] and involving more than one scalar field but still yielding to second-order field equations.

We would like to mention that the problem of stability of the solution presented here is in some sense similar to what occurs in the case of the Bocharova-Bronnikov-Melnikov-Bekenstein solution in four dimensions [15,16]. Indeed, in this case, the solution suffers from the fact that the scalar field diverges at the horizon making its physical interpretation and the problem of its stability a subject of debate [17,18]. In the present case, in the action, the scalar field appears only through its derivatives and, its radial derivative is unfortunately diverging at the horizon. Note that this also occurs for the AdS solutions [10]. Finally, the thermodynamics issue of our solution is also an open problem because of its time-dependent character and also because of its unusual asymptotic behavior (Lifshitz with dynamical exponent $z = 1/3$). Future work to be done will consist in providing a consistent Hamiltonian formalism that accommodates the time-dependent character of the solution in order to compute the mass, the entropy, and also to give a physical interpretation to the additional constant ϕ_1 that appears in the solution.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Julio Oliva for useful discussions. M. B. is supported by BECA DOCTORAL CONICYT 21120271. M. H. was partially supported by Grant No. 1130423 from FONDECYT, by Grant No. ACT 56 from CONICYT and from CONICYT, Departamento de Relaciones Internacionales “Programa Regional MATHAMSUD 13 MATH-05”.

-
- [1] S. A. Hartnoll, *Classical Quantum Gravity* **26**, 224002 (2009).
 - [2] D. T. Son, *Phys. Rev. D* **78**, 046003 (2008).
 - [3] K. Balasubramanian and J. McGreevy, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 061601 (2008).
 - [4] S. Kachru, X. Liu, and M. Mulligan, *Phys. Rev. D* **78**, 106005 (2008).
 - [5] D.-W. Pang, *J. High Energy Phys.* 01 (2010) 116.
 - [6] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet, and M. Hassaine, *Phys. Rev. D* **80**, 104029 (2009).
 - [7] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet, and M. Hassaine, *J. High Energy Phys.* 04 (2010) 030.
 - [8] G. W. Horndeski, *Int. J. Theor. Phys.* **10**, 363 (1974).
 - [9] M. Rinaldi, *Phys. Rev. D* **86**, 084048 (2012).
 - [10] A. Anabalon, A. Cisterna, and J. Oliva, *Phys. Rev. D* **89**, 084050 (2014).
 - [11] E. Babichev and C. Charmousis, [arXiv:1312.3204](https://arxiv.org/abs/1312.3204).
 - [12] L. Hui and A. Nicolis, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 241104 (2013).
 - [13] B. C. Xanthopoulos and T. Zannias, *Phys. Rev. D* **40**, 2564 (1989).
 - [14] A. Padilla, D. Stefanyshyn, and M. Tsoukalas, *Phys. Rev. D* **89**, 065009 (2014).
 - [15] N. M. Bocharova, K. A. Bronnikov, and V. N. Melnikov, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 3: Fiz., Astron.* **6**, 706 (1970) [*Moscow Univ. Phys. Bull.* **25**, 80 (1970)].
 - [16] J. D. Bekenstein, *Ann. Phys. (N.Y.)* **91**, 75 (1975).
 - [17] K. A. Bronnikov and Y. N. Kireev, *Phys. Lett.* **67A**, 95 (1978).
 - [18] P. L. McFadden and N. G. Turok, *Phys. Rev. D* **71**, 086004 (2005).

5.3. Termodinámica de un agujero negro BTZ con una fuente de Horndeski

En tres dimensiones se considera la acción (5.0.2), donde al satisfacer la condición (5.0.5), de manera tal que la componente radial de la corriente conservada se desvanezca, se obtiene de manera natural la solución conocida en la literatura como BTZ [130]. Para que el campo escalar Φ posea una condición real, se debe imponer una restricción a la constante cosmológica Λ , donde en el caso límite $\Lambda = -1/l^2$ la solución se reduce al agujero negro BTZ con Φ nulo. Adicionalmente, se estudian sus respectivas propiedades termodinámicas, las cuales satisfacen la primera ley (4.1.4). Asimismo, se extiende la solución anterior para dimensiones superiores, donde la métrica adquiere la forma (3.3.2) con $\gamma = 0$.

Debido a la importancia de la solución BTZ a continuación estudiaremos esta configuración, primero considerando la acción de Einstein-Hilbert junto con una constante cosmológica negativa, para luego analizar la inclusión de un campo eléctrico.

Agujero negro BTZ

En el año de 1992, Máximo Bañados, Claudio Teitelboim y Jorge Zanelli descubren una solución de agujero negro para un espacio-tiempo de tres dimensiones, caracterizado por su masa, carga y momento angular [130]. Lo novedoso de esta teoría es la inclusión de una constante cosmológica negativa

$$\Lambda = -\frac{1}{l^2}. \quad (5.3.1)$$

Su respectiva acción es la siguiente

$$S[g_{\mu\nu}] = \kappa \int d^3x \sqrt{-g} [R + 2l^{-2}], \quad (5.3.2)$$

donde κ es una constante de acoplamiento. En este caso, se obtiene una solución rotante dada por

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta}{4l^2 r^2}\right) dt^2 + \left(\frac{\Delta}{4l^2 r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\varphi - \frac{J}{2r^2}\right)^2, \quad (5.3.3)$$

donde se ha definido

$$\Delta := 4 \left[r^4 - M l^2 r^2 + \left(\frac{Jl}{2}\right)^2 \right], \quad (5.3.4)$$

con $t \in (-\infty, +\infty)$, $r \in (0, +\infty)$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$. Las constantes M y J que aparecen en (5.3.4) corresponden a constantes de integración, las cuales son cargas conservadas asociadas a la masa y al momento angular respectivamente. Notemos que la función Δ se anula cuando la coordenada radial toma los valores

$$r_{\pm} = l \left\{ \frac{M}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml}\right)^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (5.3.5)$$

donde el horizonte del agujero negro está dado en r_+ . Además, para que éste exista, se debe tener en cuenta que

$$M > 0, \quad |J| \leq Ml, \quad (5.3.6)$$

y para el caso extremo $|J| = Ml$, ambas raíces coinciden.

De la solución encontrada en (5.3.3) podemos obtener el *estado vacío*, el cual corresponde al desvanecimiento de la solución de agujero negro haciendo $M \rightarrow 0$, lo cual implica de (5.3.6) que $J \rightarrow 0$, obteniéndose

$$ds_{\text{vacío}}^2 = -\left(\frac{r}{l}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{r}{l}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (5.3.7)$$

donde la singularidad es desnuda. No obstante, existe un caso particular imponiendo las condiciones $M = -1$ y $J = 0$, permitiendo desaparecer este tipo de singularidad, sin la presencia de un horizonte de eventos

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (5.3.8)$$

Asimismo, los autores realizan un análisis de la solución agregando el campo eléctrico a la acción (5.3.2), donde la única componente no nula del vector potencial viene dada por

$$A_t(r) = -Q \log\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (5.3.9)$$

donde Q es una constante de integración asociada a la carga eléctrica y definen r_0 como un punto de referencia arbitraria para la energía. El elemento de línea de esta nueva solución es la siguiente

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta}{4l^2 r^2} - \frac{1}{2} Q^2 \log(r)\right) dt^2 + \left(\frac{\Delta}{4l^2 r^2} - \frac{1}{2} Q^2 \log(r)\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\varphi - \frac{J}{2r^2}\right)^2, \quad (5.3.10)$$

donde el horizonte de sucesos existe para cualquier valor de la constante Q , junto con la restricción (5.3.6).

Por otra parte, al encontrar soluciones de agujero negros, para caracterizar cada una de las constantes de integración a los respectivos parámetros termodinámicos resulta conveniente escribir la acción en su forma Hamiltoniana [84]. Dado que para este caso en particular se estudiará una solución estática con un campo escalar dependiente solamente de la coordenada radial r , se trabajará mediante el principio de acción reducida

$$I_E = I_G + I_M + B_E, \quad (5.3.11)$$

donde I_G e I_M son las acciones asociadas a la gravitación y a la fuente de materia respectivamente. Notemos que el subíndice E nos da a entender que la acción será tomada considerando una métrica Euclideana, con un tiempo Euclidiano dado por $\tau = it$, el cual es periódico con período β donde la temperatura de Hawking está dada por $T = \beta^{-1}$. La clase de métrica Euclidiana en dimensión D considerada aquí es la siguiente

$$ds_0^2 = N(r)^2 f(r) d\tau^2 + \frac{dt^2}{f(r)} + r^2 d\Sigma_{D-2,0}^2. \quad (5.3.12)$$

Además, en la acción reducida (5.3.11) aparece un parámetro B_E , el cual es un término de frontera que es necesario sumar para que la acción Euclidiana tenga un extremo, esto es $\delta I_E = 0$ [84]. Todo lo anterior será analizado a continuación y corresponde al artículo [6].

Thermodynamics of a BTZ black hole solution with a Horndeski source

Moises Bravo-Gaete^{*} and Mokhtar Hassaine[†]

Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, Casilla 747, Talca, Chile

(Received 22 May 2014; published 1 July 2014)

In three dimensions, we consider a particular truncation of the Horndeski action that reduces to the Einstein-Hilbert Lagrangian with a cosmological constant Λ and a scalar field whose dynamics is governed by its usual kinetic term together with a nonminimal kinetic coupling. Requiring the radial component of the conserved current to vanish, the solution turns out to be the BTZ black hole geometry with a radial scalar field well defined at the horizon. This means in particular that the stress tensor associated to the matter source behaves on shell as an effective cosmological constant term. We construct a Euclidean action whose field equations are consistent with the original ones and such that the constraint on the radial component of the conserved current also appears as a field equation. With the help of this Euclidean action, we derive the mass and the entropy of the solution, and find that they are proportional to the thermodynamical quantities of the BTZ solution by an overall factor that depends on the cosmological constant. The reality condition and the positivity of the mass impose the cosmological constant to be bounded from above as $\Lambda \leq -\frac{1}{l^2}$ where the limiting case $\Lambda = -\frac{1}{l^2}$ reduces to the BTZ solution with a vanishing scalar field. Exploiting a scaling symmetry of the reduced action, we also obtain the usual three-dimensional Smarr formula. In the last section, we extend all these results in higher dimensions where the metric turns out to be the Schwarzschild-anti-de Sitter spacetime with planar horizon.

DOI: 10.1103/PhysRevD.90.024008

PACS numbers: 04.50.Kd, 04.20.Jb, 04.50.-h

I. INTRODUCTION

Since the discovery of the BTZ black hole solution [1], three-dimensional Einstein gravity with a negative cosmological constant has become an important field of investigation. A considerable number of papers has been devoted to the physical and mathematical implications of the BTZ solution in particular in the context of AdS₃/CFT₂ correspondence. Indeed, it is now well accepted that three-dimensional gravity is an excellent laboratory in order to explore and test some of the ideas behind the AdS/CFT correspondence [2].

It is well known that the static BTZ geometry whose line element is given by

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2} - M\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{l^2} - M} + r^2 d\varphi^2 \quad (1)$$

is a solution of the Einstein equations with a fixed value of the negative cosmological constant $-l^{-2}$,

$$G_{\mu\nu} - l^{-2}g_{\mu\nu} = 0.$$

Here, we will exhibit a matter action that sources the BTZ spacetime. In order to achieve this task, the corresponding stress tensor $T_{\mu\nu}$ of the matter source must behave on shell as an effective cosmological constant term, i.e.

$$T_{\mu\nu}^{\text{on shell}} = (l^{-2} + \Lambda)g_{\mu\nu}.$$

Indeed, in this case, it is simple to realize that the Einstein equations

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

will automatically be satisfied on the BTZ metric (1). For that purpose, we consider the following three-dimensional action

$$S = \int \sqrt{-g} d^3x \left(R - 2\Lambda - \frac{1}{2}(\alpha g_{\mu\nu} - \eta G_{\mu\nu}) \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \right), \quad (2)$$

where R and $G_{\mu\nu}$ stand respectively for the Ricci scalar and the Einstein tensor. This model is part of the so-called Horndeski action which is the most general tensor-scalar action yielding at most to second-order field equations in four dimensions [3]. In three dimensions, the corresponding field equations are also of second order, and are given by

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\alpha T_{\mu\nu}^{(1)} + \eta T_{\mu\nu}^{(2)}], \quad (3a)$$

$$\nabla_\mu [(\alpha g^{\mu\nu} - \eta G^{\mu\nu}) \nabla_\nu \phi] = 0, \quad (3b)$$

where the stress tensors $T_{\mu\nu}^{(i)}$ are defined by

^{*}mbravog@inst-mat.otalca.cl
[†]hassaine@inst-mat.otalca.cl

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(1)} &= \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi \right), \\
T_{\mu\nu}^{(2)} &= \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi R - 2 \nabla_\lambda \phi \nabla_{(\mu} \phi R_{\nu)}^\lambda - \nabla^\lambda \phi \nabla^\rho \phi R_{\mu\lambda\nu\rho} \\
&\quad - (\nabla_\mu \nabla^\lambda \phi) (\nabla_\nu \nabla_\lambda \phi) + (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \square \phi + \frac{1}{2} G_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 \\
&\quad - g_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} (\nabla^\lambda \nabla^\rho \phi) (\nabla_\lambda \nabla_\rho \phi) + \frac{1}{2} (\square \phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - \nabla_\lambda \phi \nabla_\rho \phi R^{\lambda\rho} \right]. \tag{4}
\end{aligned}$$

The scalar field equation (3b) is a current conservation equation which is a consequence of the shift symmetry of the action, $\phi \rightarrow \phi + \text{const}$.

The first exact black hole solution of these equations without cosmological constant was found in [4]. However, in this case, the scalar field becomes imaginary outside the horizon. Indeed, in the notations of [4], $\alpha = 1$ and $\eta = z$ with z proportional to the inverse of the graviton mass. In this case, the scalar field is given by

$$(\phi')^2 = -\frac{A^2}{z(m_p^2 + z)^3 F(r)},$$

where A is a constant and m_p is the Planck mass. However, considering the case with $z > 0$, the square of the derivative of the scalar field becomes negative outside the horizon. Recently, this problem has been circumvented by adding a cosmological constant term in [5] whose direct effect is that one can have $(\phi')^2 > 0$ outside the horizon with $\eta = z > 0$ by adjusting the sign of the cosmological constant yielding to asymptotically locally (A)dS (and even flat for $\alpha = 0$) black hole solutions with a real scalar field outside the horizon [5]. The electric charged version of the AdS solutions has been studied in [6]. The field equations (3) admit other interesting solutions with a nontrivial and regular time-dependent scalar field on a static and spherically symmetric spacetime [7]. Interestingly enough, this solution in the particular case of $\Lambda = \eta = 0$ reduces to an unexpected stealth configuration on the Schwarzschild metric [7]. There also exist Lifshitz black hole solutions with a time-independent scalar field for a fixed value of the dynamical exponent $z = \frac{1}{3}$ [8]. Solutions for a more general truncation of the Horndeski action that is shift invariant as well as enjoying the reflection symmetry $\phi \rightarrow -\phi$ have been obtained in [9]. In all these examples, in order to avoid the no-hair theorem established in [10], the geometry has been chosen such that

$$\alpha g^{rr} - \eta G^{rr} = 0. \tag{5}$$

We note that this condition simplifies considerably the field equations in particular in the time-independent case where the full conservation equation (3b) is automatically

satisfied without constraining the radial dependence of the scalar field.

In the present work, we will show that the BTZ geometry naturally emerges as a solution of this particular Horndeski action (2) in three dimensions subjected to the condition (5). We will also analyze the thermodynamical implications of such solution and extend all our results in arbitrary dimension. The plan of the paper is organized as follows. In the next section, we present in details the derivation of the solution using the constraint (5). In Sec. III, we construct a Euclidean action whose field equations turn out to be consistent with the original ones and such that the constraint on the radial current (5) naturally appears as a field equation. This construction will be useful to obtain the mass and the entropy of the solution. The usual Smarr formula is also derived by exploiting a scaling symmetry of the reduced action. The rotating version of the solution as well as a particular example of a time-dependent solution will be reported in Sec. IV. In Sec. V, we extend all the results to arbitrary dimension where the metric solution is nothing but the Schwarzschild-AdS spacetime with planar horizon. The last section is devoted to our conclusions.

II. DERIVATION OF THE SOLUTION

Let us derive the most general solution of the field equations (3) subjected to the condition (5) with an ansatz of the form

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -h(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\varphi^2, \\
\phi &= \phi(r). \tag{6}
\end{aligned}$$

For clarity, we define

$$\epsilon_{\mu\nu} := G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} [\alpha T_{\mu\nu}^{(1)} + \eta T_{\mu\nu}^{(2)}].$$

The condition (5) on the geometry becomes

$$f(r) = \frac{2\alpha r h(r)}{\eta h'(r)}, \tag{7}$$

and automatically implies that the current conservation (3b) is satisfied. Using this last relation, the radial component of the Einstein equations $\epsilon_{rr} = 0$ allows us to express the square of the derivative of the scalar field as

$$(\phi')^2 = -\frac{(\alpha + \eta\Lambda)h'}{\alpha^2 r h}.$$

The remaining independent Einstein equation, $\epsilon_{tt} = 0$ or equivalently $\epsilon_{\varphi\varphi} = 0$, yields

$$\epsilon_{tt} \propto (\alpha - \eta\Lambda)[r h'' - h'] = 0.$$

Hence, it is clear that the point defined by $\alpha = \eta\Lambda$ corresponds to a degenerate sector [8], while for $\alpha \neq \eta\Lambda$, the solution is given by

$$h(r) = Cr^2 - M, \quad f(r) = \frac{\alpha}{\eta C}(Cr^2 - M),$$

where C and M are two integration constants. In order to deal with the BTZ metric (1), we choose $C = l^{-2}$ and the coupling constants must be fixed such that

$$\frac{\alpha}{\eta} = l^{-2}. \quad (8)$$

This means that the effective cosmological constant is fixed in terms of the coupling constants of the problem and does not correspond in general to the bulk cosmological constant. This is what differentiates our solution from the BTZ one. Note also that the degenerate sector $\alpha = \eta\Lambda$ imposes a choice of the cosmological constant

$$\Lambda^{\text{degenerate}} = l^{-2}. \quad (9)$$

In sum, for $\frac{\alpha}{\eta} = l^{-2}$ and $\Lambda \neq \Lambda^{\text{deg}}$, the solution is given by the BTZ metric (1) together with a radial scalar field

$$\xi(r) := (\phi')^2 = -\frac{2(\Lambda l^2 + 1)}{\eta(\frac{r^2}{l^2} - M)}, \quad (10a)$$

$$\phi(r) = \pm \sqrt{-\frac{2l^2(\Lambda l^2 + 1)}{\eta} \ln \left(\frac{r}{l} + \sqrt{\frac{r^2}{l^2} - M} \right)}, \quad (10b)$$

provided that

$$\frac{2l^2(\Lambda l^2 + 1)}{\eta} \leq 0. \quad (11)$$

Various comments can be made concerning this solution. First, we note that for $\Lambda = -l^{-2}$, the scalar field vanishes identically and the solution reduces to the BTZ solution. Second, the scalar field is well defined at the horizon $r_+ = l\sqrt{M}$ and outside the horizon. Also, as expected the stress tensor of the matter part behaves on shell as an effective cosmological constant

$$\frac{1}{2} [\alpha T_{\mu\nu}^{(1)} + \eta T_{\mu\nu}^{(2)}]_{\text{on shell}} = (\Lambda + l^{-2})g_{\mu\nu}. \quad (12)$$

We would like to stress that in the starting action, the scalar field only appears through its derivative and hence one should worry about their regularity. However, it is easy to

see that the kinetic term $g^{rr}(\phi')^2$ as well as the nonminimal coupling term $G^{rr}(\phi')^2$ will be well defined at the horizon since $(\phi')^2 \propto g_{rr}$ [11]. As a last comment, we remark that for $\alpha > 0$ which corresponds to the right sign of the standard kinetic term, the previous reality conditions (8)–(11) will imply that $\eta > 0$ and the cosmological constant Λ must be bounded from above as $\Lambda \leq -l^{-2}$. In the absence the cosmological constant, as it is the case in [4] and for $\eta > 0$, we do not have this freedom $(\phi')^2 < 0$ outside the horizon.

In what follows, we will derive the mass and the entropy of the solution (10).

III. THERMODYNAMICS OF THE BLACK HOLE SOLUTION

The partition function for a thermodynamical ensemble is identified with the Euclidean path integral in the saddle point approximation around the Euclidean continuation of the classical solution [12]. The Euclidean and Lorentzian action are related by $I_E = -iI$ where the periodic Euclidean time is $\tau = it$. The Euclidean continuation of the class of metrics considered here is given by [13]

$$ds^2 = N^2(r)F(r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2d\varphi^2.$$

In order to avoid conical singularity at the horizon in the Euclidean metric, the Euclidean time is made periodic with period β and the Hawking temperature T is given by $T = \beta^{-1}$. Since we are only interested in a static solution with a radial scalar field, it is enough to consider a *reduced* action principle. However, there is an important subtlety that has to do with the constraint (5) we used in order to derive our solution. Indeed, this constraint together with the fact of looking for a static scalar field make the equation associated to the variation of the scalar field (3b) redundant in the sense that the equation is automatically satisfied. Hence, in our reduced action, the constraint (5) should appear as a field equation in order to deal with an equivalent problem. This can be achieved considering the following Euclidean action

$$I_E := I_E(N, F, \xi) = 2\pi\beta \int_{r_+}^{\infty} N \left[F' + 2\Lambda r + \frac{\alpha}{2} r F \xi + \frac{3}{4} \eta F F' \xi + \frac{\eta}{2} F^2 \xi' \right] dr + B_E, \quad (13)$$

where the dynamical field is chosen to be $\xi(r) := (\phi')^2$ and not the scalar field itself ϕ . Note that r_+ is the location of the horizon and B_E is a boundary term that is fixed by requiring that the Euclidean action has an extremum, that is $\delta I_E = 0$, [14]. In this case, the variation with respect to the dynamical fields N, F and ξ yield

$$\begin{aligned}
 E_N &:= F' + 2\Lambda r + \frac{\alpha}{2} r F \xi + \frac{3}{4} \eta F F' \xi + \frac{\eta}{2} F^2 \xi' = 0, \\
 E_F &:= -N' \left(1 + \frac{3}{4} \eta F \xi \right) + N \left(\frac{\alpha}{2} r \xi + \frac{1}{4} \eta F \xi' \right) = 0, \\
 E_\xi &:= -\frac{\eta}{2} N' F^2 + N \left(\frac{\alpha}{2} r F - \frac{1}{4} \eta F' F \right) = 0, \quad (14)
 \end{aligned}$$

and the last equation $E_\xi = 0$ is nothing but the constraint used previously [(5)] to obtain our solution. At the special point $\alpha = \frac{\eta}{l^2}$, the equations (14) turn out to be equivalent to the original ones supplemented by the constraint (5). Indeed, the most general solution of the system (14) can be derived as follows. For $X(r) := 4 + 3\eta F(r)\xi(r) \neq 0$ [15], we consider the combination

$$-\frac{2\eta F^2}{X} E_F + \frac{\eta N F}{X} E_N + E_\xi = 0,$$

which permits us to obtain

$$\xi(r) = -\frac{2(\Lambda l^2 + 1)}{\eta F(r)}.$$

Injecting this expression into $E_N = 0$, one obtains that $F(r) = r^2/l^2 - M$ where M is an integration constant, and finally the equation $E_\xi = 0$ implies that N is constant which can be chosen to 1 without any loss of generality. Hence, at $\alpha = \frac{\eta}{l^2}$, the most general solution of the system (14) is given by

$$N(r) = 1, \quad F(r) = \frac{r^2}{l^2} - M, \quad \xi(r) = -\frac{2(\Lambda l^2 + 1)}{\eta F(r)}, \quad (15)$$

and corresponds to the solution obtained previously [(10)]. We now determine the boundary term of the Euclidean action which is given by

$$\delta B_E = -2\pi\beta \left[\delta F \left(1 + \frac{3}{4} \eta F \xi \right) + \frac{\eta}{2} F^2 \delta \xi \right]_{r_+}^\infty. \quad (16)$$

In order to obtain δB_E , we need the variations of the field solutions (15) at infinity

$$\delta F|_\infty = -\delta M, \quad (F^2 \delta \xi)|_\infty = \frac{2(\Lambda l^2 + 1)}{\eta} \delta F|_\infty,$$

while at the horizon, they are given by

$$\begin{aligned}
 \delta F|_{r_+} &= -F'|_{r_+} \delta r_+ = -\frac{4\pi}{\beta} \delta r_+, \\
 (F^2 \delta \xi)|_{r_+} &= \frac{2(\Lambda l^2 + 1)}{\eta} \delta F|_{r_+} = -\frac{2(\Lambda l^2 + 1) 4\pi}{\eta \beta} \delta r_+.
 \end{aligned}$$

Hence, we have

$$I_E = B_E(\infty) - B_E(r_+) = 2\pi[\beta M - 4\pi r_+] \left(\frac{1 - \Lambda l^2}{2} \right),$$

and, we can identify the mass \mathcal{M} and the entropy \mathcal{S} of the solution to be given by

$$\mathcal{M} = \frac{\partial I_E}{\partial \beta}, \quad \mathcal{S} = \beta \frac{\partial I_E}{\partial \beta} - I_E,$$

yielding

$$\mathcal{M} = 2\pi M \left(\frac{1 - \Lambda l^2}{2} \right), \quad \mathcal{S} = 8\pi^2 \left(\frac{1 - \Lambda l^2}{2} \right) r_+. \quad (17)$$

Since the Hawking temperature is given by $T = \frac{1}{2\pi} r_+$, it is easy to see that the first law $d\mathcal{M} = T d\mathcal{S}$ holds. In the BTZ case $\Lambda = -l^{-2}$, the scalar field vanishes and the mass and entropy reduce to the thermodynamical quantities of the BTZ solution [1].

We can now go further by exploiting a scaling symmetry of the reduced action in order to obtain the usual three-dimensional Smarr formula in the same lines as those done in Ref. [16]. In fact, it is easy to see that the reduced action (13) enjoys the following scaling symmetry

$$\begin{aligned}
 \bar{r} &= \sigma r, & \bar{N}(\bar{r}) &= \sigma^{-2} N(r), \\
 \bar{F}(\bar{r}) &= \sigma^2 F(r), & \bar{\xi}(\bar{r}) &= \sigma^{-2} \xi(r), \quad (18)
 \end{aligned}$$

from which one can derive a Noether quantity

$$C(r) = N \left[\left(1 + \frac{3}{4} \eta F \xi \right) (-2F + rF') + \frac{\eta}{2} F^2 (r\xi' + 2\xi) \right],$$

which is conserved $C'(r) = 0$ by virtue of the field equations (14). Evaluating this quantity at infinity and at the horizon, one gets

$$\begin{aligned}
 C(r = \infty) &= M(1 - \Lambda l^2), \\
 C(r = r_+) &= \frac{4\pi}{\beta} r_+ \left(\frac{1 - \Lambda l^2}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Since the Noether charge is conserved, these expressions must be equal

$$M(1 - \Lambda l^2) = \frac{4\pi}{\beta} r_+ \left(\frac{1 - \Lambda l^2}{2} \right),$$

which in turn implies the following Smarr formula

$$\mathcal{M} = \frac{T}{2} \mathcal{S}. \quad (19)$$

This latter corresponds to the standard three-dimensional Smarr formula [17].

IV. ROTATING, TIME-DEPENDENT AND STEALTH SOLUTIONS

Operating a Lorentz boost in the plane (t, φ) , we obtain the rotating version of the solution found previously. At the point $\alpha = \eta l^{-2}$, the metric function turns out to be the rotating BTZ

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 \left(d\varphi - \frac{J}{2r^2} dt \right)^2, \quad (20)$$

where the structural function F is given by

$$F(r) = \frac{r^2}{l^2} - M + \frac{J^2}{4r^2}, \quad (21)$$

and, where J corresponds to the angular momentum. The scalar field solution reads

$$\xi(r) := (\phi'(r))^2 = -\frac{2(l^2\Lambda + 1)}{\eta F(r)}. \quad (22)$$

We also report two solutions with a linear time scalar field on the rotating BTZ metric (20). The first one is obtained for $\alpha = \eta l^{-2}$ and given by

$$\phi(t, r) = qt \pm \int \sqrt{\frac{q^2\eta - 2F(r)(\Lambda l^2 + 1)}{\eta F(r)^2}} dr, \quad (23)$$

where q is a constant. The second solution corresponds to a stealth configuration, that is a solution where both sides of the Einstein equations (3a) vanish identically

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 = \frac{1}{2} [\alpha T_{\mu\nu}^{(1)} + \eta T_{\mu\nu}^{(2)}]. \quad (24)$$

In fact, for $\Lambda = -1/l^2$, a solution of the stealth equations (24) is given by the rotating BTZ metric (20) together with a time-dependent scalar field

$$\phi(t, r) = q \left(t \pm \int \frac{dr}{F(r)} \right), \quad (25)$$

where q is a constant. This stealth solution is different from the one derived in [18], where in this reference the authors considered as a source a scalar field nonminimally coupled whose action is given by

$$\int \sqrt{-g} d^3x \left(R - 2\Lambda - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\xi}{2} R \phi^2 - U(\phi) \right),$$

where U is a potential term involving power laws of ϕ expressed in terms of the nonminimal coupling parameter ξ .

Moreover, in [18], the time-dependent stealth only exists in the case of the static BTZ metric, that is for $J = 0$.

V. EXTENSION TO HIGHER DIMENSIONS

We now extend our analysis in arbitrary D dimensions with the action

$$S = \int \sqrt{-g} d^Dx \left(R - 2\Lambda - \frac{1}{2} (\alpha g_{\mu\nu} - \eta G_{\mu\nu}) \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \right), \quad (26)$$

for which the field equations are given by (3). Here, we will consider an ansatz metric with a planar horizon and a static radial scalar field

$$ds^2 = -N^2 F dt^2 + \frac{dr^2}{F} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2, \\ \phi = \phi(r).$$

The solution of the field equations for this ansatz subjected to the constraint (5) is now given by the Schwarzschild-AdS metric with a planar horizon

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\vec{x}_{D-2}^2, \quad (27a)$$

$$F(r) = \frac{r^2}{l^2} - \frac{M}{r^{D-3}}, \quad (27b)$$

$$\xi(r) := (\phi')^2 = -\frac{2(2l^2\Lambda + (D-1)(D-2))}{\eta(D-1)(D-2)F(r)}, \quad (27c)$$

provided that

$$\frac{\alpha}{\eta} = \frac{(D-1)(D-2)}{2l^2}. \quad (28)$$

Note that as in the three-dimensional case, one can obtain an explicit expression of the scalar field

$$\phi(r) = \pm \frac{2}{(D-1)} \sqrt{-\frac{2l^2[2\Lambda l^2 + (D-1)(D-2)]}{\eta(D-1)(D-2)}} \\ \times \ln \left[r^{\frac{D-3}{2}} \left(\frac{r}{l} + \sqrt{\frac{r^2}{l^2} - \frac{M}{r^{D-3}}} \right) \right].$$

In the case $D = 3$, the solution reduces to the one previously derived [(10)] on the BTZ spacetime, and in $D = 4$, this solution was already reported in Ref. [5]. As before, the stress tensor associated to the variation of the matter source behaves on shell as an effective cosmological constant term, that is

$$\frac{1}{2}[\alpha T_{\mu\nu}^{(1)} + \eta T_{\mu\nu}^{(2)}]_{\text{on shell}} = \left(\Lambda + \frac{(D-1)(D-2)}{2l^2} \right) g_{\mu\nu}.$$

The reality condition (27c) together with the relation (28) and requiring the standard kinetic term to have the right sign $\alpha > 0$ impose the cosmological constant Λ to be bounded from above as

$$\Lambda \leq -\frac{(D-1)(D-2)}{2l^2}. \quad (29)$$

The Euclidean action is now given by

$$I_E(N, F, \xi) = \beta \text{Vol}(\Sigma_{D-2}) \int_{r_+}^{\infty} N \left[(D-2)r^{D-3}F' + 2\Lambda r^{D-2} + \frac{\alpha}{2}r^{D-2}F\xi + \frac{3(D-2)}{4}r^{D-3}\eta FF'\xi \right. \\ \left. + \frac{(D-2)\eta}{2}r^{D-3}F^2\xi' + (D-2)(D-3) \left(r^{D-4}F + \frac{\eta}{4}F^2\xi r^{D-4} \right) \right] dr + B_E, \quad (30)$$

where $\text{Vol}(\Sigma_{D-2})$ stands for the volume of the compact $(D-2)$ -dimensional planar manifold, and $r_+ = (l^2 M)^{1/(d-1)}$ is the location of the horizon. The variation with respect to the dynamical fields N, F and ξ yield

$$E_N := (D-2)r^{D-3}F' + 2\Lambda r^{D-2} + \frac{\alpha}{2}r^{D-2}F\xi \\ + \frac{3(D-2)}{4}r^{D-3}\eta FF'\xi + \frac{(D-2)\eta}{2}r^{D-3}F^2\xi' \\ + (D-2)(D-3) \left(r^{D-4}F + \frac{\eta}{4}F^2\xi r^{D-4} \right) = 0, \\ E_F := -N' \left((D-2)r^{D-3} + \frac{3}{4}(D-2)r^{D-3}\eta F\xi \right) \\ + N \left(\frac{\alpha}{2}r^{D-2}\xi + \frac{(D-2)}{4}r^{D-3}\eta F\xi' \right. \\ \left. - \frac{(D-3)(D-2)}{4}r^{D-4}F\eta\xi \right) = 0, \\ E_\xi := -\frac{(D-2)}{2}\eta r^{D-3}N'F^2 \\ + N \left(\frac{\alpha}{2}r^{D-2}F - \frac{(D-2)}{4}r^{D-3}\eta FF' \right. \\ \left. - \frac{(D-3)(D-2)}{4}r^{D-4}F^2\eta \right) = 0,$$

and the last equation $E_\xi = 0$ is again proportional to the constraint (5) used previously to obtain the solution. As before, at the special point (28), this system of equations is equivalent to our original equations supplemented by the constraint (5) which also appears as a field equation. The most general solution yields to (27) together with $N(r) = 1$.

We are now in position to compute the variation

$$\delta B_E = -\beta \text{Vol}(\Sigma_{D-2})(D-2)r^{D-3} \\ \times \left[\delta F \left(1 + \frac{3}{4}\eta F\xi \right) + \frac{\eta}{2}F^2\delta\xi \right]_{r_+}^{\infty}, \quad (31)$$

which permits us to obtain that

$$I_E = \frac{(D-1)(D-2) - 2l^2\Lambda}{2(D-1)} [\beta M - 4\pi r_+^{D-2}].$$

We derive the mass $\mathcal{M} = \frac{\partial I_E}{\partial \beta}$ and the entropy $\mathcal{S} = \beta \frac{\partial I_E}{\partial \beta} - I_E$ that read

$$\mathcal{M} = \left[\frac{(D-1)(D-2) - 2l^2\Lambda}{2(D-1)} \right] M \text{Vol}(\Sigma_{D-2}), \\ \mathcal{S} = \left[\frac{(D-1)(D-2) - 2l^2\Lambda}{2(D-1)} \right] 4\pi r_+^{D-2} \text{Vol}(\Sigma_{D-2}), \quad (32)$$

and once again, one can easily check that the first law holds. For the Schwarzschild-AdS case, that is for $\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2l^2}$, these formulas reduce to those found in [19]. Finally, the Noether conserved quantity

$$C(r) = Nr^{D-3}(D-2) \left[\left(1 + \frac{3}{4}\eta F\xi \right) (-2F + rF') \right. \\ \left. + \frac{\eta}{2}F^2(r\xi' + 2\xi) \right], \quad (33)$$

which is a consequence of the scaling symmetry of the reduced action (30)

$$\bar{r} = \sigma r, \quad \bar{N}(\bar{r}) = \sigma^{1-D}N(r), \\ \bar{F}(\bar{r}) = \sigma^2 F(r), \quad \bar{\xi}(\bar{r}) = \sigma^{-2}\xi(r) \quad (34)$$

permits us to derive the following Smarr formula

$$\mathcal{M} = \frac{1}{D-1} TS. \quad (35)$$

One may mention that the previous scaling symmetry will not be possible in the case of spherical or hyperboloid horizon.

VI. CONCLUSIONS

We have been concerned with a particular truncation of the Horndeski theory in three dimensions given by the Einstein-Hilbert piece plus a cosmological constant and a scalar field with its usual kinetic term and a nonminimal kinetic coupling. For this model, we have derived the most general solution subjected to the condition (5). In this case, the metric turns out to be the BTZ spacetime and the radial scalar field is shown to be well defined at the horizon. We have seen that such solution occurs because the stress tensor associated to the variation of the matter source behaves on shell as a cosmological constant term. The constraint on the radial component of the conserved current (5) together with the fact of looking for a static scalar field only impose a restriction on the geometry and not on the scalar field. In other words, this means that the field equation associated to the variation of the scalar field is automatically satisfied without imposing any restriction on the radial dependence of the scalar field. In order to compute the mass and the entropy of the solution, we have constructed a Euclidean action whose field equations turn out to be equivalent to the original Einstein equations and such that the constraint on the radial component of the conserved current appears also as a field equation. This last fact has resulted to be primordial to obtain the mass and the entropy, and we have verified that the first law was satisfied. This reduced action has also been useful in order to derive the usual Smarr formula by exploiting a scaling symmetry. We have extended all these results in arbitrary dimension where the metric solution is nothing but the Schwarzschild-AdS spacetime with a planar horizon. In this case also, we have been able to construct an Euclidean action whose field equations are equivalent to the original ones supplemented by the constraint condition on the geometry (5). In all these examples, the horizon topology

is planar but this hypothesis is only essential in order to establish a scaling symmetry of the reduced action. In fact, in the spherical or hyperboloid cases, one would be able to construct along the same lines the Euclidean action sharing the same features except enjoying the scaling symmetry. In higher dimensions, the authors of Ref. [5] have considered the same model and found black hole solutions with spherical and hyperboloid horizon topology. In these cases, they have computed the thermodynamical quantities by regularizing the action with the use of a regular soliton solution. It will be interesting to see whether the Euclidean approach described here may yield the same results. It is also appealing that up to now all the known solutions of the equations (3) are those where the constraint (5) is imposed. It will be interesting to see whether there exist other solutions for which the radial component of the current conservation is not vanishing. Finally, we have also obtained a particular time-dependent solution where the scalar field depends linearly on the time. For such solution, the issue concerning the thermodynamical analysis is not clear for us. Hence, a natural work will consist of providing a consistent Hamiltonian formalism in order to compute the mass, the entropy and also to give a physical interpretation on the additional constant q that appears in the solution. This problem will also be relevant in the context of the Lifshitz case where the known solutions [8,9] are necessarily time dependent.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Julio Oliva for useful discussions. M. B. is supported by BECA DOCTORAL CONICYT Grant No. 21120271. M. H. is partially supported by Grant No. 1130423 from FONDECYT and from CONICYT, Departamento de Relaciones Internacionales “Programa Regional MATHAMSUD 13 MATH-05.”

-
- [1] M. Bañados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1849 (1992).
 - [2] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998).
 - [3] G. W. Horndeski, *Int. J. Theor. Phys.* **10**, 363 (1974).
 - [4] M. Rinaldi, *Phys. Rev. D* **86**, 084048 (2012).
 - [5] A. Anabalón, A. Cisterna, and J. Oliva, *Phys. Rev. D* **89**, 084050 (2014).
 - [6] A. Cisterna and C. Erices, *Phys. Rev. D* **89**, 084038 (2014).
 - [7] E. Babichev and C. Charmousis, [arXiv:1312.3204](https://arxiv.org/abs/1312.3204).
 - [8] M. Bravo-Gaete and M. Hassaine, [arXiv:1312.7736](https://arxiv.org/abs/1312.7736).
 - [9] T. Kobayashi and N. Tanahashi, [arXiv:1403.4364](https://arxiv.org/abs/1403.4364).
 - [10] L. Hui and A. Nicolis, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 241104 (2013).
 - [11] We thank the referee for pointing out this issue.
 - [12] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15**, 2752 (1977).
 - [13] For the ansatz considered in (6), this will correspond to $h(r) = N(r)^2 F(r)$ and $f(r) = F(r)$.
 - [14] T. Regge and C. Teitelboim, *Ann. Phys. (N.Y.)* **88**, 286 (1974).
 - [15] For $X(r) = 0$, one ends with a particular case of (10) with a fixed value of the cosmological constant $\Lambda = -\frac{1}{3l^2}$.
 - [16] M. Banados and S. Theisen, *Phys. Rev. D* **72**, 064019 (2005).
 - [17] L. Smarr, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 71 (1973).
 - [18] E. Ayón-Beato, C. Martínez, and J. Zanelli, *Gen. Relativ. Gravit.* **38**, 145 (2006).
 - [19] D. Birmingham, *Classical Quantum Gravity* **16**, 1197 (1999).

Capítulo 6

Conclusiones y comentarios

En el capítulo 3 se entregaron los conceptos fundamentales referentes a los artículos [1,2], considerando una teoría gravitatoria dada por una clase particular del Lagrangiano de Lovelock la cual puede ser vista como una generalización de la gravedad de Einstein en dimensión D arbitraria produciendo a lo más ecuaciones de segundo orden para la métrica. Esta clase particular de teoría se encuentra caracterizada por un entero k , fijando los coeficientes para obtener un único vacío AdS y asignando un valor particular a la constante cosmológica. Inicialmente, comenzamos nuestro estudio considerando el caso particular $k = 2$ correspondiente a la combinación de la acción de Einstein-Hilbert con una constante cosmológica negativa junto con el término de Gauss-Bonnet, luego lo generalizamos para una acción arbitraria $k \geq 2$.

Por otro lado, la parte asociada a la fuente de materia corresponde a un campo escalar no mínimamente acoplado a la curvatura escalar, junto con un potencial dado por un término de masa. Para este modelo se derivaron dos clases de agujeros negros con una topología del horizonte de eventos planar, rotulados por k y la dimensión D , determinados por valores particulares del parámetro de acoplamiento no minimal ξ . La primera clase de solución depende solamente de una constante de integración, mientras que la segunda depende de dos parámetros y es interpretada como una configuración stealth. Adicionalmente, se agregó a la acción $(D - 2)$ -campos, los cuales corresponden a $(D - 1)$ -formas exactas acopladas al campo escalar, logrando construir soluciones más generales donde la constante de acoplamiento ξ es arbitraria. Cada una de estas soluciones poseen su origen de una configuración stealth sobre la métrica AdS dada en (3.3.3) a través de una transformación de Kerr-Schild. Es importante tener en cuenta que estas soluciones son consideradas para $k \geq 2$, donde el caso particular $k = 1$ no puede ser obtenido por medio del mismo procedimiento, lo que conlleva a la importancia de los términos de curvatura superior en nuestras soluciones.

En [61,62], además de estudiar teorías gravitatorias sin una fuente de materia, se estudiaron soluciones de agujeros negros eléctricamente cargados considerando una fuente de Maxwell estándar (3.1.22). Es natural cuestionarse si es posible encontrar versiones cargadas eléctricamente para las soluciones encontradas en [1,2].

Por otra parte, resulta interesante estudiar los efectos termodinámicos de esta clase de teoría. Recientemente, en [113] dan a conocer configuraciones mucho más generales donde nuestros resultados corresponden a un caso particular, concluyendo que tanto la masa como la entropía se desvanecen.

En el capítulo 4, en primer lugar se dieron los conceptos claves a los resultados presentes en [3], donde se

analizó una acción gravitatoria tridimensional dada por una teoría caracterizada por una combinación especial de las correcciones invariantes cuadráticas, conocida como nueva gravedad masiva, junto con una fuente de materia asociada a un campo escalar no mínimamente acoplado y un potencial. Para este modelo, se estudiaron las propiedades termodinámicas a tres diferentes clases de soluciones de agujeros negros asintóticamente Lifshitz. En particular, mediante el formalismo cuasilocal, el cual corresponde a una generalización del método ADT, se obtuvieron las respectivas masas de estas soluciones, las cuales complementadas con la entropía de Wald (4.1.22) y la temperatura de Hawking (4.1.5) verificamos que se satisface la primera ley de la termodinámica (4.1.4).

Por otro lado, para cada una de estas soluciones podemos encontrar sus homólogos solitónicos. Manteniendo el mismo espíritu y mediante una transformación adecuada de coordenadas, logramos calcular sus masas corroborando la validez de la fórmula de Cardy generalizada, donde el estado fundamental es asumido por la correspondiente solución solitónica con masa M_{sol} . Sería interesante trabajar con la generalización dimensional de estas soluciones, donde cada uno de los parámetros termodinámicos se pueden obtener por medio de un procedimiento similar [112].

En segundo lugar, dentro del mismo capítulo se analizaron soluciones cargadas asintóticamente Lifshitz presentes en [4] determinadas por la acción de Einstein-Hilbert con una constante cosmológica junto con las correcciones de curvaturas cuadráticas más generales, además de una fuente de materia correspondiente a un campo de Maxwell lineal. Asimismo, a través de ejemplos concretos confirmamos la validez del formalismo cuasilocal propuesto en [92, 93]. De lo anterior es posible mostrar la existencia de cuatro clases de estas soluciones, donde dos de ellas no requieren una restricción para el exponente dinámico z . Tres de estos agujeros negros cargados son interpretados como extremales en el sentido que la masa se desvanece mientras que la carga eléctrica es no nula. Para la última familia, tanto la masa como la carga eléctrica dependen de una única constante de integración. Para todos estos casos se muestra que la primera ley (4.1.4) se satisface. En general, estas clases de soluciones son para una dimensión $D \geq 5$ debido a la presencia de un término adicional en las correcciones de curvaturas cuadráticas. No obstante, la solución con masa no nula puede reducirse al caso tridimensional donde la carga eléctrica se desvanece y obtenemos la masa del agujero negro de Lifshitz para la teoría gravitatoria nueva gravedad masiva [108] con $z = 3$.

En el capítulo 5 se analizó un caso particular de la teoría de Horndeski dada por la acción de Einstein-Hilbert junto a un campo escalar con su respectivo término cinético y un término cinético no mínimamente acoplado al tensor de Einstein. En particular, en [5] se estudió esta clase de teoría considerando soluciones de agujeros negros asintóticamente Lifshitz, llegando a la conclusión que la dependencia del campo escalar respecto a la coordenada radial y temporal es esencial. Más aún, cada una de estas soluciones se determinan para un valor particular del exponente dinámico $z = 1/3$. Dado que solamente estamos trabajando un sector de esta teoría, sería interesante considerar otros sectores de la acción de Horndeski los cuales permitan extender las soluciones para otros valores del exponente dinámico.

Por otra parte, mirando desde el punto de vista termodinámico y dado que esta solución posee una dependencia temporal del campo escalar, queda como un problema abierto la construcción de un formalismo que permita acomodar la característica temporal de la solución y así obtener parámetros termodinámicos tales como la masa y entropía. Adicionalmente, en [6] se estudió la misma teoría considerando en primer

lugar el caso particular tridimensional con un ansatz métrico dado en (3.3.1) con $\gamma = 0$, sujeta a la condición (5.0.5) donde se obtiene de manera natural la geometría del agujero negro BTZ junto con un campo escalar dependiente de la coordenada radial, el cual es bien definido en el horizonte de eventos. Del mismo modo, se extendieron estos resultados en dimensión D -arbitraria cuya solución corresponde a la métrica de Schwarzschild-AdS con un horizonte planar dado en (3.3.2), estudiando sus respectivos parámetros termodinámicos mediante la construcción de una acción Euclidiana obteniéndose la masa y la entropía, verificando que la primera ley de la termodinámica (4.1.4) se satisface. Asimismo, para el caso tridimensional se estudió el caso rotante, logrando encontrar dos clases de soluciones, ambas dependientes del tiempo. Debido a esta particularidad de dependencia temporal del campo escalar, aún no está claro para nosotros el estudio asociado a la termodinámica de estas soluciones, así como también la existencia de agujeros negros con momento angular para dimensiones superiores. Por último, dado que tanto para [5] como [6] se considera la condición (5.0.5), sería interesante encontrar soluciones, si es que existen, de tal manera que la componente radial de la corriente conservada J^r de (5.0.4) no se desvanezca.

Capítulo 7

Apéndice

De manera tal que la sección 4.5 sea lo más clara posible, a continuación daremos a conocer las distintas expresiones para los coeficientes σ_{ij} , ψ_{ij} y ω_{ij} que aparecen en la ecuación (4.5.12).

$$\sigma_{14} = -\{2\beta_1 D^2 + [(4z - 10)\beta_1 - 4\beta_3(1 + z)]D + 4\beta_3(2z + 3) + 4\beta_1(3 - 2z) - 1\} \\ \bigg/ 2(z^2 + D - 2) = -\sigma_{24} = -2\psi_{23} = -\frac{2}{D}\psi_{22} = 4\omega_{22} = \sigma_{34} = \frac{1}{2(z + D + 1)}\sigma_{33} = -4\omega_{52},$$

$$\sigma_{13} = \{-10\beta_1 D^3 + [(20\beta_3 - 32\beta_1)z + 50\beta_1 + 16\beta_3]D^2 + [(20\beta_3 - 20\beta_1)z^2 + (92\beta_1 - 8\beta_3)z \\ + 5 - 56\beta_1 - 36\beta_3]D + (-40\beta_3 + 40\beta_1)z^2 + (-56\beta_1 + 6 - 88\beta_3)z - 40\beta_3 - 8\beta_1 + 2\} \\ \bigg/ 4(z^2 + D - 2) = -\sigma_{23},$$

$$\sigma_{12} = \{-8\beta_1 D^4 + [(16\beta_3 - 36\beta_1)z + 8\beta_3 + 50\beta_1]D^3 + [(32\beta_3 - 36\beta_1)z^2 + (132\beta_1 + 12\beta_3)z \\ - 24\beta_3 + 4 - 86\beta_1]D^2 + [(16\beta_3 - 16\beta_1)z^3 + (96\beta_1 - 68\beta_3)z^2 + (10 - 116\beta_1 - 152\beta_3)z \\ + 28\beta_1 - 4\beta_3 - 1]D + (32\beta_1 - 32\beta_3)z^3 + (2 - 48\beta_1)z^2 + (56\beta_3 - 8\beta_1 - 2)z + 16\beta_1 \\ - 16\beta_3\} \bigg/ 4(z^2 + D - 2) = -\sigma_{22},$$

$$\sigma_{11} = \{-2\beta_1 D^5 + [(4\beta_3 - 12\beta_1)z + 18\beta_1]D^4 + [(12\beta_3 - 14\beta_1)z^2 + (60\beta_1 + 16\beta_3)z - 4\beta_3 \\ - 50\beta_1 + 1]D^3 + [(20\beta_3 - 8\beta_1)z^3 + (46\beta_1 - 32\beta_3)z^2 + (4 - 172\beta_3 - 84\beta_1)z + 16\beta_3 \\ - 2 + 46\beta_1]D^2 + [(4\beta_3 - 4\beta_1)z^4 + (20\beta_1 - 104\beta_3)z^3 + (1 - 24\beta_1)z^2 + (-10 + 376\beta_3 \\ + 4\beta_1)z + 1 + 4\beta_1 - 28\beta_3]D + (-8\beta_3 + 8\beta_1)z^4 + (-6 - 8\beta_1 + 152\beta_3)z^3 + (-24\beta_1 + 24\beta_3)z^2 \\ + (10 + 40\beta_1 - 280\beta_3)z - 16\beta_1 + 16\beta_3\} \bigg/ 4(z^2 + D - 2) = \frac{1}{2}(2 - D) - \sigma_{21},$$

$$\sigma_{10} = [2\beta_3(D - 3)(D - 4) - 1]z(z + D - 2),$$

$$\begin{aligned}\sigma_{20} &= -z\beta_3 D^3 - \left[z\beta_3(z-9) + \frac{1}{4} \right] D^2 - \left[z \left(26\beta_3 - 7z\beta_3 - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{4} \right] D - \left(12\beta_3 - \frac{1}{2} \right) z^2 \\ &\quad - (1 - 24\beta_3)z - \frac{1}{2} = -\sigma_{50} - \frac{1}{2}(D-1)(D-2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{21} &= \{ 2\beta_1 D^4 + [(-4\beta_3 + 8\beta_1)z - 18\beta_1] D^3 + [(-6\beta_1 - 4\beta_3)z^2 + (-8\beta_3 - 28\beta_1)z + 4\beta_3 - 1 \\ &\quad + 50\beta_1] D^2 + [(-4\beta_1 + 4\beta_3)z^3 + (26\beta_1 + 44\beta_3)z^2 + (20\beta_1 - 2 + 84\beta_3)z - 12\beta_3 + 2 - 50\beta_1] D \\ &\quad + (8\beta_1 - 8\beta_3)z^3 + (-28\beta_1 + 5 - 92\beta_3)z^2 + (8\beta_1 + 4 - 104\beta_3)z - 1 + 12\beta_3 + 12\beta_1 \} \\ &\quad / 8(z^2 + D - 2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{32} &= \{ -2\beta_1 D^4 + [(4\beta_3 - 8\beta_1)z + 6\beta_1 + 4\beta_3] D^3 + [(8\beta_3 - 6\beta_1)z^2 + (20\beta_3 + 4\beta_1)z - 12\beta_3 \\ &\quad + 18\beta_1 + 1] D^2 + [(-8\beta_1 + 8\beta_3)z^3 + (6\beta_1 - 20\beta_3)z^2 + (64\beta_1 - 84\beta_3 + 2)z + 4\beta_3 \\ &\quad - 66\beta_1 + 2] D + (16\beta_1 - 16\beta_3)z^3 + (12\beta_3 - 1 + 12\beta_1)z^2 + (32\beta_3 + 2 - 80\beta_1)z \\ &\quad - 1 + 44\beta_1 - 20\beta_3 \} / 2(z^2 + D - 2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{31} &= -\left\{ \beta_1 D^3 + [-2z^2\beta_1 + (-8\beta_3 + 9\beta_1)z - 10\beta_1 + 2\beta_3] D^2 + [2(\beta_1 - \beta_3)z^3 + (6\beta_3 + 8\beta_1)z^2 \right. \\ &\quad \left. + (28\beta_3 - 35\beta_1)z - \frac{1}{2} + 27\beta_1 - 8\beta_3 \right] D + 4(-\beta_1 + \beta_3)z^3 + \left(-\frac{1}{2} + 34\beta_1 - 22\beta_3 \right) z \\ &\quad \left. + (1 - 8\beta_1 - 16\beta_3)z^2 + \frac{1}{2} - 22\beta_1 + 10\beta_3 \right\} (z + D - 1) / (z^2 + D - 2),\end{aligned}$$

$$\sigma_{30} = -(D-2)(z-1),$$

$$\begin{aligned}\sigma_{44} &= \{ -2\beta_1 D^2 + [6\beta_1 - 4(\beta_1 - \beta_3)z + 8\beta_3] D + 4(-\beta_1 + \beta_3)z^2 + 8(\beta_1 - \beta_3)z - 20\beta_3 - 4\beta_1 + 1 \} \\ &\quad / 4(z^2 + D - 2) = -\psi_{53} + 2(\beta_3 - \beta_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{43} &= \{ -2\beta_1 D^3 + [(4\beta_3 - 6\beta_1)z + 8\beta_3 + 4\beta_1] D^2 + [(6\beta_1 + 8\beta_3)z - 8(\beta_1 - \beta_3)z^2 + 6\beta_1 + 1 \\ &\quad - 16\beta_3] D + (-8\beta_1 + 8\beta_3)z^3 - 8(\beta_3 - \beta_1)z^2 + 1 + (12\beta_1 + 1 - 36\beta_3)z - 12\beta_3 - 12\beta_1 \} \\ &\quad / 2(z^2 + D - 2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{42} &= \{ -2\beta_1 D^4 + [(4\beta_3 - 8\beta_1)z + 8\beta_3 + 2\beta_1] D^3 + [(12\beta_3 - 6\beta_1)z^2 + (40\beta_3 - 24\beta_1)z - 28\beta_3 \\ &\quad + 1 + 34\beta_1] D^2 + [(20\beta_3 - 20\beta_1)z^3 - 42z^2\beta_1 + (2 + 152\beta_1 - 116\beta_3)z + 2 - 86\beta_1 + 24\beta_3] D \\ &\quad + (20\beta_3 - 20\beta_1)z^4 + (-8\beta_3 + 8\beta_1)z^3 + (-32\beta_3 + 104\beta_1 - 3)z^2 + (-144\beta_1 + 6)z - 1 \\ &\quad - 28\beta_3 + 52\beta_1 \} / 4(z^2 + D - 2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{41} = & \{ -2\beta_1 D^4 + [8z^2\beta_1 + (20\beta_3 - 32\beta_1)z - 8\beta_3 + 26\beta_1] D^3 + [8z^3\beta_1 + (20\beta_3 - 94\beta_1)z^2 \\
& + (-80\beta_3 + 176\beta_1)z + 36\beta_3 + 1 - 90\beta_1] D^2 + [(-60\beta_1 + 4\beta_3)z^3 + (-40\beta_3 + 262\beta_1 - 4)z^2 \\
& - 56\beta_3 + 118\beta_1 + 2 - 8(\beta_1 - \beta_3)z^4 + (2 + 84\beta_3 - 312\beta_1)z] D + 8(-\beta_1 + \beta_3)z^5 \\
& - 4(-\beta_1 + \beta_3)z^4 + (13 - 8\beta_3 - 208\beta_1)z^2 + (88\beta_1 + 8\beta_3 - 8)z^3 - 7 + (176\beta_1 + 2 - 32\beta_3)z \\
& + 28\beta_3 - 52\beta_1 \} / 4 (z^2 + D - 2),
\end{aligned}$$

$$\sigma_{40} = -(z + D - 2)(z - 1),$$

$$\sigma_{52} = -\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}
\psi_{52} = & \{ 6\beta_1 D^3 + [(24\beta_1 - 12\beta_3)z - 46\beta_1] D^2 + [(-104\beta_1 + 20\beta_3)z + 12(\beta_1 - \beta_3)z^2 + 100\beta_1 - 3] D \\
& + 12(-\beta_1 + \beta_3)z^3 + 28(-\beta_1 + \beta_3)z^2 - 64\beta_1 + (32\beta_3 + 112\beta_1 - 6)z + 2 + 16\beta_3 \} \\
& / 4 (z^2 + D - 2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{51} = & \{ 6\beta_1 D^4 + [(32\beta_1 - 12\beta_3)z - 54\beta_1] D^3 + [(-28\beta_3 + 46\beta_1)z^2 + (32\beta_3 - 204\beta_1)z - 3 \\
& + 174\beta_1 - 12\beta_3] D^2 + [52\beta_3 - 238\beta_1 + 2 + (428\beta_1 - 10 + 36\beta_3)z + (76\beta_3 - 202\beta_1)z^2 \\
& + 12(\beta_1 - \beta_3)z^3] D + (16\beta_3 - 16\beta_1)z^4 + 32(-\beta_1 + \beta_3)z^3 - 44\beta_3 + (-12\beta_3 + 228\beta_1 - 13)z^2 \\
& + 116\beta_1 + (16 - 88\beta_3 - 296\beta_1)z + 5 \} / 8 (z^2 + D - 2),
\end{aligned}$$

$$\psi_{50} = -\frac{1}{2}(3z + 2D - 5).$$

Bibliografía

- [1] M. Bravo Gaete and M. Hassaine, *Topological black holes for Einstein-Gauss-Bonnet gravity with a nonminimal scalar field*, Phys. Rev. D **88**, 104011 (2013) [arXiv:1308.3076 [hep-th]].
- [2] M. Bravo Gaete and M. Hassaine, *Planar AdS black holes in Lovelock gravity with a nonminimal scalar field*, JHEP **1311**, 177 (2013) [arXiv:1309.3338 [hep-th]].
- [3] E. Ayón-Beato, M. Bravo Gaete, F. Correa, M. Hassaine, M. M. Juárez-Aubry and J. Oliva, *First law and anisotropic Cardy formula for three-dimensional Lifshitz black holes*, Phys. Rev. D **91**, 064006 (2015) [arXiv:1501.01244 [gr-qc]].
- [4] M. Bravo Gaete and M. Hassaine, *Thermodynamics of charged Lifshitz black holes with quadratic corrections*, Phys. Rev. D **91**, 064038 (2015) [arXiv:1501.03348 [hep-th]].
- [5] M. Bravo Gaete and M. Hassaine, *Lifshitz black holes with a time-dependent scalar field in Horndeski theory*, Phys. Rev. D **89**, 104028 (2014) [arXiv:1312.7736 [hep-th]].
- [6] M. Bravo Gaete and M. Hassaine, *Thermodynamics of a BTZ black hole solution with an Horndeski source*, Phys. Rev. D **90**, 024008 (2014) [arXiv:1405.4935 [hep-th]].
- [7] A. Einstein, *On the General Theory of Relativity*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1915** (1915) 778-786.
- [8] A. Einstein, *The Field Equations of Gravitation*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1915** (1915) 844-847.
- [9] A. Einstein, *The Foundation of the General Theory of Relativity*, Annalen Phys. **49** (1916) 769-822.
- [10] B. Janssen, *Teoría de la Relatividad General*, Universidad de Granada, 2013.
- [11] N. Straumann, *The History of the cosmological constant problem*, [gr-qc/0208027].
- [12] S. Carroll, *Spacetime and Geometry, an introduction to General Relativity*, Addison Wesley, 2004.
- [13] Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, and Eduard Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge University Press, 2002.
- [14] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984.

- [15] K. Schwarzschild, *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1916**, 189 (1916) [physics/9905030].
- [16] E. A. Larrañaga, *Agujeros Negros Clásicos*, AshCat Publishers, 2011.
- [17] H. Reissner, *Über die Eigengravitation des Elektrischen Feldes nach Einsteinschen Theorie*, Ann. Phys. **59** (1916) 106-120.
- [18] G. Nordström, *On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **20** (1918) 1238-1245.
- [19] R. P. Kerr, *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*, Phys. Rev. Lett. **11**, 237 (1963) 237-238.
- [20] M. Visser, *The Kerr spacetime: A Brief introduction*, [arXiv:0706.0622 [gr-qc]].
- [21] J. M. Maldacena, *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999) [Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998)] [hep-th/9711200].
- [22] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, *Gauge theory correlators from noncritical string theory*, Phys. Lett. B **428**, 105 (1998) [hep-th/9802109].
- [23] E. Witten, *Anti-de Sitter space and holography*, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998) [hep-th/9802150].
- [24] I. R. Klebanov and J. M. Maldacena, *Solving quantum field theories via curved spacetimes*, Phys. Today **62**, 28 (2009).
- [25] E. Papantonopoulos, *From gravity to thermal gauge theories: The AdS/CFT correspondence*, Lect. Notes Phys. **828**, 1 (2011).
- [26] A. Einstein, *Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1917**, 142 (1917).
- [27] S. W. Hawking, *Black holes in general relativity*, Commun. Math. Phys. **25**, 152 (1972).
- [28] W. Israel, *Event horizons in static vacuum space-times*, Phys. Rev. **164**, 1776 (1967).
- [29] W. Israel, *Event horizons in static electrovac space-times*, Commun. Math. Phys. **8**, 245 (1968).
- [30] J. L. Friedman, K. Schleich and D. M. Witt, *Topological censorship*, Phys. Rev. Lett. **71**, 1486 (1993) [Erratum-ibid. **75**, 1872 (1995)] [gr-qc/9305017].
- [31] R. Emparan and H. S. Reall, *A Rotating black ring solution in five-dimensions*, Phys. Rev. Lett. **88**, 101101 (2002) [hep-th/0110260].
- [32] R. B. Mann, *Pair production of topological anti-de Sitter black holes*, Class. Quant. Grav. **14**, L109 (1997) [gr-qc/9607071].
- [33] L. Vanzo, *Black holes with unusual topology*, Phys. Rev. D **56**, 6475 (1997) [gr-qc/9705004].

- [34] D. R. Brill, J. Louko and P. Peldán, *Thermodynamics of (3+1)-dimensional black holes with toroidal or higher genus horizons*, Phys. Rev. D **56**, 3600 (1997) [gr-qc/9705012].
- [35] D. Birmingham, *Topological black holes in Anti-de Sitter space*, Class. Quant. Grav. **16**, 1197 (1999) [hep-th/9808032].
- [36] R. Ruffini and J. Wheeler, *Introducing the Black Hole*, Physics Today **B24** (1971) 30.
- [37] B. Carter, *Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom*, Phys. Rev. Lett. **26**, 331 (1971).
- [38] R. M. Wald, *Final States of Gravitational Collapse*, Phys. Rev. Lett. **26** (1971) 1653.
- [39] D. C. Robinson, *Uniqueness of the Kerr black hole*, Phys. Rev. Lett. **34**, 905 (1975).
- [40] J. D. Bekenstein, *Black holes: Classical properties, thermodynamics and heuristic quantization*, [gr-qc/9808028].
- [41] N. M. Bocharova, K. A. Bronnikov and V. N. Melnikov, *An exact solution of the system of Einstein equations and mass-free scalar field*, Vestn. Mosk. Univ. Fiz. Astron. **6** (1970) 706 [Moscow Univ. Phys. Bull. **25** (1970) 80].
- [42] J. D. Bekenstein, *Exact Solutions Of Einstein Conformal Scalar Equations*, Annals Phys. **82**, 535 (1974).
- [43] B.C. Xanthopoulos and T. Zannias, *The uniqueness of the Bekenstein black hole*, J. Math. Phys. **32**, 1875 (1991).
- [44] B.C. Xanthopoulos and T.E. Dialynas, *Einstein gravity coupled to a massless conformal scalar field in arbitrary space time dimensions*, J. Math. Phys. **33**, 1463 (1992).
- [45] J. D. Bekenstein, *Black Holes with Scalar Charge*, Annals Phys. **91**, 75 (1975).
- [46] K. A. Bronnikov and Yu. N. Kireyev, *Instability of Black Holes with Scalar Charge*, Phys. Lett. A **67**, 95 (1978).
- [47] C. Martínez, R. Troncoso and J. Zanelli, *De Sitter black hole with a conformally coupled scalar field in four-dimensions*, Phys. Rev. D **67**, 024008 (2003) [hep-th/0205319].
- [48] C. Martínez, J. P. Staforelli and R. Troncoso, *Topological black holes dressed with a conformally coupled scalar field and electric charge*, Phys. Rev. D **74**, 044028 (2006) [hep-th/0512022].
- [49] E. Ayón-Beato, C. Martínez and J. Zanelli, *Stealth scalar field overflying a (2+1) black hole*, Gen. Rel. Grav. **38**, 145 (2006) [hep-th/0403228].
- [50] A. Anabalón and A. Cisterna, *Asymptotically (anti) de Sitter Black Holes and Wormholes with a Self Interacting Scalar Field in Four Dimensions*, Phys. Rev. D **85**, 084035 (2012) [arXiv:1201.2008 [hep-th]].
- [51] Y. Bardoux, M. M. Caldarelli and C. Charmousis, *Shaping black holes with free fields*, JHEP **1205**, 054 (2012) [arXiv:1202.4458 [hep-th]].

- [52] Y. Bardoux, M. M. Caldarelli and C. Charmousis, *Conformally coupled scalar black holes admit a flat horizon due to axionic charge*, JHEP **1209**, 008 (2012) [arXiv:1205.4025 [hep-th]].
- [53] M. M. Caldarelli, C. Charmousis and M. Hassaine, *AdS black holes with arbitrary scalar coupling*, JHEP **1310**, 015 (2013) [arXiv:1307.5063 [hep-th]].
- [54] C. Charmousis, *Higher order gravity theories and their black hole solutions*, Lect. Notes Phys. **769**, 299 (2009) [arXiv:0805.0568 [gr-qc]].
- [55] C. Lanczos, *A Remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor in four dimensions*, Annals Math. **39**, 842 (1938).
- [56] D. Lovelock, *The Einstein tensor and its generalizations*, J. Math. Phys. **12**, 498 (1971).
- [57] C. Garraffo and G. Giribet, *The Lovelock Black Holes*, Mod. Phys. Lett. A **23**, 1801 (2008) [arXiv:0805.3575 [gr-qc]].
- [58] X. O. Camanho and J. D. Edelstein, *A Lovelock black hole bestiary*, Class. Quant. Grav. **30**, 035009 (2013) [arXiv:1103.3669 [hep-th]].
- [59] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Dimensionally continued black holes*, Phys. Rev. D **49**, 975 (1994) [gr-qc/9307033].
- [60] R. G. Cai and K. S. Soh, *Topological black holes in the dimensionally continued gravity*, Phys. Rev. D **59**, 044013 (1999) [gr-qc/9808067].
- [61] J. Crisóstomo, R. Troncoso and J. Zanelli, *Black hole scan*, Phys. Rev. D **62**, 084013 (2000) [hep-th/0003271].
- [62] R. Aros, R. Troncoso and J. Zanelli, *Black holes with topologically nontrivial AdS asymptotics*, Phys. Rev. D **63**, 084015 (2001) [hep-th/0011097].
- [63] D. G. Boulware and S. Deser, *String Generated Gravity Models*, Phys. Rev. Lett. **55**, 2656 (1985).
- [64] J. T. Wheeler, *Symmetric Solutions to the Gauss-Bonnet Extended Einstein Equations*, Nucl. Phys. B **268**, 737 (1986).
- [65] D. L. Wiltshire, *Spherically Symmetric Solutions of Einstein-maxwell Theory With a Gauss-Bonnet Term*, Phys. Lett. B **169**, 36 (1986).
- [66] R. G. Cai, *Gauss-Bonnet black holes in AdS spaces*, Phys. Rev. D **65**, 084014 (2002) [hep-th/0109133].
- [67] G. T. Horowitz, *Introduction to Holographic Superconductors*, Lect. Notes Phys. **828**, 313 (2011) [arXiv:1002.1722 [hep-th]].
- [68] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, *Holographic Superconductors*, JHEP **0812**, 015 (2008) [arXiv:0810.1563 [hep-th]].

- [69] C. P. Herzog, *Lectures on Holographic Superfluidity and Superconductivity*, J. Phys. A **42**, 343001 (2009) [arXiv:0904.1975 [hep-th]].
- [70] V. Keränen and L. Thorlacius, *Holographic geometries for condensed matter applications*, [arXiv:1307.2882[hep-th]].
- [71] S. Kachru, X. Liu and M. Mulligan, *Gravity Duals of Lifshitz-like Fixed Points*, Phys. Rev. D **78**, 106005 (2008) [arXiv:0808.1725 [hep-th]].
- [72] D. W. Pang, *On Charged Lifshitz Black Holes*, JHEP **1001**, 116 (2010) [arXiv:0911.2777 [hep-th]].
- [73] A. Alvarez, E. Ayón-Beato, H. A. González and M. Hassaine, *Nonlinearly charged Lifshitz black holes for any exponent $z > 1$* , JHEP **1406**, 041 (2014) [arXiv:1403.5985 [gr-qc]].
- [74] E. Ayón-Beato, A. Garbarz, G. Giribet and M. Hassaine, *Lifshitz Black Hole in Three Dimensions*, Phys. Rev. D **80**, 104029 (2009) [arXiv:0909.1347 [hep-th]].
- [75] E. Ayón-Beato, A. Garbarz, G. Giribet and M. Hassaine, *Analytic Lifshitz black holes in higher dimensions*, JHEP **1004**, 030 (2010) [arXiv:1001.2361 [hep-th]].
- [76] S. W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975) [Erratum-ibid. **46**, 206 (1976)].
- [77] J. D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).
- [78] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, *The Four laws of black hole mechanics*, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).
- [79] E. Poisson : *A Relativist's Toolkit, The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [80] R. M. Wald, *Black hole entropy is the Noether charge*, Phys. Rev. D **48**, 3427 (1993) [gr-qc/9307038].
- [81] V. Iyer and R. M. Wald, *Some properties of Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy*, Phys. Rev. D **50**, 846 (1994) [gr-qc/9403028].
- [82] R. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, University of Chicago Press, 1994.
- [83] R. Arnowitt, S. Deser and C. Misner, *The Dynamics of General Relativity*, Phys. Rev. **116**, 1322 (1959); **117**, 1595 (1960); in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed L. Witten (Wiley, New York, 1962).
- [84] T. Regge, C. Teitelboim, *Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity*, Annals Phys. **88**, 286 (1974).
- [85] E.ourgoulhon, *3+1 formalism and bases of numerical relativity*, [gr-qc/0703035].

- [86] L. F. Abbott and S. Deser, *Stability of Gravity with a Cosmological Constant*, Nucl. Phys. B **195**, 76 (1982).
- [87] S. Deser and B. Tekin, *Gravitational energy in quadratic curvature gravities*, Phys. Rev. Lett. **89**, 101101 (2002) [hep-th/0205318].
- [88] S. Deser and B. Tekin, *Energy in generic higher curvature gravity theories*, Phys. Rev. D **67**, 084009 (2003) [hep-th/0212292].
- [89] S. Nam, J. D. Park and S. H. Yi, *Mass and Angular momentum of Black Holes in New Massive Gravity*, Phys. Rev. D **82**, 124049 (2010) [arXiv:1009.1962 [hep-th]].
- [90] E. Witten, *Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 505 (1998) [hep-th/9803131].
- [91] A. Bouchareb and G. Clément, *Black hole mass and angular momentum in topologically massive gravity*, Class. Quant. Grav. **24**, 5581 (2007) [arXiv:0706.0263 [gr-qc]].
- [92] W. Kim, S. Kulkarni and S. H. Yi, *Quasilocal Conserved Charges in a Covariant Theory of Gravity*, Phys. Rev. Lett. **111**, no. 8, 081101 (2013) [Erratum-ibid. **112**, 7, 079902 (2014)] [arXiv:1306.2138 [hep-th]].
- [93] Y. Gim, W. Kim and S. H. Yi, *The first law of thermodynamics in Lifshitz black holes revisited*, JHEP **1407**, 002 (2014) [arXiv:1403.4704 [hep-th]].
- [94] D. O. Devecioğlu and Ö. Sarioğlu, *Conserved Killing charges of quadratic curvature gravity theories in arbitrary backgrounds*, Phys. Rev. D **83**, 021503 (2011) [arXiv:1010.1711 [hep-th]].
- [95] D. O. Devecioğlu and Ö. Sarioğlu, *On the thermodynamics of Lifshitz black holes*, Phys. Rev. D **83**, 124041 (2011) [arXiv:1103.1993 [hep-th]].
- [96] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], *Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999) [astro-ph/9812133].
- [97] K. Hinterbichler, *Theoretical Aspects of Massive Gravity*, Rev. Mod. Phys. **84**, 671 (2012) [arXiv:1105.3735 [hep-th]].
- [98] I. Güllü, *Massive Higher Derivative Gravity Theories*, [arXiv:1201.6504 [gr-qc]].
- [99] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. **116**, 1009 (1998) [astro-ph/9805201].
- [100] S. Weinberg, *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1995) 609 p
- [101] M. Fierz and W. Pauli, *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **173**, 211 (1939).

- [102] W. Pauli and M. Fierz, *On Relativistic Field Equations of Particles With Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field*, *Helv. Phys. Acta* **12**, 297 (1939).
- [103] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Topologically Massive Gauge Theories*, *Annals Phys.* **140**, 372 (1982) [Erratum-ibid. **185**, 406 (1988)] [*Annals Phys.* **185**, 406 (1988)] [*Annals Phys.* **281**, 409 (2000)].
- [104] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Three-Dimensional Massive Gauge Theories*, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 975 (1982).
- [105] W. Li, W. Song and A. Strominger, *Chiral Gravity in Three Dimensions*, *JHEP* **0804**, 082 (2008) [arXiv:0801.4566 [hep-th]].
- [106] S. Deser and B. Tekin, *Energy in topologically massive gravity*, *Class. Quant. Grav.* **20**, L259 (2003) [gr-qc/0307073].
- [107] S. Ölmez, Ö. Sarioglu and B. Tekin, *Mass and angular momentum of asymptotically ads or flat solutions in the topologically massive gravity*, *Class. Quant. Grav.* **22**, 4355 (2005) [gr-qc/0507003].
- [108] E. A. Bergshoeff, O. Hohm and P. K. Townsend, *Massive Gravity in Three Dimensions*, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 201301 (2009) [arXiv:0901.1766 [hep-th]].
- [109] K. S. Stelle, *Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity*, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).
- [110] K. S. Stelle, *Classical Gravity with Higher Derivatives*, *Gen. Rel. Grav.* **9**, 353 (1978).
- [111] Y. Liu and Y. w. Sun, *Note on New Massive Gravity in AdS(3)*, *JHEP* **0904**, 106 (2009) [arXiv:0903.0536 [hep-th]].
- [112] E. Ayón-Beato, M. Bravo Gaete, F. Correa, M. Hassaine, M. M. Juárez-Aubry, J. Oliva, *work in progress*.
- [113] F. Correa and M. Hassaine, *Thermodynamics of Lovelock black holes with a nonminimal scalar field*, *JHEP* **1402**, 014 (2014) [arXiv:1312.4516 [hep-th]].
- [114] J. Oliva, D. Tempo and R. Troncoso, *Three-dimensional black holes, gravitational solitons, kinks and wormholes for BHT massive gravity*, *JHEP* **0907**, 011 (2009) [arXiv:0905.1545 [hep-th]].
- [115] F. Correa, M. Hassaine and J. Oliva, *Black holes in New Massive Gravity dressed by a (non)minimally coupled scalar field*, *Phys. Rev. D* **89**, 124005 (2014) [arXiv:1403.6479 [hep-th]].
- [116] V. Belinski and E. Verdaguer, *Gravitational Solitons*, Cambridge University Press, 2005.
- [117] F. Correa, C. Martínez and R. Troncoso, *Scalar solitons and the microscopic entropy of hairy black holes in three dimensions*, *JHEP* **1101**, 034 (2011) [arXiv:1010.1259 [hep-th]].
- [118] H. A. González, D. Tempo and R. Troncoso, *Field theories with anisotropic scaling in 2D, solitons and the microscopic entropy of asymptotically Lifshitz black holes*, *JHEP* **1111**, 066 (2011) [arXiv:1107.3647 [hep-th]].

- [119] G. W. Horndeski, *Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space*, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363 (1974).
- [120] C. Deffayet, S. Deser and G. Esposito-Farèse, *Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress-tensors*, Phys. Rev. D **80**, 064015 (2009) [arXiv:0906.1967 [gr-qc]].
- [121] C. Charmousis, *From Lovelock to Horndeski's generalised scalar-tensor theory*, Lect. Notes Phys. **892**, 25 (2015) [arXiv:1405.1612 [gr-qc]].
- [122] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, *Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations*, Prog. Theor. Phys. **126**, 511 (2011) [arXiv:1105.5723 [hep-th]].
- [123] T. Kobayashi and N. Tanahashi, *Exact black hole solutions in shift symmetric scalar-tensor theories*, PTEP **2014**, n° 7, 073E02 (2014) [arXiv:1403.4364 [gr-qc]].
- [124] L. Hui and A. Nicolis, *No-Hair Theorem for the Galileon*, Phys. Rev. Lett. **110**, n° 24, 241104 (2013) [arXiv:1202.1296 [hep-th]].
- [125] M. Rinaldi, *Black holes with non-minimal derivative coupling*, Phys. Rev. D **86**, 084048 (2012) [arXiv:1208.0103 [gr-qc]].
- [126] S. W. Hawking and D. N. Page, *Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space*, Commun. Math. Phys. **87**, 577 (1983).
- [127] A. Anabalón, A. Cisterna and J. Oliva, *Asymptotically locally AdS and flat black holes in Horndeski theory*, Phys. Rev. D **89**, 084050 (2014) [arXiv:1312.3597 [gr-qc]].
- [128] A. Cisterna and C. Erices, *Asymptotically locally AdS and flat black holes in the presence of an electric field in the Horndeski scenario*, Phys. Rev. D **89**, no. 8, 084038 (2014) [arXiv:1401.4479 [gr-qc]].
- [129] E. Babichev and C. Charmousis, *Dressing a black hole with a time-dependent Galileon*, JHEP **1408**, 106 (2014) [arXiv:1312.3204 [gr-qc]].
- [130] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *The Black hole in three-dimensional space-time*, Phys. Rev. Lett. **69**, 1849 (1992) [hep-th/9204099].