

**HOLOGRAPHIC APPLICATIONS OF THE
ADS/CFT CORRESPONDENCE**

LUIS GUAJARDO R.

Una tesis presentada en cumplimiento parcial
de los requisitos para el grado de
Doctor en Matemáticas



Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca
Chile
Abril, 2019

CONSTANCIA

La Dirección del Sistema de Bibliotecas a través de su unidad de procesos técnicos certifica que el autor del siguiente trabajo de titulación ha firmado su autorización para la reproducción en forma total o parcial e ilimitada del mismo.



Talca, 2019

*Dedicado a
Catalina y Cristóbal*

Agradecimientos

Al culminar este proceso, es imposible no recorrer mentalmente estos cuatro años, y ver a todos quienes, quizás sin darse cuenta, han hecho que hoy pueda terminar mis estudios como alumno de doctorado.

Creo que jamás podré terminar de agradecerle a mi director de tesis, Mokhtar Hassaine, que haya confiado en mis capacidades académicas para ingresar al programa de Doctorado, después de estar muchos años alejado del rigor de los estudios. A través de él represento también a todos los profesores del Instituto de Matemática y Física de la Universidad de Talca, que permitieron, desde mi época como alumno de magister, desarrollar gran parte de las habilidades que hoy me tienen cerrando este proceso. Me permito en estas líneas agradecer también por todas sus enseñanzas, a los profesores Eugeny Babichev, Moisés Bravo, Adolfo Cisterna y Julio Oliva, que en esta oportunidad actúan como jueces de esta tesis.

A mi familia, por siempre estar disponibles ante cualquier inconveniente. En especial a Sandra, mi compañera de viaje, agradecer por todos los consejos, por todas las veces que supo contenerme cuando la tarea parecía imposible, y las tantas otras que tuvo que escucharme tratando de explicarle cosas que quizás ni yo mismo entendía bien en ese momento.

A los amigos. Gracias por todo el apoyo, incondicional, incansable, y por ser la fuente inagotable de risas y conversaciones que hacen que todo sea más fácil.

Agradecer finalmente a la Universidad de Talca y al Instituto de Matemática y Física por el apoyo financiero que me brindaron durante estos cuatro años.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	VII
1. Generalidades	1
1.1. Conceptos Generales	1
1.1.1. Transporte Paralelo	1
1.1.2. Curvatura y Tensor de Riemann	2
1.1.3. Vectores de Killing	4
1.2. Soluciones Clásicas de Agujeros Negros	6
1.2.1. Formulación Lagrangiana	6
1.2.2. Agujero Negro de Schwarzschild	7
1.2.3. Agujero Negro de Reissner-Nordström	8
1.2.4. Agujero Negro BTZ	10
1.3. Termodinámica de Agujeros Negros	11
1.3.1. Leyes de la Termodinámica	11
1.3.2. Temperatura de Hawking	12
1.3.3. Método de la Acción Eulcidea	14
1.4. Correspondencia AdS/CFT	16
1.4.1. Espaciotiempo Anti-de Sitter (AdS)	16
1.4.2. Teoría de Campos Conforme (CFT)	18
1.4.3. Correspondencia Holográfica	21
2. Preliminares de Conductividad	23
2.1. Las Ecuaciones de Maxwell	23
2.1.1. Solución de las ecuaciones	24
2.1.2. Tensor Electromagnético	27
2.2. Modelo Clásico para la Conductividad	29
2.3. Mirada cuántica sobre la Conductividad	32
2.4. Superconductores	33
2.5. Modelo BCS de la Conductividad	35
3. Agujeros Negros Cargados en presencia de campos axiónicos	37
3.1. Conductividad desde el Horizonte de Eventos	37
3.2. Interacción con un campo escalar no mínimamente acoplado	40

4. Fórmula tipo Cardy para Agujeros Negros en Horizontes Planos	61
4.1. AdS/CFT en 2+1 dimensiones	61
4.1.1. Álgebras de Witt y de Virasoro	61
4.1.2. Fórmula de Cardy	64
4.1.3. Las simetrías asintóticas de Brown & Henneaux	67
4.1.4. Fórmula de Cardy para el agujero negro BTZ	69
4.2. El rol del Solitón Gravitatorio	69
4.3. Fórmula <i>à la</i> Cardy para Agujeros Negros en Horizontes Planos	72
5. Extensiones Gravitatorias de la Relatividad General	101
5.1. Gravedad de Lovelock	101
5.2. Gravedades Cuasitopológicas	103
5.3. Quintic Quasitopological Gravity	106
6. Conclusión	127
Bibliografía	129

Introducción

El objetivo de esta tesis es, a través del análisis de soluciones de tipo agujero negro [1, 2] y la construcción de nuevas teorías [3], aportar desde la vereda de la gravitación a la obtención de información relevante sobre cierta clase de teorías cuánticas de campos. Para tal fin, nos basamos en uno de los más grandes desarrollos de la Física teórica de los últimos veinte años: la *Correspondencia AdS/CFT*, o también llamada *Correspondencia Holográfica* [4]. Ésta nos dice que existe una equivalencia entre una teoría gravitatoria en D dimensiones, y una teoría cuántica de campos fuertemente acoplada en dimensión menor. Los fenómenos cuánticos “viven en la frontera” de las teorías gravitatorias, y por lo tanto, la información proveniente de una teoría puede ser leída desde su contraparte. En este sentido la correspondencia holográfica se ha posicionado como una poderosa herramienta, que permite responder a ciertas interrogantes que provienen del mundo cuántico utilizando argumentos gravitatorios, que pueden ser más sencillos de entender.

La fuerza de gravedad, como la entendemos actualmente, se explica a través de la teoría de la Relatividad General, propuesta por Albert Einstein en 1915. En ella, Einstein nos motiva a aceptar que el tiempo y el espacio no son independientes, sino que se combinan para formar un nuevo objeto de cuatro dimensiones, llamado *espaciotiempo*. Gracias a este nuevo concepto, asociamos la gravedad como una manifestación de la curvatura del espaciotiempo, y es por tanto un concepto netamente geométrico. Las ecuaciones de la Relatividad General forman un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales no lineales, acopladas y de segundo orden, codificadas en una única ecuación tensorial, llamadas las *ecuaciones de Einstein*:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}.$$

En esta notación, el tensor $G_{\mu\nu}$ se encarga de codificar la estructura geométrica del espaciotiempo, mientras que $T_{\mu\nu}$, llamado el *tensor de energía-momento*, captura la dinámica de la materia que interactúa con la geometría.

Dentro de la amplia gama de soluciones que admite la teoría de la Relatividad General están los agujeros negros. En líneas generales, un agujero negro está caracterizado por la existencia de una región finita \mathcal{R} del espaciotiempo, cuya frontera se denomina el *horizonte de eventos* y que actúa como un punto de no retorno: si una partícula cruza el horizonte de eventos e ingresa a la región \mathcal{R} , no puede escapar de ella. Entre las primeras soluciones de las ecuaciones de Einstein están la *solución de Schwarzschild* (1916) y la de Reissner-Nordström, que extiende a la primera para el caso cargado eléctricamente. En la solución de Schwarzschild, existe una región particular (hoy conocida como *radio de Schwarzschild*) que llama la atención, porque las ecuaciones de Einstein divergen al infinito. Tiempo después, se entendió que este comportamiento no era un problema físico, sino que una singularidad proveniente de la elección de coordenadas.

La investigación de agujeros negros comienza su despegue final terminando la década de los '50, donde se entendió la estructura causal del radio de Schwarzschild: las cosas pueden entrar, pero no salir. Luego se encuentran soluciones de las ecuaciones que describen agujeros negros rotantes (solución de Kerr, 1963), y una solución general de agujeros negros rotantes y cargados eléctricamente (solución de

Kerr-Newman, 1965). Israel demostró que bajo ciertas hipótesis, la solución de Schwarzschild era única, y afirmaciones similares se construyeron para las soluciones de Reissner-Nordström y Kerr-Newman. Estos teoremas de unicidad llevaron a J. Wheeler a formular una *conjetura de no-pelo*, la cual establece que todas las soluciones de agujero negro en las ecuaciones de Einstein de gravitación y electromagnetismo son caracterizadas únicamente por su masa, carga eléctrica y momento angular, y no hay otras cantidades físicas medibles (para los cuales la palabra *pelo* es una metáfora).

Uno de los momentos más importantes del desarrollo teórico de los agujeros negros se sitúa en la década de los '70, comenzando por el trabajo pionero de Stephen Hawking que muestra que el área de los agujeros negros no puede decrecer [5]. Esta idea capturó la atención de Jacob Bekenstein, que se cuestiona sobre los efectos que tienen los agujeros negros sobre la Segunda Ley de la Termodinámica (la cual establece que la entropía de un sistema termodinámico nunca decrece). Bekenstein propone un experimento muy sencillo, que consiste en un observador situado en el exterior de un agujero negro, que lanza un objeto con entropía hacia su interior. Después que el objeto cruza el horizonte de eventos, y luego que el agujero negro vuelve a su estado estacionario, el efecto neto es que la entropía del universo ha disminuído, al mismo tiempo que el área del agujero negro ha aumentado. Entonces, Bekenstein propone que el área del agujero negro es una manifestación de su entropía [6]. Al año siguiente Bardeen, Carter y Hawking, postulan cuatro leyes para los agujeros negros, de donde se concluye que éstos se comportan en forma análoga a un objeto termodinámico [7]. Sin embargo, esto era más que una analogía. Fue el mismo Hawking que en 1975 utiliza argumentos provenientes de la mecánica cuántica en las cercanías del horizonte de eventos, para mostrar que los agujeros negros tenían una temperatura [8]. A partir del trabajo de Hawking se confirma inmediatamente la propuesta de Bekenstein, y hoy hablamos, con propiedad, de la *Termodinámica de los Agujeros Negros*.

La teoría de la Relatividad General ha tenido incontables éxitos, pero aún no tenemos una descripción cuántica de ella. La correspondencia holográfica ha sido una nueva fuente de inspiración para la Física Teórica, otorgándole una perspectiva diferente a la posible conexión entre la gravedad y la cuántica. En este camino, esta inspiración ha sido utilizada para explorar algunos fenómenos que ocurren en otras áreas de la Física, como la Física de Materia Condensada. En [9] se estudia una solución de agujero negro cargado sobre un horizonte plano. La solución contiene un pelo, el cual imita el comportamiento de un superconductor. Para encontrar soluciones con pelo, debemos escaparnos de las hipótesis de la conjetura de no-pelo. La interacción entre la Relatividad General con una fuente de materia dada por un *campo escalar no mínimamente acoplado*, ha sido una manera efectiva de evadir las hipótesis de esta conjetura, encontrando soluciones sin constante cosmológica [10, 11], y con ella [12, 13].

Para un campo escalar ϕ , su acomplamiento no minimal se puede modelar agregando al término cinético la densidad lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\xi R\phi^2$, donde R es el escalar de curvatura y ξ es una constante de acomplamiento, llamado *parámetro no minimal*. Cabe señalar que en las referencias [10–13] se trabaja sobre espacios esféricos e hiperbólicos, y que, considerando únicamente esta interacción entre gravedad y materia, no se conocen soluciones de agujero negro cargados sobre horizontes planos, independiente de la presencia o no de una constante cosmológica. Por el momento, las soluciones que involucran esta interacción, también consideran otras fuentes. Es de nuestro particular interés el caso presentado en [14], donde se analiza el llamado caso *conforme*, caso en el que el parámetro no minimal toma el valor particular $\xi = \frac{1}{6}$, y se incluyen dos campos *axiónicos*. Éstos corresponden a campos escalares con soporte en las coordenadas espaciales, y que en la línea de AdS/CFT, pueden ser pensados como operadores escalares adicionales.

Desde hace un par de años se sabe que, sobre variedades planas, la presencia de estos campos axiónicos puede llevar a soluciones donde se rompe la simetría traslacional [15]. Siguiendo la inspiración proveniente de la correspondencia holográfica, estos modelos podrían servir para explicar fenómenos en la Física de Materia Condensada donde la conductividad eléctrica σ_{DC} sea finita. El artículo [1] tiene como objetivo

principal extender los resultados de [14], considerando un parámetro no minimal ξ , el cual en principio asumimos sin otra restricción que ser positivo. Para ello, se construye una familia uniparamétrica de lagrangianos, indexados por un parámetro que llamaremos b , cuyo rango de valores queda sujeto en términos de ξ a ciertas condiciones matemáticas y físicas que surgen naturalmente del análisis.

Las ecuaciones de Einstein provenientes de esta extensión dan origen a dos clases de soluciones de tipo agujero negro, cuyos horizontes de eventos dependen de la intensidad de carga de los campos axiónicos, ω . Para $\omega > 0$, las soluciones con entropía positiva están solo en el rango $0 < \xi < \frac{1}{4}$. Sorprendentemente, en el análisis de la conductividad de corriente continua σ_{DC} observamos que existe un valor *crítico* $\xi_{crit} \approx 0,1779$, a partir del cual, para cualquier ξ en el rango $\xi_{crit} < \xi < \frac{1}{4}$, existe una pareja (ξ, b) tal que $\sigma_{DC} \rightarrow +\infty$. Desde la perspectiva holográfica, esto podría ser un indicador de conductores perfectos, los cuales tienen precisamente esta característica. El caso $\omega < 0$ también es analizado en [1]. A diferencia del caso anterior, el rango de valores permitidos para ξ es discreto, y la temperatura de Hawking asociada es idénticamente nula. La matriz de conductividad asociada para esta solución resulta similar a la del efecto Hall para conductores perfectos.

La correspondencia AdS/CFT permite obtener información sobre teorías cuánticas de campos fuertemente acopladas a partir del estudio de su equivalente gravitatorio. La teoría de campos que da origen al nombre tradicional con el que se conoce a esta equivalencia es la *Teoría de Campos Conforme* (CFT por sus siglas en inglés), que consisten en teorías cuánticas que son invariantes bajo la acción del llamado grupo conforme. Es decir, las CFTs son teorías cuánticas de campos invariantes a traslaciones, rotaciones, dilataciones y a una transformación conforme especial, la cual puede ser pensada como una traslación, seguida y precedida por una inversión. Queremos, en particular, desviar la atención hacia el caso en dos dimensiones, donde el grupo conforme es infinito dimensional.

La entropía de un sistema cuántico representa el número de configuraciones de los microestados del sistema. En el caso de una CFT en dos dimensiones, ésta es capturada por la *fórmula de Cardy*, la cual establece que la entropía puede ser calculada utilizando las cargas centrales presentes en la teoría. Brown y Henneaux, en 1986, consideraron el espaciotiempo Anti-de Sitter en 3 dimensiones, y observaron que el grupo de sus simetrías asintóticas era isomorfo a dos copias del grupo conforme dos dimensional [16]. Con ello, mostraron que el álgebra de las cargas conservadas correspondía a dos copias de la extensión central del grupo conforme. En 1992, M. Bañados, C. Teitelboim y J. Zanelli presentan la primera solución de agujero negro en 3 dimensiones, considerando la Relatividad de Einstein con una constante cosmológica negativa [17]. Luego, en 1997, previo al trabajo que da origen a AdS/CFT, Strominger [18] conecta ambos resultados: las simetrías asintóticas del agujero negro BTZ correspondían a las de AdS, y la fórmula de Cardy aplicada sobre esta solución reproducía correctamente la entropía de Bekenstein-Hawking. Este resultado, y la irrupción de la correspondencia holográfica, incentivaron diversas generalizaciones de la fórmula de Cardy. La fórmula de Cardy-Verlinde es una extensión dimensional que se aplica sobre aquellas teorías fuertemente acopladas que tengan un dual AdS [19]. Para el caso particular de teorías de gravedad en tres dimensiones, la fórmula de Cardy se ha extendido a espacios anisotrópicos [20], así como también a espacios que rompen la propiedad de hiperescalamiento [21–23].

No obstante lo anterior, existen casos donde ninguna de las anteriores se puede aplicar [24]. Por ejemplo, la fórmula de Cardy-Verlinde no se puede aplicar cuando la variedad de base es un plano, puesto que en su derivación la entropía resulta ser proporcional a la raíz cuadrada de la curvatura y sobre variedades planas ésta se anula idénticamente. Otro ejemplo es la solución [25], la cual corresponde a una solución de tipo agujero negro en 3 dimensiones para una extensión de la teoría de la Relatividad General, incorporando una fuente de materia consistente en un campo escalar mínimamente acoplado ($\xi = 0$), y un potencial que depende de este campo escalar. Esta solución es particularmente interesante, puesto que aun cuando la fórmula de Cardy se puede aplicar, el resultado no coincide con la entropía de Bekenstein-Hawking [26]. Es precisamente en [26] donde se menciona como una posible justificación el

hecho que esta solución y la solución BTZ están “desconectadas”, en el sentido que no se puede deformar continuamente una de las soluciones para llegar a la otra. Esta desconexión podría ser la responsable que la fórmula de Cardy funcione sólo para una de las soluciones, y por lo tanto, los autores se preguntan por la existencia de una formulación *à la* Cardy que pueda responder correctamente a la entropía en ambos sectores. En este espíritu observan que haciendo algunas redefiniciones, la fórmula de Cardy puede ser escrita de tal modo que no existe una dependencia explícita de las cargas centrales y, en su defecto, se necesita la existencia de una brecha de energía entre el *estado fundamental* (la configuración con menor energía) y la energía del agujero negro. Como ambos sectores están desconectados, entonces perfectamente se puede pensar que tienen estados fundamentales distintos, que también estarán desconectados. Bajo esta mirada, se sitúa al espaciotiempo AdS_3 como el estado fundamental del sector BTZ, y a una solución de tipo solitón como el estado fundamental del otro sector. La solución de tipo solitón comparte con AdS_3 tres características, que las usaremos para definir a lo largo de esta tesis un *solitón gravitatorio*: (i) es una solución regular de las ecuaciones de Einstein, (ii) carece de constantes de integración y (iii) tiene asociada una energía negativa.

Capturando los ingredientes mencionados, en el trabajo [2] se deriva una fórmula para calcular la entropía de cualquier solución de agujero negro en horizontes planos, que estén caracterizados por su masa, carga eléctrica y momento angular, extendiendo además la formulación propuesta en [26] a dimensión arbitraria, con o sin anisotropía, y con o sin propiedad de hiperescalamiento. Nuestra propuesta es válida siempre que la entropía \mathcal{S} y la temperatura T estén relacionadas mediante una ley de potencias de la forma $\mathcal{S} \sim T^{d_{\text{eff}}/z}$, donde d_{eff} es una *dimensionalidad espacial efectiva*, y z es el exponente dinámico, responsable de la posible anisotropía del espaciotiempo.

Otro camino a través del cual se puede explorar la correspondencia AdS/CFT es mirar directamente extensiones gravitatorias de la Relatividad General. Entre ellas, una de las que más éxito ha tenido es la llamada *Teoría de Lovelock* [27], la cual consiste en una familia de lagrangianos construida con invariantes de orden superior en la curvatura, y que tiene como ingrediente principal que las ecuaciones de movimiento que genera para la métrica son de segundo orden. El lagrangiano de orden k de la familia de Lovelock tiene una contribución efectiva en las ecuaciones de movimiento sólo si la dimensión del espaciotiempo es $D \geq 2k + 1$. Además, evitando términos de torsión o provenientes del dual de Hodge, se puede mostrar que en cuatro dimensiones el único lagrangiano que admite ecuaciones de segundo orden para la métrica es el de Lovelock, el cual no es otro sino que la Relatividad General de Einstein, acoplada con una constante cosmológica.

En $D = 5$, la teoría de Lovelock admite un nuevo término, de orden dos en la curvatura, y que conocemos en la literatura como el término de Gauss-Bonnet. Cuestionarse la unicidad surge entonces como una pregunta natural, y hoy podemos responder a esta pregunta en forma negativa, gracias al trabajo realizado por Oliva y Ray [28] y, simultánea e independientemente por Myers y Robinson [29], quienes presentan una teoría construida con invariantes cúbicos. Estas teorías, llamadas *Gravedades Cuasitopológicas*, son construidas fijando *a priori* la métrica de base a variedades con simetría esférica, planar e hiperbólica. A diferencia de las teorías cuasitopológicas, la construcción de Lovelock considera un tensor métrico $g_{\mu\nu}$ arbitrario, y es quizás el motivo por el que los términos de esta última familia presentan las restricciones dimensionales que mencionamos en el párrafo anterior. A juzgar por los resultados que se conocen de las gravedades cuasitopológicas, agregar ciertas condiciones de simetría sobre el tensor métrico permite construir teorías con invariantes puramente gravitatorios de órdenes mayores a los que permite la construcción de Lovelock. Pero, ¿hasta qué orden se puede llegar?. En [30] se ha conjeturado que podremos encontrar combinaciones para cualquier orden. El trabajo [3] afirma que en $D = 5$, las teorías cuasitopológicas existen al menos hasta el quinto orden de curvatura. Además de encontrar una combinación de invariantes de orden cinco cuyas ecuaciones de movimiento son de segundo orden sobre horizontes esféricos, planos e hiperbólicos, probamos todas las propiedades que definen a una teoría

cuasitopológica: la solución más general es estática; la teoría admite soluciones de tipo agujero negro con decaimiento AdS y las ecuaciones linealizadas son de segundo orden, lo cual es un indicador que nuestra teoría cuasitopológica es libre de fantasmas. Una demostración formal de la conjetura es, hasta la fecha, un problema abierto.

Para desarrollar todas estas ideas con mayor detalle, esta tesis se organiza de la siguiente manera: En los capítulos 1 y 2 se exponen los conceptos preliminares, que permiten entender mejor los trabajos realizados a lo largo de esta tesis. El capítulo 1 sintetiza las principales herramientas que se ocupan transversalmente en esta tesis, además de presentar algunas de las soluciones clásicas de agujeros negros, que fueron relevantes para este trabajo. El capítulo 2 expone, en forma compacta, los conceptos preliminares de la conductividad eléctrica, desde las Ecuaciones de Maxwell hasta la teoría BCS de la superconductividad.

En los capítulos 3,4 y 5 se exponen los artículos [1–3] respectivamente, con algunas consideraciones previas que son específicas a cada trabajo. Primero, en el capítulo 3, desarrollaremos las ideas esenciales de los artículos [31,32], donde se presenta un procedimiento a través del cual podemos obtener la conductividad de manera “holográfica”, a partir de expresiones que son evaluadas en el horizonte de eventos de un agujero negro. En el capítulo 4 introduciremos brevemente la *Fórmula de Cardy*, y expondremos en concreto las ideas del artículo [26], el cual da origen a una formulación alternativa del trabajo de Cardy utilizando un solitón gravitatorio como el estado fundamental de la teoría en lugar de usar las cargas centrales. Los puntos esenciales de la construcción de la teoría de Lovelock y de la teoría cúbica cuasitopológica quedan en el capítulo 5. Por último, el capítulo 6 expone algunas conclusiones y comentarios finales.

Capítulo 1

Generalidades

1.1. Conceptos Generales

El siguiente capítulo está enfocado a la presentación de los contenidos preliminares que son de vital importancia a lo largo de esta tesis. Para ello se ha extraído la información mayoritariamente desde las referencias [33–36] sin seguir ningún orden en particular. Cuando sea necesario, otras referencias con contenido específico serán agregadas a lo largo del desarrollo de este capítulo.

1.1.1. Transporte Paralelo

La noción de *transportar paralelamente* un vector tangente se asemeja al concepto intuitivo de moverlo “apuntando siempre en la misma dirección”. Esta idea nos permite diferenciar, por ejemplo, un plano de una esfera. En un plano, si se transporta paralelamente un vector alrededor de un camino cerrado, el vector final siempre coincide con el vector inicial. En la esfera, este no siempre es el caso.

Peor aún, en una variedad arbitraria no tenemos una noción natural para este concepto. La razón principal es que los espacios tangente de dos puntos p, q distintos son espacios vectoriales diferentes, y por lo tanto, no hay forma de decir que un vector en p es el mismo que un vector en q . Sin embargo, saber cómo transportar paralelamente un vector es equivalente a saber derivar campos vectoriales. Si sabemos cómo transportar un vector en forma paralela a lo largo de una curva, podemos definir la derivada direccional de un campo vectorial en la dirección dada por la curva. Recíprocamente, si conocemos cómo derivar campos vectoriales, podemos definir que un vector es transportado paralelamente si la derivada a lo largo de la curva se anula.

Una **derivada covariante** ∇ es una aplicación que transforma un (i,j) -tensor en un $(i,j+1)$ -tensor

$$\nabla : \mathfrak{T}(i, j) \longrightarrow \mathfrak{T}(i, j + 1)$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. *Linealidad*: $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$.
2. *Regla de Leibniz*: $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$.
3. *Conmuta con las contracción*: $\nabla_\mu(T^\lambda_{\lambda\rho}) = \nabla_\mu(T^\sigma_{\lambda\rho})\delta^\lambda_\sigma$.
4. Para un escalar (o $(0,0)$ -tensor) f , $\nabla f = \partial f$.

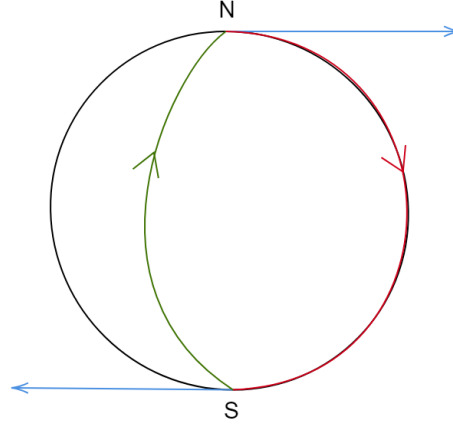


Figura 1.1: El vector es transportado paralelamente a lo largo de un camino cerrado. Primero es enviado desde el polo norte (N) al sur (S) por el meridiano rojo y luego regresa por el meridiano verde. El vector inicial y el final no son el mismo.

Formalmente, para un (i,j)-tensor T cuyas componentes son $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_j}$, su derivada covariante es

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_j} = & \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_j} + \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\lambda} T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_i}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_j} + \cdots + \Gamma^{\mu_i}_{\sigma\lambda} T^{\mu_1\mu_2\cdots\lambda}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_j} \\ & - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_1} T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_j} - \cdots - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_j} T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}_{\nu_1\nu_2\cdots\lambda}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

y la conexión $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ se conoce como los *Símbolos de Christoffel*, que definidos en función de la métrica $g_{\mu\nu}$ son

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (1.2)$$

Luego, un tensor T es **transportado paralelamente** a lo largo de la curva $x^\mu(\lambda)$ si

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu T = 0. \quad (1.3)$$

En particular, una **geodésica** es una curva $x^\mu(\lambda)$ a lo largo de la cual su vector tangente es transportado paralelamente.

1.1.2. Curvatura y Tensor de Riemann

En virtud de la definición de transporte paralelo, una variedad se dice **plana** si el transporte paralelo de un vector a través de cualquier camino cerrado resulta el mismo vector al retornar al punto de salida, y se dice **curva** si no es plana.

A partir de estas definiciones, resulta natural intentar construir una estructura matemática que nos permita cuantificar qué tan curva es una variedad. Y para eso, se puede ver que la derivada covariante de un tensor T en una cierta dirección x^μ , está midiendo cuánto cambia T en relación a lo que hubiese sido este tensor tras ser transportado paralelamente en la misma dirección. Por lo tanto, el conmutador de dos derivadas covariantes mide la diferencia entre ser transportado paralelamente en una dirección

respecto del orden opuesto. Así,

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho &\equiv \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \\ &= (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma})V^\sigma - 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} \nabla_\lambda V^\rho \\ &= R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - T^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\rho, \end{aligned}$$

donde $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ es el **Tensor de Riemann**, y $T^\lambda_{\mu\nu}$ el **Tensor de Torsión**:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}, \quad (1.4)$$

$$T^\lambda_{\mu\nu} = 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}. \quad (1.5)$$

A lo largo de esta tesis se trabajará con la hipótesis que no hay torsión, lo cual da paso a $\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} = 0$, y en consecuencia,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma. \quad (1.6)$$

Utilizando la métrica $g_{\lambda\rho}$ para bajar índices,

$$R_{\lambda\sigma\mu\nu} = g_{\lambda\rho} R^\rho_{\sigma\mu\nu}, \quad (1.7)$$

se pueden deducir las siguientes propiedades:

1. $R_{\lambda\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\lambda\mu\nu}$
2. $R_{\lambda\sigma\mu\nu} = -R_{\lambda\sigma\nu\mu}$
3. $R_{\lambda\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda\sigma}$
4. $R_{\lambda\sigma\mu\nu} + R_{\lambda\nu\sigma\mu} + R_{\lambda\mu\nu\sigma} = 0$
5. *Identidad de Bianchi*: $\nabla_\eta R_{\lambda\sigma\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\eta\lambda\mu\nu} + \nabla_\lambda R_{\sigma\eta\mu\nu} = 0$.

Además, realizando una contracción del tensor de Riemann obtenemos el **Tensor de Ricci**:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad (1.8)$$

cuya traza se llama el **escalar de Ricci**, o **curvatura escalar**:

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

Por otra parte, el **Tensor de Einstein** se define como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.10)$$

y se observa que realizando una doble contracción en la identidad de Bianchi se obtiene

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R, \quad (1.11)$$

o equivalentemente,

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (1.12)$$

1.1.3. Vectores de Killing

Sean \mathcal{M}, \mathcal{N} dos variedades, sea $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ una aplicación suave entre ellas, y sea $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave:

1. f induce naturalmente una función $\varphi^* : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que se conoce como el **pullback** de f , dada simplemente por la composición

$$\varphi^* = f \circ \varphi \quad (1.13)$$

2. Un campo vectorial $X \in T_p\mathcal{M}$ puede ser pensado como un operador diferencial que mapea funciones suaves en \mathbb{R} , por lo que podemos aplicar el operador X al pullback de f , definiendo así el **pushforward** del vector X como

$$\begin{aligned} \varphi_* : T_p\mathcal{M} &\rightarrow T_{\varphi(p)}\mathcal{N} \\ \varphi_*(X) &= X(\varphi^*) \end{aligned}$$

3. Las nociones de pullback y pushforward se generalizan trivialmente a $(0,j)$ -tensores o a $(i,0)$ -tensores respectivamente (aplicando coordenada a coordenada).
4. Cuando φ es un difeomorfismo entre las variedades, se puede usar φ (y ahora también φ^{-1}) para definir la noción de pullback y pushforward sobre tensores arbitrarios.

Diremos que una curva $x(t)$ es una **curva integral** de X si para cada t , el vector tangente en el punto $x(t)$ es X . Equivalentemente, se dice que X genera la curva $x(t)$. En término de sus componentes, la curva integral está definida de modo que satisfice

$$\frac{dx^\mu(t)}{dt} = X^\mu(x(t)). \quad (1.14)$$

Una curva integral generada por algún campo vectorial X , define una familia uniparamétrica de difeomorfismos $\sigma_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, tales que

1. $\sigma_0 = \mathbf{1}(x)$
2. $\sigma_t \sigma_s = \sigma_{t+s}$
3. $(\sigma_t)^{-1} = \sigma_{-t}$.

Podemos usar σ_t para mover un (i,j) -tensor T a lo largo de la curva integral generada por X . Nos interesa comparar el tensor resultante y el original, pero están definidos sobre puntos distintos. Por este motivo usamos el pullback para traer la imagen de T al punto inicial. Esta comparación se utiliza para definir la **derivada de Lie** del tensor T respecto del vector X ,

$$\mathcal{L}_X T = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma_{-\epsilon}^* T - T}{\epsilon}, \quad (1.15)$$

o en término de sus componentes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_j} &= X^\sigma \nabla_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_j} - (\nabla_\lambda X^{\mu_1}) T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_i}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_j} - \dots \\ &\quad - (\nabla_\lambda X^{\mu_i}) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \lambda}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_j} + (\nabla_{\nu_1} X^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_j} + \dots \\ &\quad + (\nabla_{\nu_j} X^\lambda) T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}_{\nu_1 \nu_2 \dots \lambda}. \end{aligned}$$

Diremos que σ es una **simetría** sobre el tensor T si

$$\sigma^* T = T, \quad (1.16)$$

lo que se traduce en

$$\mathcal{L}_X T = 0. \quad (1.17)$$

Para el caso del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, la definición anterior en términos de sus componentes (1.16) se reduce a

$$\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = X^\sigma \nabla_\sigma g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu X^\lambda) g_{\lambda\nu} + (\nabla_\nu X^\lambda) g_{\mu\lambda} = \nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu, \quad (1.18)$$

y sus simetrías (también llamadas **isometrías**) definen a X como un **vector de Killing**. En otras palabras, X es un vector de Killing si

$$\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = 0. \quad (1.19)$$

Usando (1.6) y (1.19), podemos encontrar una relación entre los vectores de Killing y el Tensor de Riemann:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu X_\rho = R^\sigma_{\mu\nu\rho} X_\sigma \quad (1.20)$$

Diremos que un difeomorfismo σ es una **transformación conforme** sobre la métrica $g_{\mu\nu}$ si existe una función Ω tal que

$$\sigma^* g_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \quad (1.21)$$

El generador infinitesimal X de esta transformación conforme se llama **vector de Killing conforme**, y para un espaciotiempo de dimensión D , la **ecuación de Killing conforme** es

$$\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = \frac{2}{D} (\nabla^\rho X_\rho) g_{\mu\nu}. \quad (1.22)$$

Una métrica $g_{\mu\nu}$ se dice **estacionaria** si posee un vector de Killing tipo tiempo (de norma negativa) cerca del infinito espacial. Cuando una métrica es estacionaria, podemos elegir para ella un sistema de coordenadas (t, x^1, x^2, \dots) tal que el vector de Killing es $X = \partial_t$, y además $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$. Por otra parte, una métrica $g_{\mu\nu}$ se dice **estática** si es estacionaria, y el vector de Killing tipo tiempo es además ortogonal a una familia de hipersuperficies. Una métrica es estática si es invariante por el cambio $t \mapsto -t$ (es decir, si nos movemos hacia atrás en el tiempo), lo que se traduce en que la métrica no puede contener términos cruzados de la forma $dt dx^\mu$ (con $\mu \neq \{t\}$).

Una de las aplicaciones más importante de los vectores de Killing radica en el hecho que pueden ser utilizados para construir cargas conservadas en la Relatividad General de Einstein. Desde una perspectiva general, comenzamos con una (D-1)-forma ω , y sea V la 1-forma obtenida a través del dual de Hodge, es decir

$$\omega = *V$$

No es difícil ver que la derivada exterior $d\omega$ está relacionada con la divergencia de su dual de Hodge V en la siguiente forma

$$d\omega = d(*V) = \nabla_\mu V^\mu \sqrt{-g} d^D x$$

De donde vemos que, si V es un vector de divergencia nula ($\nabla_\mu V^\mu = 0$), entonces $d(*V) = 0$ y por lo tanto definimos la **carga** que pasa a través de la hipersuperficie Σ a través de la expresión

$$Q_\Sigma = - \int_\Sigma *V = - \int_\Sigma d^{D-1} y \sqrt{|\gamma|} n_\mu V^\mu, \quad (1.23)$$

donde γ es la métrica inducida sobre la hipersuperficie Σ dimensional, y n_μ es un vector unitario normal.

En el caso particular de los vectores de Killing, estos definen cargas conservadas por intermedio de la corriente definida con el tensor de energía momento $T^{\mu\nu}$:

$$J_T^\mu \equiv X_\nu T^{\mu\nu}. \quad (1.24)$$

Esta relación “simetría-carga” es de vital importancia en la Física actual. Si X_ν es de tipo tiempo (si satisface $g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu < 0$) la métrica puede escribirse en una forma donde es independiente de la coordenada temporal, y por lo tanto, la carga asociada se define como la **energía total del sistema**. De forma similar, los vectores de Killing tipo espacio ($g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu > 0$) se pueden usar para definir cargas asociadas al momentum, o al momentum angular. A lo largo de esta tesis, iremos explorando más en profundidad esta relación.

1.2. Soluciones Clásicas de Agujeros Negros

De acuerdo a las Leyes de Newton, en ausencia de fuerzas externas, el comportamiento de un objeto dentro de una caja en reposo es indistinguible del comportamiento de otro que viaja dentro de una caja a velocidad constante. Por otro lado, sabemos desde la época de Galileo que el comportamiento de dos objetos en caída libre es idéntico, independiente de su masa. Esto sugiere que la gravedad es *universal*, en el sentido que afecta a todos los objetos por igual. Esta idea lleva a Einstein a proponer que un objeto en caída libre es también indistinguible del comportamiento de un objeto dentro de una caja en reposo, pues tanto la caja como el objeto se verán afectados por la gravedad. Para Einstein, esta universalidad de la gravedad está relacionada a una condición intrínseca del espaciotiempo: su geometría. La interacción entre la geometría del espacio y la materia está plasmada en las **Ecuaciones de Einstein**:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.25)$$

En el lado izquierdo está el Tensor de Einstein (1.10), que codifica los términos relacionados a la geometría del espaciotiempo. Al lado derecho, en el **Tensor de Energía-Momento** están los componentes de la materia que interactúa en él. Esta interacción geometría-materia nos ayuda a predecir cómo la materia afecta sobre la geometría del espaciotiempo, al mismo tiempo que la geometría afecta en el movimiento de la materia. En cuatro dimensiones, las ecuaciones de Einstein forman un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden, lo que hace que sean muy difíciles de resolver analíticamente. Para simplificar la dificultad, ciertas restricciones adicionales deben ser impuestas. Una de las simplificaciones más usuales, como veremos más adelante, es imponer ciertas condiciones de simetría sobre el problema.

1.2.1. Formulación Lagrangiana

El *Principio de Mínima Acción* es un camino alternativo para deducir las ecuaciones de Einstein. Consideramos una acción S que depende de una colección de campos que etiquetamos por Φ , y buscamos los puntos críticos de la integral definida por

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} \mathcal{L}(\Phi, \nabla_\mu \Phi) \quad (1.26)$$

Buscar un extremo es equivalente a pedir que la acción sea estacionaria para pequeñas variaciones de

Φ , gracias a lo cual se obtienen las **ecuaciones de Euler-Lagrange**,

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\Phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \Phi)} \right) = 0. \quad (1.27)$$

Hilbert se interesó en la acción definida por

$$S_{\text{EH}} = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} R, \quad (1.28)$$

donde el campo dinámico es la métrica $g_{\mu\nu}$ y R es el escalar de curvatura. Como las derivadas covariantes de la métrica se anulan idénticamente, no podemos aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange, y en este caso debemos calcular la variación de la acción y pedir que sea estacionaria para variaciones pequeñas de $g_{\mu\nu}$. Al realizar esta variación, se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{EH}}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \implies G_{\mu\nu} = 0, \quad (1.29)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein. Esto motiva que la acción (1.28) se denomine usualmente **Acción de Einstein-Hilbert**.

De manera similar, si definimos la acción

$$S = \frac{1}{\kappa} S_{\text{EH}} + S_M, \quad (1.30)$$

donde S_M es la acción para la materia, la variación respecto de la métrica es

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \implies \frac{1}{\kappa} G_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} = 0, \quad (1.31)$$

podemos ver que (1.31) recupera (1.25) tras definir $\kappa = 16\pi G$ y

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (1.32)$$

que será el **Tensor de Energía-Momento**.

1.2.2. Agujero Negro de Schwarzschild

Pocos meses después de la formulación final de las ecuaciones de Einstein, una solución exacta de ellas fue determinada por Karl Schwarzschild en 1916. Para simplificar la dificultad de las ecuaciones en general, Schwarzschild consideró las ecuaciones de Einstein *en el vacío* (ausencia de campos de materia) lo cual se traduce a resolver $G_{\mu\nu} = 0$, y por consiguiente, las únicas incógnitas son las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ del espaciotiempo. Restringiéndose en forma adicional a la búsqueda de soluciones estáticas y con simetría esférica, la métrica de Schwarzschild es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.33)$$

donde el parámetro M representa la masa total en unidades donde $c = 1$, y $d\Omega^2$ es la métrica de \mathbb{S}^2 , $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi$. Esta solución fue originalmente interpretada como la geometría descrita en el exterior de una estrella estática y esférica.

La métrica de Schwarzschild tiene, claramente, problemas de índole matemático en $r = 0$ y $r = 2GM$. La primera es realmente una singularidad de la curvatura, lo cual se manifiesta, por ejemplo, en el escalar

de Kretschmann,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48G^2M^2}{r^6}. \quad (1.34)$$

Sin embargo, la segunda es sólo una singularidad provocada por la elección de las coordenadas. En efecto, si uno escoge las **coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes** definidas por

$$v = t + \int \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr, \quad (1.35)$$

obtiene

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \quad (1.36)$$

Si bien el término g_{vv} se anula cuando $r = 2GM$, está relacionado al hecho que el vector de Killing $X = \partial_v$ cambia de ser tipo tiempo en la región $r > 2GM$ a un vector de tipo espacio en $r < 2GM$.

Notemos que las geodésicas nulas ($g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$) sobre la hipersuperficie $d\Omega = 0$ satisfacen

$$\dot{v} = 0, \quad \text{o} \quad \frac{\dot{r}}{\dot{v}} = \frac{dr}{dv} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right). \quad (1.37)$$

Luego, una partícula siguiendo la trayectoria descrita por $\dot{v} = 0$ (geodésica entrante) no experimenta ningún problema al viajar desde $r = \infty$ a $r = 0$. Respecto de las segundas, la región $r < 2GM$ es de especial interés, porque $\frac{dr}{dv} < 0$ en ella. Esta desigualdad nos dice que, si estamos dentro de la región, cualquier objeto que avanza en el tiempo es inevitablemente arrastrado hacia la singularidad $r = 0$. La superficie $r = 2GM$ es llamado el **horizonte de eventos**, y la región $r \leq 2GM$ se denomina un **agujero negro**. Notemos que en el interior de un agujero negro, la superficie $r = cst$ es de tipo espacio, y en particular, también lo es la singularidad $r = 0$. La singularidad no está en una ubicación particular del espacio, pero sí en un tiempo particular. Dentro de un agujero negro, la singularidad está en el futuro de cualquier partícula y no puede ser evadida.

1.2.3. Agujero Negro de Reissner-Nordström

Pocos años después de la solución de Schwarzschild, Reissner y Nordström presentaron una solución que representa un agujero negro cargado eléctricamente. Para esto, consideraron un campo electromagnético, el cual se representa por medio de un tensor antisimétrico $F_{\mu\nu}$, definido por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, donde A_μ se conoce como el vector potencial.

Para derivar la solución, podemos usar la acción (1.30) incluyendo un término de materia para representar la interacción de la gravedad con el electromagnetismo. La acción queda descrita a través de:

$$S[g_{\mu\nu}, A_\rho] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right], \quad (1.38)$$

donde ahora tenemos 2 campos dinámicos, y por lo tanto, debemos pedir que la acción sea estacionaria para pequeñas variaciones de ambos. Esto da origen a las siguientes ecuaciones tensoriales:

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{16\pi G} G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} = 0, \quad (1.39)$$

$$\frac{\delta S}{\delta A_\rho} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla_\mu F^{\mu\rho} = 0, \quad (1.40)$$

donde el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ está dado por

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda}F_{\nu}{}^{\lambda} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

Restringiéndose a espaciotiempos estáticos y con simetría esférica, la solución de Reissner-Nordström está dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.41)$$

$$F_{rt} = \frac{Q}{r^2},$$

donde M, Q son constantes de integración, asociadas a la masa y la carga eléctrica, respectivamente.

Al igual que en el caso de Schwarzschild, $r = 0$ es una singularidad de la curvatura, que se puede ver a través del escalar

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48G^2(Mr - Q^2)^2 + 8G^2Q^4}{r^8}, \quad (1.42)$$

sin embargo, la existencia de un horizonte de eventos para esta solución está ligada a una relación entre la masa M y la carga Q :

$$GM^2 - Q^2 \geq 0.$$

Cuando $GM^2 < Q^2$, la función métrica $1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$ es siempre positiva, lo que implica que la singularidad $r = 0$ es una singularidad *desnuda* (no cubierta por un horizonte de eventos). Sin embargo, la **conjetura de censura cósmica débil** establece esencialmente que todas las singularidades producto de un colapso gravitatorio están cubiertas por horizontes de eventos. Por esta razón, en general se considera que este caso no es físicamente aceptable.

Por su parte el caso $GM^2 = Q^2$ (o $\sqrt{GM} = Q$ si asumimos que las cargas son positivas) se llama usualmente la solución **extremal**. El horizonte de eventos está definido por $r_+ = GM$, y la métrica de la solución (1.41) toma la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{GM}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{GM}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.43)$$

La solución extremal es a menudo examinada para estudiar el rol de los agujeros negros en gravedad cuántica [34]. La condición de extremalidad da origen a propiedades interesantes. Por ejemplo, la Temperatura de Hawking (sección 1.3.2) sobre esta solución es idénticamente nula. Además, dos agujeros negros extremales con las mismas cargas se atraerían gravitacionalmente, pero al mismo tiempo se repelerían eléctricamente, cancelando sus efectos.

El último caso $GM^2 > Q^2$ es también interesante, pues tenemos dos horizontes de eventos, a los que llamaremos horizonte interior, r_- , y horizonte exterior, r_+ , con $r_- < r_+$. Un observador situado en la región $r > r_+$ que atraviesa el horizonte exterior, experimenta una situación similar al caso de Schwarzschild y es arrastrado en la dirección de la singularidad. Sin embargo, al cruzar el horizonte interior, la coordenada radial cambia a ser tipo espacio otra vez, y por lo tanto, la singularidad (que ahora vería como una singularidad desnuda) puede ser evitada. Más aún, el observador podría elegir cruzar otra vez el horizonte r_- , la coordenada radial vuelve a cambiar a tipo tiempo, pero esta vez el observador sería forzado a moverse hasta cruzar el horizonte exterior. Una vez cruzado el horizonte exterior, el observador podría elegir volver a entrar, y así viajar eternamente.

1.2.4. Agujero Negro BTZ

Poco tiempo después de la formulación final de la Relatividad General, se piensa en la posibilidad que exista una densidad de energía intrínseca al espacio vacío. Es natural pensar que, por estar en el vacío, esta densidad no tenga una dirección preferida, por lo que se asume constante sobre todo el espaciotiempo. Es por este motivo que al construir un tensor de energía momento asociado a la densidad del vacío, éste debe ser proporcional a la métrica, vale decir, $T_{\mu\nu}^{\text{vac}} = -\rho_{\text{vac}}g_{\mu\nu}$. Todo esto lleva a modificar las ecuaciones de Einstein de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu}^{\text{mat}} + T_{\mu\nu}^{\text{vac}}), \quad (1.44)$$

o mejor

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{\text{mat}}, \quad (1.45)$$

donde la **constante cosmológica** Λ (que fue introducida por Einstein en otro contexto [34]) está relacionada con la densidad del vacío a través de

$$\Lambda = \frac{\rho_{\text{vac}}}{8\pi G}.$$

Tras considerar una constante cosmológica Λ en $D = 4$ dimensiones, se pueden construir las extensiones naturales de las soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström. El rol del término cosmológico se ve reflejado en la métrica, que en el caso cargado eléctricamente se lee

$$f(r) = -\frac{\Lambda}{3}r^2 + 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}. \quad (1.46)$$

La locación del horizonte de eventos está relacionada a las soluciones de un polinomio de grado 4 en r (grado 3 en el caso $Q = 0$). En el caso $Q = 0, M > 0, \Lambda < 0$, el Teorema del Valor Intermedio nos asegura la existencia una única raíz positiva $r = r_+$, que asociamos al horizonte de eventos.

Estas propiedades son motivación suficiente para buscar soluciones de agujero negro en dimensión arbitraria. Sin embargo, debieron pasar casi ocho décadas desde la formulación de Einstein para que la primera solución de agujero negro en tres dimensiones fuera presentada.

El agujero negro BTZ (en honor a sus autores: M. Bañados, C. Teitelboim y J. Zanelli) es la solución en tres dimensiones de las Ecuaciones de Einstein, sin términos de materia, con una constante cosmológica $\Lambda = -\frac{1}{\ell^2}$ [17].

La solución BTZ está dada por la métrica

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{\ell^2} - M + \frac{J^2}{4r^2}\right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} - M + \frac{J^2}{4r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{J}{2r^2} dt\right)^2, \quad (1.47)$$

con $-\infty < t < \infty, 0 < r < \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi$, y M, J son constantes de integración representando la masa total y el momento angular, respectivamente.

La función métrica admite dos soluciones, r_-, r_+ dados por

$$r_{\pm} = \ell \left[\frac{M}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{M\ell}\right)^2} \right) \right]^{1/2}, \quad (1.48)$$

las cuales son reales y positivas si se satisfacen las condiciones $M > 0, |J| < M\ell$. En ese caso, la raíz r_+ es identificada como el horizonte de eventos del agujero negro. Una de las propiedades más llamativas

de la solución BTZ se puede apreciar en el caso estático, que (dada la forma de la solución) equivale a $J = 0$. La singularidad $r = 0$ es una singularidad cubierta por un horizonte de eventos siempre que $M > 0$. El caso $M = 0$ se conoce como el estado vacío, es decir, cuando hacemos que el tamaño del horizonte de eventos tienda a cero. Cuando $M < 0$, sobre la métrica

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{\ell^2} - M\right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} - M\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (1.49)$$

podemos aplicar el difeomorfismo $r \mapsto \sqrt{-Mr}$, $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{-M}}$, $\phi \mapsto \frac{\phi}{\sqrt{-M}}$, obteniendo

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1\right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (1.50)$$

A simple vista se podría pensar que todas las configuraciones son iguales, pero la sutil diferencia entre todas ellas está en la naturaleza del ángulo ϕ , pues tras aplicar el difeomorfismo se genera un déficit (o exceso) angular dado por $\Delta = 2\pi(1 - \sqrt{-M})$. De todas estas configuraciones, se ve claramente que el caso $M = -1$ es una solución completamente regular, conocida usualmente como espaciotiempo **Anti-de Sitter** (AdS_3). Se puede pensar que AdS_3 es una “cota inferior” de configuraciones físicamente aceptables, separado del espectro de agujeros negros por una brecha de energía. No se puede deformar AdS_3 continuamente para llegar al estado vacío, pues eso implicaría atravesar por todas las configuraciones donde la singularidad existe, pero es una singularidad desnuda. En la sección 1.4 veremos con un poco más en profundidad el espaciotiempo Anti-de Sitter, y presentaremos una construcción más general de él.

1.3. Termodinámica de Agujeros Negros

1.3.1. Leyes de la Termodinámica

Los inicios de la construcción de las Leyes de la Termodinámica para los agujeros negros pueden marcarse en 1972, cuando Hawking muestra que el área del horizonte de eventos no puede decrecer [5]. Esto hace que Bekenstein [6] formule que la entropía debe estar relacionada al área del horizonte de eventos: si estamos en el exterior de un agujero negro y arrojamamos un objeto con entropía hacia él, hemos disminuído la entropía del universo, al mismo tiempo que hemos aumentado el área de su horizonte de eventos. Luego, el aumento en el área debería ser visto como una manifestación del cambio en la entropía. Con esa idea, en primera instancia Bekenstein formula que la entropía debe regirse por

$$S = \eta \frac{A}{\hbar G},$$

donde η es un número sin dimensiones. Posteriormente, en 1973, Bardeen, Carter y Hawking [7] postulan cuatro leyes para la mecánica de los agujeros negros, en analogía con las cuatro leyes de la Termodinámica clásica. En este trabajo introducen un concepto que se llama *gravedad de superficie*, cuyas propiedades se comportan en forma análoga a la temperatura en la termodinámica clásica.

Podemos definir la gravedad de superficie como sigue. Sea X^μ un vector de Killing, y sea Σ una hipersuperficie nula. Si X^μ se anula sobre Σ , decimos que Σ es un **horizonte de Killing** de X^μ . A cada horizonte de Killing podemos asociar una cantidad llamada **gravedad de superficie**, denotado usualmente por κ . El vector de Killing X^μ , a lo largo de la hipersuperficie Σ satisface la ecuación de

geodésica

$$X^\mu \nabla_\mu X^\nu = -\kappa X^\nu, \quad (1.51)$$

a partir de la cual se puede probar que

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu X_\nu)(\nabla^\mu X^\nu) \Big|_\Sigma. \quad (1.52)$$

Las Leyes de la Termodinámica fueron formuladas inicialmente en $D = 4$ dimensiones, para un agujero negro asintóticamente plano, únicamente caracterizado por su masa M , su momento angular J y su carga Q . Los cuatro postulados son los siguientes:

Ley Cero:

La gravedad de superficie κ es constante sobre el horizonte de eventos.

Primera Ley:

Para dos agujeros negros estacionarios diferenciados únicamente por pequeñas variaciones de sus parámetros M, J, Q ,

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G} \delta A + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q, \quad (1.53)$$

donde Ω_H es la velocidad angular y Φ_H es el potencial eléctrico sobre el horizonte.

Segunda Ley:

El área del horizonte de eventos de un agujero nunca decrece, es decir,

$$\delta A \geq 0.$$

Tercera Ley:

Es imposible bajo algún proceso físico que la gravedad de superficie se anule.

Si bien las Leyes fueron formuladas originalmente para una clase particular de espaciotiempos, son lo suficientemente robustas para ser extendidas a otras dimensiones, más cargas y momentos angulares, y otras clases de soluciones “negras” como cuerdas, anillos y branas.

1.3.2. Temperatura de Hawking

Quizás el resultado más sobresaliente de Hawking es mostrar que, tomando en consideración ciertos efectos cuánticos cerca del horizonte de eventos, los agujeros negros irradian de igual forma que lo haría un cuerpo caliente a una temperatura dada [8]. Desde ese trabajo que la radiación de un agujero negro se conoce como Temperatura de Hawking. Quizás, la forma más intuitiva de entender la idea, es que la mecánica cuántica permite a ciertas partículas “escapar” del horizonte de eventos.

En la mecánica clásica, el concepto de vacío está asociado a la ausencia de energía y materia. En la mecánica cuántica, el concepto de vacío es distinto: el vacío cuántico *depende* de la elección del tiempo. El responsable de esta particular distinción es el principio de incertidumbre (o de indeterminación) de Heisenberg, el cual establece una relación de precisión entre dos cantidades físicas (llamadas variables

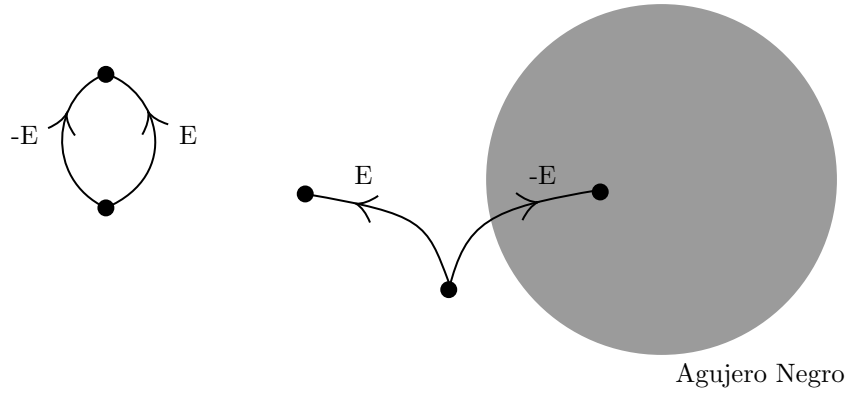


Figura 1.2: Radiación de Hawking. Una pareja virtual podría separarse cerca del horizonte de eventos, creando un flujo de radiación observable.

conjugadas). Cuanta más precisión se desee en una de las variables, menos se tendrá en la otra. En términos de dos variables conjugadas p, q , se tiene

$$\sigma_p \sigma_q \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.54)$$

La posición y el momentum son variables conjugadas; el tiempo y la energía, también. Si esta última relación la unimos con la conocida ecuación de Einstein que establece que la masa es una forma de energía, se deduce que en el vacío cuántico es posible encontrar estados donde existen partículas de materia (llamadas partículas *virtuales*), siempre que el tiempo de vida de éstas sea suficientemente corto.

La radiación de los agujeros negros es un efecto producido por la gravedad de superficie sobre estas partículas virtuales. En una vecindad del horizonte de eventos, se pueden crear pares de partículas virtuales (partícula-antipartícula). La antipartícula, que no existe desde una perspectiva clásica, puede atravesar el horizonte de eventos gracias al efecto túnel y ser arrastrada hacia la singularidad, dejando a su compañera libre para escapar, generando así un flujo de radiación observable.

Hawking muestra que esta radiación tiene un espectro térmico, es decir, es igual a la de un cuerpo negro en equilibrio termodinámico. Finalmente, la temperatura de un agujero negro, o **temperatura de Hawking**, se relaciona con la gravedad de superficie a través de la fórmula

$$T = \frac{\hbar \kappa}{2\pi}. \quad (1.55)$$

Una vez obtenido este resultado, se pudo confirmar la propuesta de Bekenstein sobre la entropía, con $\eta = \frac{1}{4}$. Por eso, generalmente nos referimos a ella como la **entropía de Bekenstein-Hawking**:

$$\mathcal{S}_{\text{BH}} = \frac{\mathcal{A}}{4\hbar G}. \quad (1.56)$$

Estos resultados afectaron profundamente el entendimiento de la Relatividad General y su relación con las teorías cuánticas de campos. La temperatura y la entropía apuntan naturalmente a la existencia de una “Gravedad Cuántica”, a juzgar por el hecho que en sus expresiones se involucran a las constantes inherentes de cada una de las teorías: la constante de Planck (\hbar) y la constante de Newton (G). Un detalle adicional es que la entropía de Bekenstein-Hawking es atípica, en el sentido que en un sistema no gravitacional la entropía escala con el volumen, mientras que la entropía de agujeros negros escala según el área, en una dimensión menos [37]. Es sugerente pensar que, si existe, la conexión entre estas dos teorías se debería mirar en escalas (dimensiones) diferentes.

Para finalizar esta sección, y a modo de ejemplo, podemos calcular la Temperatura de Hawking considerando la clase de métricas dada por

$$ds^2 = -N(r)^2 f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2. \quad (1.57)$$

Esta clase de métricas puede representar agujeros negros, como es el caso de todas las soluciones que presentamos en la sección anterior:

$$\begin{aligned} \text{Schwarzschild} &\implies N(r) = 1, & f(r) &= 1 - \frac{2GM}{r} \\ \text{R-N} &\implies N(r) = 1, & f(r) &= 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2} \\ \text{BTZ (no rotante)} &\implies N(r) = 1, & f(r) &= \frac{r^2}{\ell^2} - M \end{aligned}$$

En estos casos, la hipersuperficie Σ es el horizonte de eventos definido por $r = r_+$, con $f(r_+) = 0$, y podemos ver que el vector de Killing $X = \partial_t$ es un vector nulo a lo largo de Σ :

$$g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu(\Sigma) = g_{tt}(r_+) = 0. \quad (1.58)$$

De esta forma, Σ es un horizonte de Killing para el vector $X = \partial_t$ y en consecuencia

$$\kappa = \left. \frac{1}{2} N(r) f'(r) \right|_{\Sigma}, \quad (1.59)$$

de donde obtenemos que la Temperatura de Hawking para los agujeros negros cuya métrica pertenezca a la clase de métricas descrita por (1.57) es:

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{N(r_+) f'(r_+)}{4\pi}. \quad (1.60)$$

1.3.3. Método de la Acción Euclídea

Gibbons y Hawking, mostraron en [38] que la función de partición de un ensamble termodinámico puede ser identificada con la integral de camino euclidiana, usando la aproximación de punto silla alrededor de la continuación analítica de la solución. Al hacer esto, la coordenada temporal en la continuación analítica es periódica, y su período β se puede identificar con el inverso de la temperatura T .

La acción euclídea está relacionada con la energía libre de Gibbs \mathcal{F} a través de

$$S_{\text{Euc}} = \beta \mathcal{F} = \beta \left(\mathcal{M} - T\mathcal{S} - \sum_i \Phi_i \mathcal{Q}_i \right), \quad (1.61)$$

donde \mathcal{M} es la masa, \mathcal{S} es la entropía y Φ_i son los potenciales adicionales del sistema, junto con sus respectivas cargas conservadas \mathcal{Q}_i .

Notemos que, trabajando en el Gran Ensamble Canónico (donde β y todos los potenciales Φ_i son fijados), a partir de la energía libre de Gibbs se pueden recuperar expresiones explícitas para la entropía

y las cargas conservadas:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial S_{\text{Euc}}}{\partial \beta} - S_{\text{Euc}}, \quad (1.62a)$$

$$\mathcal{Q}_i = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial S_{\text{Euc}}}{\partial \Phi_i}, \quad (1.62b)$$

$$\mathcal{M} = \frac{\partial S_{\text{Euc}}}{\partial \beta} - \frac{\Phi_i}{\beta} \frac{\partial S_{\text{Euc}}}{\partial \Phi_i}. \quad (1.62c)$$

Por otra parte, la acción euclídea puede escribirse en su forma “Hamiltoniana reducida”

$$S_{\text{Euc}} = \beta \int d^{D-1}x \sqrt{-g} [N(x)\mathcal{H} + N^i(x)\mathcal{H}_i] + B, \quad (1.63)$$

donde B es un término de frontera que se fija de modo que la acción S_{Euc} tenga un extremo bien definido, es decir, $\delta S_{\text{Euc}} = 0$ [39]. Se observa además que al evaluar la expresión anterior en las restricciones de la forma hamiltoniana

$$\mathcal{H} = 0, \quad \mathcal{H}_i = 0, \quad (1.64)$$

la acción S_{Euc} coincide con B , por lo tanto, la energía libre de Gibbs, y por consiguiente, la entropía y las cargas conservadas (1.62) pueden ser obtenidas de acuerdo al término de frontera B .

A modo de ejemplo, para obtener la entropía y la masa del agujero negro de Schwarzschild, consideramos la acción dada por (1.30) y la clase de métricas dada por (1.57). Al pasar a la continuación analítica $t \rightarrow i\tau$, se tiene que (1.63) está dado por

$$S_{\text{Euc}} = \frac{\beta}{16\pi G} \iiint d\theta d\phi dr N(r) \sin(\theta) (2r f'(r) - 2 + 2f(r)) + B \quad (1.65)$$

$$= \frac{\beta}{2G} \int dr N(r) (r f'(r) - 1 + f(r)) + B, \quad (1.66)$$

donde $\mathcal{H} = r f'(r) - 1 + f(r)$, y la condición $\mathcal{H} = 0$ es una ecuación diferencial para $f(r)$, con solución

$$f(r) = 1 - \frac{r_+}{r}, \quad (1.67)$$

donde r_+ es una constante de integración que identificamos con el horizonte de eventos, pues $f(r_+) = 0$. En este caso, la solución para $N(r)$ se obtiene de la ecuación de movimiento respecto de $f(r)$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial H}{\partial f'} \right) - \frac{\partial H}{\partial f} \implies (2rN(r))' - 2N(r) = 0 \quad (1.68)$$

$$\implies N(r) = cst, \quad (1.69)$$

tras lo cual, siempre podemos fijar $N(r) = 1$ escalando adecuadamente la coordenada τ .

Por otro lado, la condición $\delta S_{\text{Euc}} = 0$ nos dice que el término de frontera debe satisfacer

$$\delta B = -\frac{\beta r}{2G} \delta f, \quad (1.70)$$

donde esta variación es calculada en el infinito y en el horizonte, $\delta B \equiv \delta B(\infty) - \delta B(r_+)$. En este caso, la condición sobre el término de frontera se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\delta B = -\frac{\beta r}{2G} \frac{\partial f}{\partial r_+} \delta r_+, \quad (1.71)$$

por lo que en el infinito tenemos

$$\delta B(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \delta B = \frac{\beta}{2G} \delta r_+, \quad (1.72)$$

mientras que en una vecindad del horizonte de eventos, $f(r) \sim f'(r_+)(r - r_+)$ por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial r_+} = -f'(r_+) = -\frac{4\pi}{\beta},$$

donde en la última igualdad hemos usado (1.60) y el hecho que β es el inverso de la temperatura. Esto nos dice que

$$\delta B(r_+) = -\frac{\beta r_+}{2G} \frac{\partial f}{\partial r_+} \delta r_+ = \frac{\beta r_+}{2G} f'(r_+) \delta r_+ = \frac{2\pi r_+}{G} \delta r_+, \quad (1.73)$$

y por consiguiente, la variación del término de frontera es

$$\delta B = \frac{\beta}{2G} \delta r_+ - \frac{2\pi r_+}{G} \delta r_+. \quad (1.74)$$

Trabajando en el Gran Ensamble Canónico, β es una constante sin variación, por lo que el término de frontera B se obtiene de integrar con respecto a r_+ :

$$B = \beta \frac{r_+}{2G} - \frac{\pi r_+^2}{G}. \quad (1.75)$$

Usando las fórmulas (1.62) obtenemos:

$$\mathcal{M} = \frac{r_+}{2G}, \quad \mathcal{S} = \frac{\pi r_+^2}{G}. \quad (1.76)$$

Para cerrar, notemos que la entropía obtenida a través de este método coincide con la fórmula de Bekenstein-Hawking (1.56), pues

$$\mathcal{S}_{\text{BH}} = \frac{\mathcal{A}}{4G} = \frac{4\pi r_+^2}{4G} = \frac{\pi r_+^2}{G}, \quad (1.77)$$

y que la Primera Ley se satisface:

$$d\mathcal{M} = Td\mathcal{S}$$

1.4. Correspondencia AdS/CFT

Esta sección pretende presentar los ingredientes fundamentales de la conocida correspondencia AdS/CFT. Para estos efectos, se utilizan principalmente las referencias [40, 41].

1.4.1. Espaciotiempo Anti-de Sitter (AdS)

Un spaciotiempo **maximalmente simétrico** es aquél que satisface la condición

$$R_{\rho\mu\sigma\nu} = \frac{R}{D(D-1)}(g_{\rho\sigma}g_{\mu\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}), \quad (1.78)$$

donde R , el escalar de curvatura, debe ser constante. Al subir el índice ρ , y luego contraer los índices $\{\rho, \sigma\}$, tenemos que en un espaciotiempo maximalmente simétrico se satisface

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{D} R g_{\mu\nu}, \quad (1.79)$$

lo cual reagrupando convenientemente, se puede ver que es igual a

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}}_{G_{\mu\nu}} - \frac{1}{D} R g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.80)$$

$$G_{\mu\nu} + \frac{D-2}{2D} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.81)$$

Es decir, un espacio maximalmente simétrico satisface las ecuaciones de Einstein en el vacío, con una constante cosmológica Λ tal que

$$\Lambda = \frac{D-2}{2D} R. \quad (1.82)$$

El espacio maximalmente simétrico con $R = 0$ es el espacio de Minkowski. De manera análoga, el espacio maximalmente simétrico con $R > 0$ se llama espaciotiempo de Sitter, y si $R < 0$ se denomina Anti-de Sitter, que es de nuestro particular interés. En D dimensiones, el espaciotiempo Anti-de Sitter se simboliza usualmente como AdS_D .

Veamos una forma de la métrica para el caso de AdS_4 , comenzando en 5 dimensiones con una variedad \mathcal{M} cuyo elemento de línea sea

$$ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

el espaciotiempo AdS_4 se identifica con el hiperboloide

$$-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -\ell^2,$$

donde ℓ es el radio de curvatura. Definamos para este hiperboloide las coordenadas $\{\hat{t}, \rho, \theta, \phi\}$, con

$$\begin{aligned} u &= \ell \sin(t') \cosh(\rho), \\ v &= \ell \cos(t') \cosh(\rho), \\ x &= \ell \sinh(\rho) \cos(\theta), \\ y &= \ell \sinh(\rho) \sin(\theta) \cos(\phi), \\ z &= \ell \sinh(\rho) \sin(\theta) \sin(\phi). \end{aligned}$$

Obtenemos la métrica

$$ds^2 = \ell^2 (-\cosh^2(\rho) d\hat{t}^2 + d\rho^2 + \sinh^2(\rho) d\Omega^2), \quad (1.83)$$

la cual tiene la particularidad que la coordenada \hat{t} es periódica. En general, asociamos el espacio AdS_4 con el espacio recubridor de (1.83), donde permitimos que \hat{t} tome valores desde $-\infty$ a ∞ .

Definiendo ahora el cambio de variable $r = \ell \sinh(\rho)$, y $\hat{t} = \frac{t}{\ell}$ obtenemos

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.84)$$

La generalización a AdS_D es análoga, obteniéndose

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad (1.85)$$

donde $d\Omega_{D-2}^2$ es el elemento de línea de la $D - 2$ esfera.

La forma tan particular de esta métrica, y saber que AdS_D es solución de las ecuaciones de Einstein (bajo ciertas condiciones descritas anteriormente), motiva a resolver la ecuación (1.82) sobre el ansatz

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_{D-2}^2. \quad (1.86)$$

En D dimensiones, obtenemos

$$-\frac{r^2 f'' + 2(D-2)r f' + (D-2)(D-3)(-1+f)}{r^2} = \frac{2D\Lambda}{D-2}, \quad (1.87)$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden para $f(r)$, y su solución más general está dada por

$$f(r) = \frac{-2\Lambda r^2}{(D-1)(D-2)} + 1 + \frac{C_1}{r^{D-2}} + \frac{C_2}{r^{D-3}},$$

de donde vemos que AdS_D se recupera cuando

$$\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2\ell^2}, C_1 = C_2 = 0. \quad (1.88)$$

En otras palabras, AdS_D es solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, con una constante cosmológica Λ fijada al valor

$$\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2\ell^2}.$$

1.4.2. Teoría de Campos Conforme (CFT)

Desde una perspectiva general, estamos interesados en el efecto que tiene sobre un principio de acción,

$$S = \int d^D x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi),$$

una transformación que afecta tanto a la posición como a los campos (que hemos agrupado colectivamente en el símbolo Φ):

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x' \\ \Phi(x) &\longrightarrow \Phi'(x') \end{aligned}$$

Para ejemplificar, consideremos la acción de un campo escalar ϕ sin masa, cuyo lagrangiano es $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$, y veamos el efecto que tiene una dilatación, definida por:

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x' \equiv \lambda x \\ \Phi(x) &\longrightarrow \Phi'(x') \equiv \lambda^{-\Delta} \Phi(x), \end{aligned}$$

donde Δ es un número que se conoce como la dimensión de escalamiento del campo Φ . La acción resultante es:

$$S' = \int d^D x' \partial'_\mu \phi' \partial'^{\mu} \phi', \quad (1.89)$$

donde ∂' denota la derivada con respecto a las coordenadas x' , y está relacionada a la derivada respecto de las coordenadas x vía Regla de la Cadena:

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{dx^\alpha}{dx'^\mu} \frac{\partial}{dx^\alpha} = \lambda^{-1} \delta_\mu^\alpha \partial_\alpha = \lambda^{-1} \partial_\mu$$

por lo tanto, reemplazando la dilatación, la acción S' ahora se lee:

$$S' = \int d^D x (\lambda^{D-2\Delta-2}) \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi = (\lambda^{D-2\Delta-2}) S. \quad (1.90)$$

Luego, es claro que si definimos Δ como

$$\Delta = \frac{D-2}{2}$$

obtendremos que la acción es *invariante* bajo esta dilatación.

Ahora, podemos ver lo que ocurre con una transformación infinitesimal, definida por

$$x'^\mu = x^\mu + \omega_\alpha \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_\alpha}, \quad (1.91)$$

$$\Phi'(x') = \Phi(x) + \omega_\alpha \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_\alpha}(x), \quad (1.92)$$

donde $\mathcal{F}(\Phi(x))$ es la expresión $\Phi'(x')$, pero en términos de $\Phi(x)$.

Nos interesa comparar el cambio en el campo Φ , pero observamos que la resta $\Phi'(x') - \Phi(x)$ no es un buen indicador porque la diferencia se está evaluando en dos puntos distintos. Para obtener la resta en un mismo punto, podemos analizar la situación a primer orden en ω_α , obteniendo:

$$\Phi'(x') = \Phi(x') - \omega_\alpha \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_\alpha} \partial_\mu \Phi(x') + \omega_\alpha \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_\alpha}(x'). \quad (1.93)$$

Esto nos permite definir al **generador** G_α de la transformación como aquél campo vectorial que satisface

$$\Phi'(x) - \Phi(x) \equiv -i\omega_\alpha G_\alpha \Phi(x). \quad (1.94)$$

En términos de la ecuación (1.93) tenemos entonces que:

$$iG_\alpha = \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_\alpha} \partial_\mu - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \omega_\alpha}. \quad (1.95)$$

El campo de nuestro interés es la métrica $g_{\mu\nu}$. Una **transformación conforme** es un cambio de coordenadas invertible $x \rightarrow x'$ que deja invariante el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, salvo por una función de escalamiento:

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x' \\ g_{\mu\nu} &\longrightarrow g'_{\mu\nu}(x') \equiv \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x). \end{aligned}$$

El conjunto de todas las transformaciones conformes forman un grupo bajo la composición, y además el grupo de Poincaré (isometrías) es un subgrupo, pues corresponde al caso $\Omega^2(x) \equiv 1$.

Bajo un cambio infinitesimal de coordenadas $x' = x + y$ la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ cambia a primer orden según

$$\eta'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (1.96)$$

$$= (\delta_\mu^\alpha - \partial_\mu y^\alpha)(\delta_\nu^\beta - \partial_\nu y^\beta) \eta_{\alpha\beta} \quad (1.97)$$

$$= \eta_{\mu\nu} - (\eta_{\alpha\nu} \partial_\mu y^\alpha + \eta_{\mu\beta} \partial_\nu y^\beta) \quad (1.98)$$

$$= \eta_{\mu\nu} - (\partial_\mu y_\nu + \partial_\nu y_\mu). \quad (1.99)$$

El requerimiento que la transformación sea conforme sobre esta métrica implica que

$$\partial_\mu y_\nu + \partial_\nu y_\mu = f(x) \eta_{\mu\nu}. \quad (1.100)$$

El vector y^α es un vector de Killing conforme, y la función $f(x)$ se puede determinar explícitamente multiplicando la expresión anterior por $\eta^{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu y^\mu + \partial_\mu y^\mu = f(x) D \quad \implies \quad f(x) = \frac{2}{D} \partial_\mu y^\mu, \quad (1.101)$$

obteniendo la ecuación de Killing conforme (1.22).

Si $D = 2$, se puede observar que las ecuaciones anteriores se reducen a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y la consecuencia de esto se presentará en la sección 4.1.

Asumiendo que $D \geq 2$, se comprueba que el vector de Killing satisface la condición $\partial_\mu \partial_\nu y_\rho$ es constante, razón por la cual la solución más general es

$$y^\mu = a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \lambda x^\mu + b^\mu x_\rho x^\rho - 2b^\rho x_\rho x^\mu, \quad \text{con } \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \quad (1.102)$$

donde $a^\mu, \omega^\mu{}_\nu, \lambda$ y b^μ forman un conjunto de $\frac{(D+1)(D+2)}{2}$ parámetros libres. Así, dado el vector de Killing conforme y^μ podemos construir su generador según (1.95):

Nombre	Cantidad	VKC	Generador
Traslación	D	$y^\mu = a^\mu$	$P_\mu = -i\partial_\mu$
Dilatación	1	$y^\mu = \lambda x^\mu$	$D = -ix^\mu \partial_\mu$
Rotación	$\frac{D(D-1)}{2}$	$y^\mu = \omega^\mu{}_\rho x^\rho$	$L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$
Transf. Especial	D	$y^\mu = b^\mu x_\rho x^\rho - 2b^\rho x_\rho x^\mu$	$K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^\nu x_\nu \partial_\mu)$

Estos generadores obedecen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [D, P_\mu] &= iP_\mu, & [D, K_\mu] &= -iK_\mu, \\ [K_\mu, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu} D - L_{\mu\nu}), & [K_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu} K_\nu - \eta_{\rho\nu} K_\mu), \\ [P_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu} P_\nu - \eta_{\rho\nu} P_\mu), & [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} L_{\mu\rho}), \end{aligned}$$

a partir de lo cual se puede concluir que el grupo conforme en $D \geq 2$ dimensiones es isomorfo al grupo $SO(d+1, 1)$.

Uno de los resultados más interesantes de las teorías de campos conforme, es que la traza del tensor de

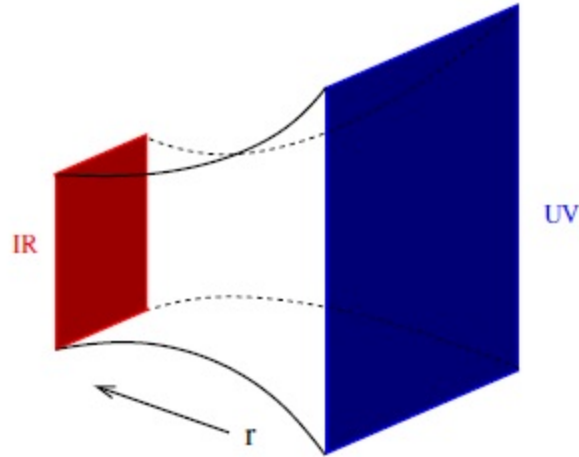


Figura 1.3: Bosquejo de la correspondencia AdS/CFT, tomada de [41]

energía momento es cero. En efecto, si consideramos el escalamiento infinitesimal $\delta g_{\mu\nu} = \epsilon g_{\mu\nu}$, obtenemos:

$$\delta S = \int d^2x \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{\epsilon}{2} \int d^2x T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}. \quad (1.103)$$

En una teoría de campos conforme, el escalamiento es una simetría, por lo que $\delta S = 0$. De esta forma se obtiene $T^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu = 0$.

1.4.3. Correspondencia Holográfica

La correspondencia AdS/CFT, también llamada correspondencia holográfica (o simplemente *holografía*) es uno de los más grandes desarrollos de la Física teórica en las últimas dos décadas. En esencia, es la afirmación de una equivalencia entre dos teorías que parecían estar desconectadas:

- Teorías gravitatorias en un espaciotiempo en D dimensiones, y
- Teorías cuánticas fuertemente acopladas en $D - 1$ dimensiones.

Desde un punto de vista computacional, ha provisto de una nueva forma de calcular observables en las teorías fuertemente acopladas, que en general son muy difíciles de calcular. Pero, desde una mirada más fundamental, ha provisto a la Física Teórica de una nueva visión sobre la naturaleza de la “gravedad cuántica”.

La imagen clásica con la que se asocia la correspondencia es la siguiente. Al lado derecho tenemos al espacio de Minkowski, que usualmente se llama la *frontera* del espacio. Aquí es donde vive la teoría cuántica. A partir de ahí emerge otra dimensión, que en la imagen de abajo hemos denotado con r , y que se puede interpretar como una escala de energía. De esta forma tendremos un espacio que tiene una dimensión más, y que llamamos el *bulk*. Dentro de este espacio hay una teoría gravitatoria, descrita por la relatividad general, posiblemente acoplada a otros campos. El primer ejemplo de la holografía fue la equivalencia entre teorías de campos conformes (CFT) en la frontera a la gravedad en el espaciotiempo AdS [4]. De ahí el nombre tradicional con el que se le conoce: AdS/CFT. Sin embargo, no pasó mucho tiempo cuando la dualidad se extendió hacia otras teorías que no son ni AdS por el lado de gravedad, ni CFT por el lado de las teorías de campo, por ejemplo [42–44].

Cuando a la correspondencia holográfica le agregamos la condición de temperatura finita, desde el lado de la gravedad surge naturalmente un ingrediente especial: los agujeros negros. Como ya vimos, los

agujeros negros se comportan como un sistema térmico, gracias a la Temperatura de Hawking (1.55). Además, la entropía de Bekenstein-Hawking (1.56) adquiere un valor agregado. La entropía de un agujero negro escala según el área del horizonte de eventos. Pero, la unidad de área en D dimensiones corresponde a una unidad de volumen en $D - 1$ dimensiones, que es exactamente como debe escalar la entropía de un sistema cuántico.

Usualmente en las teorías cuánticas de campos se está interesado en calcular la función de partición, que está relacionada con la formulación de la integral de caminos de Feynman. Esquemáticamente, esta relación se escribe

$$Z_{QFT}[\phi_0] = \int DA \exp \left(i \left[S_{QFT} + \int \phi_0 \mathcal{O}(A) \right] \right), \quad (1.104)$$

donde A representa a todos los campos fundamentales de la teoría, $\mathcal{O}(A)$ es un operador adicional, y ϕ_0 es una función que alimenta a este operador. Por ejemplo, en la física de materia condensada podríamos pensar en este ϕ_0 como una condición de fondo a la que se somete el experimento: un campo eléctrico, un campo magnético, una densidad de presión, etc. La esencia misma de la holografía es pensar que este campo ϕ_0 está asociado a un campo escalar $\phi(r, x)$, que vive en el *bulk* donde hay una teoría gravitatoria, y que bajo ciertas condiciones podremos leer ϕ_0 a partir de la estructura asintótica de $\phi(r, x)$ en la frontera, que según la imagen sería $r = 0$.

La fórmula fundamental de la holografía relaciona la función de partición de la teoría cuántica de campos con la acción gravitatoria en el bulk a través de

$$Z_{QFT}[\phi_0] \approx e^{iS_{\text{bulk}}|_{\phi \rightsquigarrow \phi_0}}, \quad (1.105)$$

donde en el lado derecho S_{bulk} es la acción *on-shell*, es decir, evaluada en la solución de las ecuaciones de Einstein, y $\phi \rightsquigarrow \phi_0$ no es una convergencia *per sé*, sino que representa la forma en la que asociamos el campo escalar $\phi(r, x)$ a la función ϕ_0 .

En una perspectiva un poco más general, la correspondencia holográfica tiene un Diccionario que permite, entre otras, las siguientes asociaciones:

Teoría Gravitatoria	Teoría Cuántica de Campos
Campo escalar $\phi(r, x)$	Operador escalar $\mathcal{O}(x)$
Campo de Gauge $A_\mu(r, x)$	Corriente conservada $J_\mu(x)$
Tensor métrico $g_{\mu\nu}(r, x)$	Tensor de Energía Momento $T_{\mu\nu}(x)$

Capítulo 2

Preliminares de Conductividad

Los materiales se pueden clasificar según su capacidad para conducir cargas eléctricas. En un principio se conocían los aislantes, semiconductores y conductores. En 1911 los experimentos de Kamerlingh-Onnes dieron origen a una nueva clasificación: los superconductores. En este capítulo estudiaremos los conceptos esenciales relacionados a la conductividad, ya que en el próximo capítulo la exploraremos desde el punto de vista de la correspondencia holográfica. Comenzaremos con un breve resumen de las bases fundamentales del Electromagnetismo. Este capítulo se ha escrito a partir de las referencias [45–50].

2.1. Las Ecuaciones de Maxwell

Los fenómenos eléctricos y magnéticos tienen raíces históricas tan antiguas como las antiguas civilizaciones china o griega. La palabra *electrón*, por ejemplo, proviene del griego *ἑλεκτρον* (ámbar). Se dice que los griegos ya habían observado que al frotar el ámbar, éste atraía paja y pedazos de hojas. En principio, los fenómenos eléctricos y magnéticos se entendían como conceptos separados, hasta que en 1819, H. Oersted observó que la aguja de una brújula se desviaba en presencia de un circuito que conducía una corriente eléctrica. Estas observaciones motivaron a Ampère a trabajar en profundidad en esta interacción, concluyendo que entre dos cables que conducen corriente se produce una fuerza de atracción que es proporcional al producto de ambas corrientes, y que decae con la distancia entre ellos. En 1830, M. Faraday y J. Henry en forma independiente mostraron que cuando un imán se movía cerca de un alambre, se establecía una corriente eléctrica en el cable. De esta manera, los trabajos experimentales de Oersted, Faraday y Ampère habían unificado la electricidad y el magnetismo, y desde esa época ya se comienza a hablar del *Electromagnetismo*. La contribución de J. Maxwell cierra en forma perfecta el capítulo del Electromagnetismo, y es considerado como una de las mayores unificaciones de la física. Después de Maxwell, la luz no era “algo más”, sino que era la electricidad y el magnetismo en una nueva forma [46].

Las **Ecuaciones de Maxwell** son las siguientes:

$$\text{Ley de Gauss} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.1)$$

$$\text{Ley de Gauss en el magnetismo} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\text{Ley de Faraday} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\text{Ley de Ampère-Maxwell} \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{J}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

La **Ley de Gauss** (2.1) establece en palabras simples que el flujo eléctrico que pasa a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada por dicha superficie. La formulación integral de esta ley se escribe

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

donde ϵ_0 es la permisividad eléctrica del vacío. Usando el conocido Teorema de la Divergencia, obtenemos la forma diferencial descrita en (2.1), donde $\nabla \cdot$ es el operador divergencia, y ρ es la densidad de carga eléctrica. Por su parte, la **Ley de Gauss en el magnetismo** es el nombre común con el que se describe el hecho que no se han observado monopolos magnéticos. En cierto sentido, el operador divergencia está midiendo qué tanto el campo se escapa o es atraído por algo. En el caso eléctrico, la ley de Gauss establece entonces que el hecho que el campo eléctrico se escape o sea atraído depende de la carga eléctrica, o en un lenguaje más universal, *cargas del mismo signo se repelen, y cargas de signo distinto se atraen*. Por su parte, la ecuación (2.2) nos dice que, al no haber monopolos magnéticos, el campo debe cerrarse sobre sí mismo (técnicamente, nos referimos a él como un campo *solenoidal*), provocando que el flujo sobre una superficie cerrada sea cero.

Hasta antes de 1830, la única forma en la que se conocía cómo producir un flujo de corriente eléctrica era conectando los extremos de un cable conductor a los terminales de una batería. Fue en ese año que Faraday descubrió que el movimiento de un imán provocaba un flujo de corriente sobre un cable, enlazando sus extremos sin unirlos a una batería. Trabajos posteriores de Faraday mostraron que un flujo eléctrico también era producido si el circuito era el que se movía frente a un campo magnético constante. Estos experimentos son la base de la corriente alterna, que es la forma en la que llega la energía eléctrica a nuestros hogares. En la **Ley de Faraday** (2.3) el símbolo $\nabla \times$ es el operador rotacional, o simplemente rotor.

Previo al trabajo de Maxwell, la **Ley de Ampère** nos decía que un conductor que lleva corriente produce un campo magnético que lo rodea. Esta relación entre el campo magnético y la corriente encerrada se escribe

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{J}}{\epsilon_0 c^2},$$

la cual es cierta siempre que el campo eléctrico esté fijo. El problema que surge con esta formulación tiene relación con el fundamento central de la conservación de la carga eléctrica, cuya formulación en forma diferencial es:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Maxwell propone una modificación a la ley de Ampère, agregando un término para especificar la forma en la que un campo eléctrico que depende del tiempo, es capaz de inducir un campo magnético. En un comienzo, la comunidad fue reticente a la adición de este término, sin embargo, poco a poco fueron apareciendo experimentos que iban avalando la propuesta de Maxwell (liderados por Heaviside y Hertz, entre otros), confirmando así la formulación de la última ecuación (2.4).

2.1.1. Solución de las ecuaciones

Quizás, al momento de publicar sus ecuaciones, ni siquiera el propio Maxwell podía dimensionar qué tan importante había sido su contribución. La belleza, y la trascendencia de las ecuaciones fundamentales del Electromagnetismo ya se pueden apreciar simplemente tomando la divergencia sobre la ley de Ampère-

Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) &= \nabla \cdot \left(\frac{\vec{J}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ 0 &= \nabla \cdot \frac{\vec{J}}{\varepsilon_0 c^2} + \nabla \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ 0 &= \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \nabla \cdot \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} \\ 0 &= \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t},\end{aligned}$$

donde en la última línea hemos usado la Ley de Gauss sobre el término $\nabla \cdot \vec{E}$. Vemos que simplificando las constantes c y ε_0 , hemos obtenido como consecuencia la conservación de la carga eléctrica (2.5).

A continuación mostraremos la resolución de las ecuaciones de Maxwell. Esto nos llevará a un concepto fundamental en la Física: la invariancia de *gauge*. Comenzamos considerando la ley de Gauss en el magnetismo:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

y definimos un *vector potencial* \vec{A} como un vector tal que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Inmediatamente notamos que existe una *libertad de elección* en este potencial \vec{A} porque si reemplazamos \vec{A} por $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$, el rotor (y por tanto el campo magnético \vec{B}) queda invariante para cualquier función escalar ψ que cumpla las condiciones de diferenciabilidad que se requieran. Volveremos a esta libertad en las siguientes líneas. Por ahora, hagamos caso omiso y usemos el vector potencial en la Ley de Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.9)$$

Como el rotor de este vector es cero, significa que tiene que ser igual al gradiente de algún campo escalar ϕ . Así,

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$$

lo que finalmente nos dice que

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Arriba mencionamos que el campo magnético queda invariante si al vector potencial \vec{A} le agregamos el gradiente de una función. Claramente, este no es el caso del campo eléctrico, a menos que tomemos algunas precauciones. Notamos de la última expresión que podemos permitir esta *libertad de elección* sobre el vector potencial \vec{A} siempre y cuando el campo escalar ϕ también se modifique:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Con esta transformación hemos llegado a una conclusión sorprendente. Existen infinitos vectores potencial, e infinitos campos escalares ϕ que conducen al mismo campo eléctrico y magnético. Esta infinitud de soluciones está representada en las infinitas elecciones que podemos hacer para la función ψ . Este

tipo de transformaciones se llaman *transformaciones de gauge*, o también se dice que existe una *invariancia de gauge*. Ingenuamente, el problema en un principio tiene seis incógnitas: las tres coordenadas del campo eléctrico, y las tres del campo magnético. Hemos visto que manipulando adecuadamente dos de las ecuaciones de Maxwell, en realidad no necesitamos seis, sino que cuatro incógnitas para llegar a la solución del problema: tres provenientes del vector potencial, más el campo escalar ϕ . Sin embargo, la invariancia de *gauge* a través de la función ψ nos entrega una libertad adicional, que es totalmente ficticia y redundante, pero que nos ayudará a presentar la solución de una manera muy particular.

Continuando con la Ley de Gauss, ésta queda expresada como

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0},\end{aligned}\tag{2.11}$$

y por su parte, la Ley de Ampère-Maxwell se reescribe de la siguiente forma:

$$c^2\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \frac{\vec{J}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right).\tag{2.12}$$

El término de la izquierda puede ser reescrito usando la identidad

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A},$$

con lo cual obtenemos

$$-c^2\nabla^2\vec{A} + c^2\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \frac{\vec{J}}{\varepsilon_0} - \frac{\partial\nabla\phi}{\partial t} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}.\tag{2.13}$$

Luego, encontrar la solución de las ecuaciones de Maxwell se traduce en resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (2.11) y (2.13). A simple vista no parece una tarea fácil y es aquí donde usaremos a nuestro favor la libertad de gauge que mencionamos anteriormente. Sabemos que si el par (\vec{A}, ϕ) es solución de las ecuaciones de Maxwell, entonces el par (\vec{A}', ϕ') definido por la transformación de gauge (2.10) también lo es. Usando esta transformación, vemos que la expresión $\nabla \cdot \vec{A}' + \alpha \frac{\partial\phi'}{\partial t}$ se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A}' + \alpha \frac{\partial\phi'}{\partial t} &= \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2\psi + \alpha \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \right) \\ \nabla \cdot \vec{A}' + \alpha \frac{\partial\phi'}{\partial t} &= \nabla \cdot \vec{A} + \alpha \frac{\partial\phi}{\partial t} + \left(\nabla^2\psi - \alpha \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \right).\end{aligned}\tag{2.14}$$

En otras palabras, la libertad de gauge se ve reflejada en la libertad de elección para la cantidad $\nabla \cdot \vec{A}' + \alpha \frac{\partial\phi'}{\partial t}$ (con α una constante arbitraria). En síntesis, si encontramos una solución que satisfice

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \alpha \frac{\partial\phi'}{\partial t} = g,$$

podemos encontrar otra solución con

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \alpha \frac{\partial\phi'}{\partial t} = 0,$$

simplemente resolviendo la ecuación

$$\nabla^2\psi - \alpha \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -g.$$

Decimos entonces que la expresión $\nabla \cdot \vec{A}' + \alpha \frac{\partial \phi'}{\partial t}$ se encarga de *fixar el gauge*. En particular, usaremos el *gauge de Lorenz*, definido por

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0, \quad (2.15)$$

donde se ha escogido un valor α muy particular, que nos ayuda a reescribir las ecuaciones (2.11) y (2.13), respectivamente, como sigue:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.16)$$

$$\nabla^2 \vec{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} = -\frac{\vec{J}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (2.17)$$

En el vacío, las ecuaciones de Maxwell se reducen simplemente a ecuaciones de onda en tres dimensiones viajando a la velocidad de la luz:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.18)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.19)$$

Estos resultados instan a Maxwell a conjeturar que la luz era una forma de radiación electromagnética. En esos tiempos se habían observado longitudes de onda para la luz en el rango de los 10^{-7} metros, pero en virtud de sus resultados, también conjetura que el rango observado hasta ese entonces era solo una parte del espectro de longitudes de onda. Hoy, gracias al trabajo de Maxwell, conocemos los rayos γ , rayos X , microondas, ondas de radio, televisión, etc.

2.1.2. Tensor Electromagnético

Debido a que a lo largo de esta tesis se trabaja con herramientas tensoriales, es pertinente entregar una formulación tensorial de las ecuaciones de Maxwell. Esto dará origen al tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$, que mencionamos anteriormente en la solución de Reissner-Nordström 1.2.3. Para sintetizar las ideas, trabajaremos sobre la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, considerando por simplicidad $c = 1$.

Lo primero es reescribir las ecuaciones de Maxwell en términos de sus componentes. Para hacer la escritura más compacta, usaremos la notación $t = x^0, x = x^1, y = x^2, z = x^3$, de modo de recorrer las coordenadas del espaciotiempo ocupando índices. La convención tradicional, que seguimos aquí, es usar letras griegas para denotar índices que recorren todo el espaciotiempo $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$, y usar letras latinas para recorrer los índices espaciales, $i \in \{1, 2, 3\}$. Notemos que, restringidos al espacio plano 3 dimensional (definido por $dt = 0$), la métrica es la matriz identidad, por lo que podemos subir y bajar estos índices a nuestra conveniencia. Así, las ecuaciones de Maxwell quedan escritas de la siguiente forma:

Ley de Gauss	$\partial_i E^i = J^0,$
Ley de Gauss en el magnetismo	$\partial_i B^i = 0,$
Ley de Faraday	$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k + \partial_0 B^i = 0,$
Ley de Ampère-Maxwell	$\epsilon^{ijk} \partial_j B_k - \partial_0 E^i = J^i,$

donde $J^0 \equiv \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $J^i \sim \frac{J^i}{\varepsilon_0}$ y ϵ^{ijk} es el símbolo de Levi-Civita:

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (ijk) \text{ es una permutación par de } (123) \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ es una permutación impar de } (123) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.20)$$

Como vimos en la sección anterior, podemos usar un vector potencial $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y un campo escalar ϕ para reescribir los campos eléctricos y magnético de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}. \end{aligned}$$

Esto motiva definir un (1,0)-tensor, que para recordar su origen también llamaremos vector potencial, $A^\mu = (\phi, A_x, A_y, A_z)$. En el espacio de Minkowski, la derivada covariante es la derivada parcial:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Con estas redefiniciones, los campos eléctrico y magnético quedan escritos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E_i &= \partial_i A_0 - \partial_0 A_i, \\ B^i &= \epsilon^{ijk} \partial_j A_k. \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores tienen en forma natural una propiedad de antisimetría. Si invertimos los índices 0, i del campo eléctrico, obtenemos $-E_i$, y algo similar ocurre en las componentes del campo magnético, debido a su forma. Estas propiedades de antisimetría son capturadas en el **tensor electromagnético** $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, el cual es antisimétrico por definición, esto es, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Representando este tensor por una matriz, vemos reflejadas las componentes del campo electromagnético:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Con esta notación, la Ley de Gauss y la ley de Ampère-Maxwell se escriben de manera compacta en una sola ecuación tensorial:

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu,$$

la conservación de la carga (2.5) ahora se escribe $\partial_\mu J^\mu = 0$, y las ecuaciones de Maxwell restantes también pueden ser escritas de manera tensorial, según la ecuación

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0.$$

Finalmente, la invariancia de gauge ahora es evidente de la definición del tensor electromagnético, pues si A_μ es solución, entonces $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\psi$ también.

2.2. Modelo Clásico para la Conductividad

Desde una perspectiva clásica, un **conductor** es un medio que contiene cargas eléctricas libres, que se mueven en presencia de un campo eléctrico, dando origen a una *corriente eléctrica* que viaja en la misma dirección que el campo. La relación entre la corriente y el voltaje en un conductor usual está dada por la **Ley de Ohm**:

$$V = IR,$$

donde R es la resistencia del medio. Equivalentemente, la Ley de Ohm puede ser escrita en una forma vectorial como

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (2.22)$$

donde \vec{J} es la densidad de corriente y \vec{E} es el campo eléctrico. El factor de proporcionalidad σ recibe el nombre de **conductividad** del medio.

El **modelo de Drude** es un modelo clásico para la conducción eléctrica en metales, propuesto por P. Drude en el año 1900. En este modelo se considera el metal como un arreglo regular de átomos más un conjunto de electrones libres para moverse a través de él. Cuando no hay campo eléctrico, los electrones se mueven aleatoriamente, de modo tal que el flujo promedio es nulo, y por lo tanto, no hay conducción. Se asume que cuando los electrones chocan, las velocidad antes y después de la colisión son independientes. De esta manera, en presencia de un campo eléctrico, el electrón puede ser descrito como una partícula acelerándose durante el breve tiempo entre dos choques.

Consideremos, por ejemplo, un campo eléctrico constante E . Podemos determinar su *velocidad de arrastre* v a través de la Segunda Ley de Newton:

$$m_e \dot{v} + \frac{m_e}{\tau} v = qE,$$

donde τ se denomina **tiempo de relajación**, y puede ser pensado como el tiempo promedio entre dos choques. Si nos concentramos en soluciones estacionarias, $\dot{v} = 0$, obtenemos que la velocidad es

$$v(t) = \frac{\tau q}{m_e} E.$$

Luego, si consideramos que la densidad de corriente está dada por $J = nqv$, obtenemos

$$J = \frac{nq^2\tau}{m_e} E,$$

donde n es el número de portadores de carga por unidad de volumen. Así, la conductividad σ está dada por:

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m_e}. \quad (2.23)$$

Las cosas cambian bastante cuando un campo magnético incide perpendicularmente sobre un conductor que transporta corriente. Esta interacción generará una diferencia de potencial en la dirección perpendicular tanto al campo como a la corriente. Este interesante fenómeno fue descubierto por E. Hall durante la segunda mitad del siglo XIX y hoy en día lo conocemos como el **efecto Hall** clásico.

Supongamos que los electrones están confinados a moverse sobre el plano XY, y queremos observar la respuesta del sistema cuando encendemos un campo magnético constante perpendicular a este plano. Como veremos, el efecto Hall consiste en que una corriente en la dirección X *induce* un voltaje (voltaje de Hall) en la dirección Y.

Una de las características más sobresalientes de la presencia de un campo magnético es que las

partículas se mueven en círculos. Consideremos inicialmente la ecuación de movimiento para una partícula de masa m y carga q en un campo magnético:

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.24)$$

Si consideraremos que la partícula se mueve sobre el plano XY, su velocidad estará dada por $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$, mientras que un campo magnético constante que incide perpendicularmente se puede modelar por $\vec{B} = (0, 0, B)$. Así, del desarrollo de las ecuaciones de movimiento obtenemos dos ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y} \\ m\ddot{y} &= -qB\dot{x} \end{aligned}$$

cuya solución general es

$$x(t) = x_0 - r \sin(\omega_B t + \phi), \quad y(t) = y_0 + r \cos(\omega_B t + \phi), \quad (2.25)$$

donde x_0, y_0, r, ϕ son constantes de integración, y $\omega_B = -\frac{qB}{m}$ es llamada la *frecuencia del ciclotrón*.

Siguiendo ahora el modelo de Drude, supongamos un campo eléctrico $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$ constante sobre el plano XY, y la ecuación que describe la velocidad de arrastre del portador de carga está dada por

$$m_e \dot{\vec{v}} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} - \frac{m_e}{\tau} \vec{v}.$$

Si nos concentramos en las soluciones bajo la condición de equilibrio $\dot{\vec{v}} = 0$, obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} + \omega_B \tau \dot{y} &= \frac{q\tau}{m_e} E_x \\ \dot{y} - \omega_B \tau \dot{x} &= \frac{q\tau}{m_e} E_y \end{aligned} \right\}$$

Como sabemos, el sistema de ecuaciones puede ser escrito en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_B \tau \\ -\omega_B \tau & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \frac{q\tau}{m_e} \vec{E}, \quad (2.26)$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_B \tau \\ -\omega_B \tau & 1 \end{pmatrix} \vec{J} = \frac{nq^2\tau}{m_e} \vec{E}. \quad (2.27)$$

Notamos finalmente que la matriz que antecede a \vec{J} es invertible para cualquier valor de ω_B y de τ , por lo cual el sistema de ecuaciones siempre admite una única solución. El efecto Hall puede ser visto a partir de este sistema de ecuaciones. En particular, si $\dot{y} = 0$, observamos que $\dot{x} \neq 0 \implies E_y \neq 0$, es decir, la corriente en la dirección x , induce un campo eléctrico en la dirección y . Finalmente, escribimos la ley de Ohm en su forma vectorial:

$$\vec{J} = \frac{\sigma_{DC}}{1 + \omega_B^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_B \tau \\ \omega_B \tau & 1 \end{pmatrix} \vec{E}, \quad (2.28)$$

donde la conductividad emerge en forma natural como una matriz (matriz de conductividad). El valor

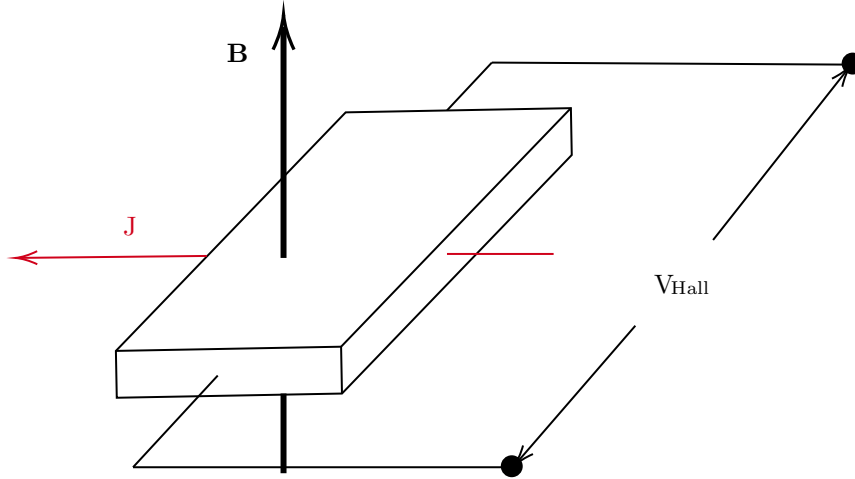


Figura 2.1: Efecto Hall: Producto de la presencia de un campo magnético \mathbf{B} , la corriente \mathbf{J} en una dirección induce un voltaje en otra dirección.

$\sigma_{DC} = \frac{nq^2\tau}{m_e}$ es la conductividad de corriente continua en ausencia de campo magnético.

A pesar que el modelo clásico predice con éxito la ley de Ohm de la conducción, no es satisfactorio para explicar algunos fenómenos que también son importantes, como veremos a continuación. Una de las debilidades del modelo clásico está en la suposición que los electrones libres se comportan como un gas, siguiendo la distribución de Maxwell-Boltzmann: la densidad de probabilidad de encontrar una partícula cuya velocidad está cerca de v es

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-mv^2/2k_B T},$$

donde m es la masa de la partícula, k_B es la constante de Boltzmann, y T es la temperatura absoluta. Inmediatamente se observa que la velocidad promedio es igual a

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}.$$

Por un lado, si definimos l como el recorrido libre medio de los electrones, el tiempo de relajación τ puede ser determinado como $\tau = \frac{l}{\langle v \rangle}$. Usando esto y (2.23), la conductividad del cobre a $300^\circ K$ es de aproximadamente $\sigma \approx 9 \times 10^{-6} (\Omega \cdot m)^{-1}$, que es seis veces menor que el valor que se obtiene experimentalmente [49].

Por otro lado, la relación anterior para el tiempo de relajación nos dice que la conductividad para el modelo de Drude (2.23) satisface

$$\sigma \propto \frac{1}{\langle v \rangle} \propto \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad (2.29)$$

y sabemos que la *resistividad* de un conductor (que se define como el inverso de la conductividad) satisface aproximadamente un comportamiento lineal respecto de la temperatura.

2.3. Mirada cuántica sobre la Conductividad

El modelo clásico nos dice que a una temperatura $T = 0$, todos los electrones deberían tener una energía cinética nula:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \frac{3k_B T}{m},$$

$$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} k_B T,$$

Sin embargo, la mecánica cuántica aporta información importante que no puede ser obviada. El Principio de Incertidumbre de Heisenberg nos dice que, incluso a $T = 0$, los electrones en un trozo de metal no pueden tener energía cinética nula. Además, el *Principio de exclusión de Pauli* prohíbe que dos electrones en un mismo átomo tengan los mismos números cuánticos, lo que reduce el número de electrones posibles dentro de un mismo nivel de energía a dos, dependiendo de su *espín*. Por este motivo, los electrones se irán agrupando de tal modo que cada electrón ocupe el menor nivel de energía que le sea posible. Es evidente que un número finito de electrones podrá ocupar un número finito de niveles de energía. Al mayor de los niveles de energía ocupado por los electrones se le conoce como **Energía de Fermi** (E_F) a $T = 0$. Para una temperatura T no cero, la energía de Fermi se define como aquella energía tal que la probabilidad de encontrar un estado ocupado sea $\frac{1}{2}$. La probabilidad que un estado particular con energía E sea ocupado por uno de los electrones en un sólido está dada por la **función de distribución de Fermi-Dirac**:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}. \quad (2.30)$$

Notemos que en el caso $T \approx 0$, la función de distribución toma esencialmente valores discretos dependiendo del signo de $E - E_F$, es decir, en esta situación límite todos los estados de energía que sean menores a la energía de Fermi estarán ocupados, mientras que aquellos estados con energía superiores a E_F estarán desocupados:

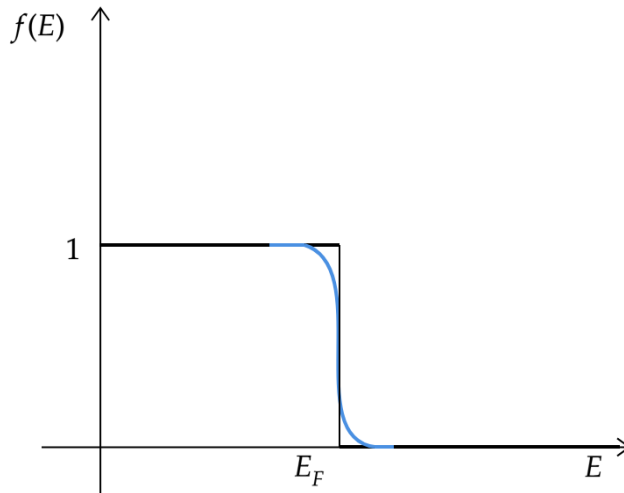


Figura 2.2: Energía de Fermi para $T = 0$ (negro) y $T > 0$ (celeste).

Al sustituir la distribución de Maxwell-Boltzmann por la de Fermi-Dirac, y utilizando la naturaleza ondulatoria del electrón (gracias a los resultados obtenidos de las ecuaciones de Maxwell), el modelo de electrones libres conduce a valores en concordancia con los resultados experimentales de la conducción

térmica y eléctrica. Sin embargo, falta aún entender cuál es la característica que poseen los sólidos que provoca que algunos sean buenos conductores y otros no. Esta particularidad la desarrollaremos a continuación.

Si dos átomos están separados a una distancia considerable, éstos no interactúan y por lo tanto sus niveles de energía son independientes. Sin embargo, cuando los átomos se acercan, las órbitas se traslapan, generando que los estados energéticos se desdoblén en valores muy cercanos. En un sólido tenemos del orden de 10^{23} átomos por cm^3 , por lo cual estamos en presencia de una cantidad enorme de estados energéticos desdoblándose. Por este motivo, se considera una *banda* continua de energía como una aproximación. Entre cada una de las bandas de energía existen regiones donde los niveles de energía no son permitidos.

Anteriormente mencionamos que la energía de Fermi a $T = 0$ era el mayor de los niveles de energía ocupado por los electrones. La energía de Fermi sirve en este caso para distinguir entre la **banda de valencia**, que es la banda con mayor energía que está llena de electrones, y la **banda de conducción**, que es la banda energética inmediatamente superior (en la escala de energía) a la banda de valencia.

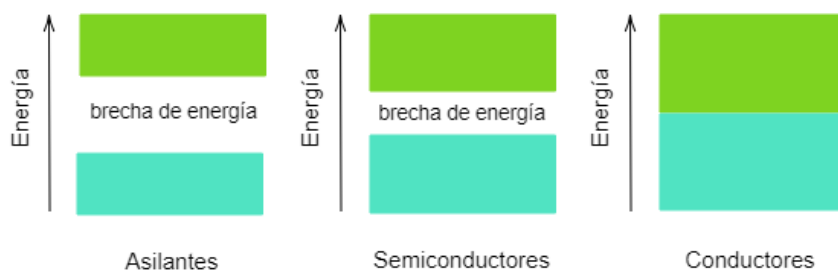


Figura 2.3: Conducción eléctrica. En los materiales aislantes, existe una brecha de energía grande entre la banda de conducción (verde) y la banda de valencia (celeste). Esta brecha es más pequeña en materiales que tienen mejor conducción.

En un material aislante, a $T = 0$ la banda de conducción está vacía, y la brecha energética entre ella y la banda de valencia es grande, por lo que un electrón que estimulado con un campo eléctrico no logrará saltar a la banda de conducción. Esta brecha energética es más pequeña en los metales semiconductores, permitiéndoles a dichos materiales la conducción de la electricidad. A diferencia de los anteriores, en los materiales conductores a $T = 0$ la banda de conducción se encuentra semillena, por lo que un pequeño estímulo proveniente de un campo eléctrico es capaz de excitar a los electrones, quienes tienen mucha libertad para saltar a niveles energéticos más altos dentro de la banda de conducción, motivo por el que tienen mayor conductividad.

2.4. Superconductores

Los experimentos de H. Kamerlingh-Onnes con el mercurio, determinaron que a temperaturas inferiores a los $4,2 \text{ }^\circ\text{K}$ la resistencia disminuía rápidamente a cero. Posteriormente, este comportamiento, llamado **superconductividad**, se ha observado en distintos materiales (plomo, estaño, niobio, entre otros), donde la *temperatura crítica* a partir de la cual se observa este fenómeno varía de un material a otro. Para tener una comparación en mente, la resistividad del cobre es del orden de $10^{-8} \Omega \cdot m$. Los superconductores tienen resistividades del orden de $10^{-25} \Omega \cdot m$. Hasta la fecha, la superconductividad se ha observado siempre a muy bajas temperaturas, y se ha descubierto que existen materiales que pasan

al estado superconductor cuando se les somete a presiones extremadamente altas [48]. Descubrir un material que tenga esta transición de fase a temperatura ambiente sería indiscutiblemente útil en nuestra vida cotidiana: aplicaciones industriales, médicas, y los trenes de levitación magnética.

Este último fenómeno ocurre como consecuencia del **Efecto Meissner**, descubierto por W. Meissner en 1933. Cuando un conductor dentro de un campo magnético se enfría por debajo de la temperatura crítica, las líneas de campo magnético son expulsadas del superconductor. Por este motivo, si un imán permanente se acerca a un superconductor, los dos objetos se repelerán entre sí, y si ponemos el imán por encima del superconductor, levitará. Por esta razón, el superconductor no es tan solo un conductor perfecto (resistividad $\rho = 0$), sino que también se dice que es un diamagneto perfecto ($\vec{B} = 0$). Una propiedad interesante de los superconductores es que este estado se rompe en presencia de un campo magnético suficientemente fuerte. Esto da origen a una clasificación de los superconductores. Los superconductores **tipo I** son aquellos en donde el estado diamagnético se mantiene siempre hasta que el campo magnético alcanza un valor crítico que destruye la superconductividad. Ejemplos de superconductores tipo I son el plomo, el litio y el estaño. Por su parte, los superconductores **tipo II** presentan una transición de fase gradual, caracterizada por la existencia de un *estado mixto*. La mayor cantidad de compuestos superconductores son de tipo II.

Desde un comienzo estaba claro que en el estado superconductor, los electrones formaban una especie de condensado (superfluido) capaz de moverse como un todo, de modo tal que a $T = 0$ esta condensación estaba completa en todo el material, y para $T > 0$ parte de este condensado se perdía, hasta que a la temperatura crítica desaparecía. Los primeros modelos que intentaron explicar este fenómeno fueron los modelos de Gorter-Casimir (1934), y el de los hermanos London (1935).

En el primer modelo, se asume que la energía libre de los electrones se regía por una expresión similar a la de un promedio entre las energías en el metal normal y en el superfluido, ponderándose respectivamente por la fracción de electrones en cada fluido. Si bien este modelo condujo a predicciones no triviales en concordancia con los experimentos, la expresión para la energía no tenía relación con la derivada desde la teoría microscópica [50].

Para entender el modelo de los hermanos London, consideraremos una representación en números complejos de la corriente alterna, basándonos en [48]:

$$\vec{J}e^{-i\omega t} = \sigma(\omega)\vec{E}e^{-i\omega t}, \quad (2.31)$$

donde la conductividad es ahora un número complejo. La parte real corresponde a corrientes que están en fase con el campo eléctrico aplicado, y la parte imaginaria con las que están fuera de fase. Un análisis similar al que hicimos para el modelo de Drude nos lleva a

$$\sigma(\omega) = \frac{nq^2}{m_e} \frac{\tau}{1 - i\omega\tau}. \quad (2.32)$$

Notemos que la parte real de la conductividad satisface la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Re[\sigma(\omega)] d\omega = \frac{\pi nq^2}{m}, \quad (2.33)$$

mientras que para un conductor perfecto, esto es, si $\tau \rightarrow +\infty$, obtenemos:

$$\sigma(\omega) = -\frac{nq^2}{i\omega m_e}. \quad (2.34)$$

Se sigue que para un conductor perfecto, la parte real de su conductividad debe seguir una distribución

de Dirac:

$$\Re[\sigma(\omega)] = -\frac{nq^2}{i\omega m}\delta(\omega), \quad (2.35)$$

Con esta función delta se define la densidad de electrones en el superfluido, n_s , como el peso en el *peak* de esta función, cuando $m = m_e$. En el régimen de conductor perfecto, notamos que al tomar el rotor sobre la ecuación (2.31) se obtiene

$$(\nabla \times \vec{J})e^{-i\omega t} = -\frac{n_s q^2}{m_e} \vec{B} e^{-i\omega t}, \quad (2.36)$$

igualdad que es válida para cualquier frecuencia ω , incluida $\omega = 0$, por lo que concluimos

$$(\nabla \times \vec{J}) = -\frac{n_s q^2}{m_e} \vec{B}. \quad (2.37)$$

Usando esta relación, y la ley de Ampère-Maxwell (2.4) para el caso estático, se obtiene que

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}, \quad (2.38)$$

donde

$$\lambda = \left(\frac{\varepsilon_0 c^2 m_e}{n_s q^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

es la **profundidad de penetración** del superconductor.

Es importante mencionar que los resultados experimentales de las mediciones de $\Re[\sigma(\omega)]$ son concordantes con la aparición de la función delta en la frecuencia $\omega = 0$. Por otro lado, hay ciertos aspectos de la teoría propuesta por los hermanos London que no son correctos. En particular, existe un frecuencia donde la conductividad vuelve a ser finita. Esta frecuencia ω_* define un *salto de energía* Δ a través de $\hbar\omega_* = 2\Delta$, la cual fue observada previo a la aparición de la teoría BCS, y es clave en su desarrollo.

2.5. Modelo BCS de la Conductividad

En 1957 Bardeen, Cooper and Schrieffer publicaron una teoría microscópica para explicar la superconductividad. Rápidamente fue reconocida como correcta en todos los aspectos esenciales, explicando un número importante de fenómenos experimentales. Una de las predicciones más brillantes de esta teoría es la existencia de una brecha de energía alrededor del nivel de Fermi. Bajo la temperatura crítica, el modelo BCS predice que en un superconductor existe un pequeño salto de energía, 2Δ , que separa los estados ocupados de los que no lo están. Este salto, que fue descubierto experimentalmente casi al mismo tiempo que la teoría era desarrollada, está centrado sobre la energía de Fermi, y por lo tanto, a diferencia de la descripción a través de la teoría de bandas, no es impedimento para la conducción eléctrica. En esta sección nos centraremos en explicar las ideas esenciales que constituyen la llamada **Teoría BCS**, en honor a sus autores.

La teoría BCS está construida sobre tres grandes pilares: (i) Debido al acoplamiento entre los electrones y los *fonones* (cuasi-partículas que se encuentran en la red atómica de un sólido, y que están relacionadas a la cuantización de la energía vibracional), es posible que la fuerza entre electrones a veces sea atractiva. (ii) El *Problema de Cooper*, que muestra que los electrones pueden formar *estados ligados* independiente de qué tan débil sea la fuerza atractiva entre ellos. (iii) Schrieffer construyó una función de onda en la cual todos los electrones cerca de la superficie de Fermi estaban pareados. A partir de esta idea surge naturalmente el salto de energía 2Δ como la energía necesaria para romper un par en dos electrones libres.

Si bien sabemos que dos electrones en el espacio libre se repelen, en un metal en lugar de hablar de electrones es más apropiado hablar de un sistema de cuasi-partículas. Esto es, una excitación de un sólido que consiste en un electrón y el **agujero de intercambio-correlación**, que es esencialmente una región del espacio alrededor del electrón donde la probabilidad de encontrar otro es muy pequeña. Bajo esta mirada, la fuerza de Coulomb entre cuasi-partículas es reducida por efecto de la amortiguación. La interacción entre los electrones se puede visualizar a través del lenguaje de los diagramas de Feynman. Un electrón con momento $\hbar p$ puede excitar a un fonón con momento $\hbar q$, quedando con un momento $\hbar p' = \hbar p - \hbar q$. Un segundo electrón puede absorber al fonón y capturar este momento. El efecto neto es entonces la *transferencia de momento* $\hbar q$ desde un electrón a otro. En la teoría BCS, este efecto se traduce en un potencial de desplazamiento efectivo, el cual puede ser atractivo si estamos cerca de la superficie de Fermi.

Cooper se preguntó qué ocurriría si colocamos dos electrones en el exterior de una superficie de Fermi esférica a $T = 0$. Recordemos que, a $T = 0$, la energía de Fermi nos dice que todos los estados de energía menores que la energía de Fermi E_F están ocupados. Se asume que la función de onda para dos partículas tiene simetría esférica, y que su *espín* total es cero. Bajo estas hipótesis, y utilizando un potencial atractivo cerca de la superficie de Fermi, Cooper se encuentra con una respuesta un tanto inesperada: si los electrones están cerca de la superficie de Fermi, interactúan entre sí formando un *estado ligado* de energía. Es importante remarcar que esto no ocurriría si los electrones se encontraran en el espacio libre.

Finalmente, Schrieffer construyó una función de onda para modelar el comportamiento de los pares de Cooper que se forman cerca de la superficie de Fermi. Esta función de onda se interpreta finalmente como un *condensado*, donde todos los pares están en el mismo estado. En este estado especial, separar un par de electrones implicaría cambiar el estado de energía del condensado completo. La energía necesaria para romper un par de Cooper en dos electrones libres, es lo que llamamos la brecha de energía, 2Δ . La energía procedente de un campo eléctrico puede ser absorbida por el condensado, produciendo una corriente. A temperaturas por debajo de la temperatura crítica, esta energía no es lo suficientemente grande como para romper el condensado. De esta forma se inhiben las colisiones electrón-fonón que se asocian a la resistividad, por lo que la corriente viaja a través del condensado sin resistencia.

Capítulo 3

Agujeros Negros Cargados en presencia de campos axiónicos

Un modelo que sea invariante bajo traslaciones y cuya carga eléctrica sea finita, puede llevar a conductividades eléctricas infinitas. Tal es el caso, por ejemplo, del agujero negro de Reissner-Nordström [9]. Manteniendo la hipótesis de finitud sobre la carga eléctrica, una manera de obtener resultados distintos para la conductividad podría ser a través de modelos que rompan la simetría de traslación, los cuales conducen a la disipación del momento. Basándonos en la correspondencia holográfica, se podría esperar que la conductividad pudiese ser leída desde su contraparte gravitatoria.

En este capítulo presentaremos, como primera aplicación de la correspondencia holográfica, un método para obtener la conductividad termoeléctrica de una CFT a partir de expresiones obtenidas de una teoría gravitatoria. El valor de la conductividad se obtendrá tras evaluar dichas expresiones en el horizonte de eventos del agujero negro. En virtud de lo anterior, en la sección 3.1 revisaremos la estrategia desarrollada en los artículos [31, 32], de donde extraeremos la idea central de cómo obtener las expresiones que dan origen a la conductividad. Luego, en la sección 3.2 presentaremos una acción de materia particular, la cual es primordial para el artículo [1]. Finalmente, algunas conclusiones de este trabajo son mencionadas.

3.1. Conductividad desde el Horizonte de Eventos

En [31, 32] los autores presentan un método para calcular la conductividad en términos del horizonte de eventos. Si bien en dicho artículo todas las componentes de la matriz de conductividad son calculadas, para nuestras intenciones explicaremos en detalle solo la construcción de la conductividad eléctrica, σ .

Comenzaremos considerando un modelo en $D = 4$ que consiste en la gravedad de Einstein, acoplado con un término de materia que contempla un campo escalar ϕ - el cual además autointeractúa a través de un potencial $V(\phi)$ - y dos campos “axiónicos”, que son duales a operadores escalares adicionales en la CFT. Este modelo envuelve un amplio espectro de soluciones de tipo agujero negro, como por ejemplo [15, 31]. Por simplicidad, asumiremos que el radio de AdS está normalizado a $\ell = 1$, que la constante cosmológica está incluida en el potencial $V(\phi)$ a través de la restricción $V(0) = -6$, y que $Z(0) = 1$. Todas estas consideraciones se resumen acorde a la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) - \frac{Z(\phi)}{4}F^2 - \frac{1}{2}(\Phi_1(\phi)(\partial\chi_1)^2 + \Phi_2(\phi)(\partial\chi_2)^2) \right], \quad (3.1)$$

la cual posee, trivialmente, simetría de traslación.

Por otra parte, todas las soluciones que se analizan en [32] están dentro del ansatz

$$ds^2 = -U dt^2 + \frac{dr^2}{U} + e^{2V_1} dx_1^2 + e^{2V_2} dx_2^2, \quad (3.2)$$

$$A = a dt, \quad \chi_i = k_i x_i, \quad (3.3)$$

donde U, V_1, V_2 y a son funciones que solo dependen de r . Notemos que los campos axiónicos χ_1, χ_2 son los que rompen explícitamente la simetría de traslación.

La densidad de corriente $J^a = (J^t, J^x, J^y)$ en la teoría dual tiene la forma

$$J^a = \sqrt{-g} Z(\phi) F^{ar}, \quad (3.4)$$

donde el lado derecho de la igualdad se puede evaluar en $r \rightarrow \infty$. La observación importante es la siguiente: dado el ansatz (3.2), la componente t de las ecuaciones de movimiento para el campo de Maxwell está dada por:

$$\nabla_\mu Z(\phi) F^{\mu t} = 0,$$

o equivalentemente,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r (\sqrt{-g} Z(\phi) F^{rt}) = 0. \quad (3.5)$$

De lo anterior observamos que $q \equiv J^t$ (3.4) es una expresión constante, la cual generalmente asociamos con la carga eléctrica. Dado que es una expresión constante, ésta puede ser evaluada para cualquier valor de r . En particular, para el *horizonte de eventos* $r = r_+$.

Con esta misma idea en mente, procedemos a perturbar las soluciones de agujero negro con el objetivo de observar cuál es la respuesta, a primer orden, que el agujero negro experimenta luego de encender un campo eléctrico de magnitud E a lo largo de una de las direcciones espaciales, digamos x_1 . Esta restricción es solo por simplicidad y no afecta el procedimiento.

Consideraremos el siguiente ansatz para la perturbación del campo A_μ :

$$A_{x_1} = \epsilon(a_{x_1}(r) - Et) dx_1. \quad (3.6)$$

Dado que se está considerando una perturbación en la dirección x_1 , es natural pensar que otros campos también se verán afectados sobre esa dirección. Se puede mostrar que es suficiente con considerar el siguiente ansatz para el resto de las perturbaciones:

$$g_{tx_1} = \epsilon h_{tx_1}(r), \quad g_{rx_1} = \epsilon h_{rx_1}(r), \quad \chi_1 = k_1 x_1 + \epsilon \zeta_1(r) \quad (3.7)$$

La primera observación importante es que, en analogía con lo que ocurría en la solución, la componente x_1 de la ecuación de Maxwell a orden ϵ es no trivial. Se deduce que

$$J^{x_1} \equiv -e^{V_2 - V_1} Z(\phi) U a'_{x_1} - q e^{-2V_1} h_{tx_1} \quad (3.8)$$

es de nuevo una constante, y por lo tanto, el lado derecho puede ser evaluado sobre el horizonte de eventos.

Solo nos falta entender cómo deben ser las perturbaciones h_{tx_1} y a_{x_1} . En primer lugar, de las ecuaciones

ciones de Einstein a orden ϵ se pueden observar las siguientes condiciones:

$$h_{rx_1} = \frac{Eqe^{-V_1-V_2}}{k_1^2\Phi_1(\phi)U} + \frac{\zeta_1'}{k_1}, \quad (3.9)$$

$$h_{tx_1}'' + (-V_1' + V_2')h_{tx_1} - \left(2V_1'(V_1' + V_2') + 2V_1'' + \frac{e^{-2V_1}k_1^2\Phi_1(\phi)}{U}\right)h_{tx_1} + e^{-V_1-V_2}qa'_{x_1} = 0. \quad (3.10)$$

Necesitamos que estas perturbaciones sean regulares, por lo que se hace necesario proponer ciertas condiciones de borde, tanto en el horizonte de eventos como en el infinito. Comenzando con las condiciones sobre el horizonte, nos cambiaremos a las coordenadas de Eddington-Finkelstein, definidas por el cambio de variable

$$v = t + \int \frac{dr}{U}. \quad (3.11)$$

En estas coordenadas, vemos que (3.6) se lee

$$A_{x_1} = \epsilon \left(a_{x_1} - E \left(v - \int \frac{dr}{U} \right) \right) dx_1, \quad (3.12)$$

y por lo tanto, imponemos como condición de borde que

$$a'_{x_1} \sim_{r_+} -\frac{E}{U}. \quad (3.13)$$

A su vez, la métrica en estas coordenadas es

$$ds^2 = -Udv^2 + 2dvdr + e^{2V_1}dx_1^2 + e^{2V_2}dx_2^2 + \epsilon h_{tx_1}dvdx - \epsilon \frac{h_{tx_1}}{U}dvdr + \epsilon h_{rx_1}dvdr \quad (3.14)$$

Pero, de (3.9) se ve que h_{rx_1} es divergente, y por lo tanto, pedir que la métrica sea regular sugiere que

$$h_{tx_1} \sim_{r_+} U h_{rx_1}. \quad (3.15)$$

De lo anterior, se desprende que es suficiente pedir que ζ_1 sea analítica en el horizonte.

Respecto de las condiciones de borde en el infinito, éstas claramente dependen de las funciones de acoplamiento $Z(\phi)$, $\Phi_1(\phi)$. Tomando en consideración el comportamiento asintótico del fondo AdS:

$$U \sim_{\infty} r^2 + \dots, \quad V_1 = V_2 \sim_{\infty} r^2 + \dots, \\ a \sim_{\infty} \mu - \frac{q}{r}, \quad \phi \sim_{\infty} \frac{c}{r^{3-\Delta}},$$

(con $\Delta < 3$) se puede reemplazar (3.8) en (3.10) para obtener una relación para h_{tx_1} . Por ejemplo, en el artículo [15] las funciones de acoplamiento son constantes, dadas por $Z(\phi) = \Phi_1(\phi) = 1$, y con ellas, se puede mostrar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_{tx} = 0, \quad (3.16)$$

y en consecuencia, $a_{x_1} \sim_{\infty} Jr^{-1}$.

Usando todas las condiciones de borde sobre el horizonte en (3.8) se obtiene la relación $J = \sigma E$, donde

$$\sigma = \left[e^{-V_1+V_2}Z(\phi) + \frac{e^{V_1+V_2}Z(\phi)^2(a')^2}{k_1^2\Phi(\phi)} \right]_{r=r_+}. \quad (3.17)$$

Respecto de las conductividades termoeléctricas, el cálculo de $\bar{\alpha}$ es análogo al anterior, a excepción

que ahora se construye una 2-forma G , que cumple la relación

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} \propto k^\mu, \quad (3.18)$$

donde k^μ es un vector de Killing arbitrario. En particular, al considerar el vector de Killing $k = \partial_t$, se concluye que $\sqrt{-g}G^{rx_1}$ es constante. Esta constante es la corriente de calor, salvo una constante de normalización:

$$Q \equiv 2\sqrt{-g}G^{rx_1}. \quad (3.19)$$

De la evaluación de Q en el horizonte, se obtiene

$$Q = -4\pi T e^{-V_1+V_2} h_{tx_1}, \quad (3.20)$$

de donde se concluye que

$$\bar{\alpha} = \left[\frac{4\pi q}{k_1^2 \Phi(\phi)} \right]_{r=r_+} \quad (3.21)$$

Utilizando perturbaciones diferentes a las anteriormente consideradas, se puede mostrar que las otras dos componentes de la matriz de conductividad son

$$\alpha = \left[\frac{4\pi q}{k_1^2 \Phi(\phi)} \right]_{r=r_+} = \bar{\alpha}, \quad \bar{\kappa} = \left[\frac{(4\pi)^2 e^{V_1+V_2} T}{k_1^2 \Phi(\phi)} \right]_{r=r_+}. \quad (3.22)$$

3.2. Interacción con un campo escalar no mínimamente acoplado

Las ideas detrás de la correspondencia AdS/CFT también han sido utilizadas para entender mejor ciertos fenómenos que ocurren en la Física de Materia Condensada [51, 52]. Por ejemplo, el caso de un agujero negro con “pelo” - cantidad conservada que no es una carga global - en un horizonte plano podría ser relevante para describir el comportamiento de superconductores no convencionales [9]: el pelo existe solo a bajas temperaturas y no está presente a altas temperaturas, que es básicamente el comportamiento de un superconductor.

Los trabajos [10, 11] y posteriormente [12, 13] han sido fundamentales en la construcción de agujeros negros con pelo, donde han considerado un campo escalar ϕ acoplado directamente con la gravedad a través de su curvatura escalar. Para plasmar este concepto, nos referimos en D dimensiones a la acción de materia dada por

$$S = \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \xi R \phi^2]. \quad (3.23)$$

El parámetro ξ se conoce usualmente como el parámetro de acoplamiento *no minimal*, y el caso $\xi = 0$ se dice *mínimamente acoplado*. De especial interés es el caso

$$\xi = \frac{D-2}{4(D-1)} \quad (3.24)$$

pues la acción resulta invariante bajo el escalamiento *conforme*

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad \bar{\phi} = \Omega^{-(D-2)/2} \phi. \quad (3.25)$$

Como consecuencia de lo anterior, la traza del tensor de energía momento, T_μ^μ se anula. En efecto:

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi + \xi(g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu + G_{\mu\nu})\phi^2, \quad (3.26)$$

$$T_\mu^\mu = \nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - \frac{D}{2}\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi + \xi(D-1)\square\phi^2 + \left(1 - \frac{D}{2}\right)R\phi^2 \quad (3.27)$$

Si reemplazamos

$$\square\phi^2 = 2\phi\square\phi + 2\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi, \quad (3.28)$$

y la ecuación de Klein-Gordon $\square\phi = \xi R\phi$ en (3.27), se obtiene

$$T_\mu^\mu = \left[\left(1 - \frac{D}{2}\right) + 2\xi(D-1)\right] [\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi + \xi R\phi^2], \quad (3.29)$$

observándose que la traza se anula exactamente cuando ξ toma el valor definido en (3.24). Por este motivo, nos referimos a (3.24) como el *acoplamiento conforme*.

Esta interacción no trivial entre la gravedad y el campo escalar ϕ ha sido estudiada ampliamente en la literatura. Extensiones agregando un potencial que depende de ϕ han sido estudiadas en [53–55]. Si uno se restringe al análisis de soluciones sobre horizontes planos, hasta la fecha no se conocen soluciones que usen únicamente esta interacción, y ha sido necesario agregar otras fuentes de interacción, como por ejemplo, extendiendo la Relatividad General a otra clase de teorías gravitatorias [56–58], agregando 3-formas [59–61].

En particular, una extensión interesante es el acoplamiento de dos campos axiónicos [14]. Los campos axiónicos corresponden a campos escalares que dependen de las coordenadas espaciales, y en la línea de la correspondencia holográfica, podemos pensar que son fuentes adicionales. Se ha mostrado que la inclusión de este tipo de campos permite construir un modelo que conduce a la disipación del momentum, [15], y por consiguiente, modelos que tienen una conductividad eléctrica σ_{DC} finita, por ejemplo, [62–69].

El estudio de la acción (3.1) suplementada con el acoplamiento conforme fue estudiada en el artículo [14], y es la base para la extensión a un acoplamiento ξ general [1].

En el artículo [1], se construye una familia uniparamétrica de lagrangianos, indexados por un parámetro positivo b . La parte gravitatoria corresponde a la teoría de Einstein en $D = 4$, con una constante cosmológica $\Lambda = -3$. Respecto de la componente de materia, el tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$ será el responsable de la carga electromagnética. Además, se incluye un campo escalar $\phi = \phi(r)$ no mínimamente acoplado (3.23), junto con un potencial $U_b(\phi)$ que depende del parámetro de la teoría. Finalmente, se consideran en forma adicional dos campos axiónicos (ψ_1, ψ_2) , los cuales están homogéneamente distribuidos a lo largo de las componentes espaciales, y al mismo tiempo, no mínimamente acoplados al campo escalar ϕ a través de una función de acoplamiento $\varepsilon_b(\phi)$, que también depende del parámetro b . Todo lo anterior se puede codificar a través del lagrangiano

$$\mathcal{L} = \kappa(R - 2\Lambda) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\xi}{2}R\phi^2 - U_b(\phi) - \frac{\varepsilon_b(\phi)}{2} \sum_{i=1}^2 \partial_\mu\psi_i \partial^\mu\psi_i.$$

En el análisis se observan dos familias de soluciones de agujero negro, donde la posición del horizonte de eventos depende de la intensidad de carga axiónica ω . En una de ellas, para $\omega > 0$, la Temperatura de Hawking adquiere un valor no nulo, y se concluye que el rango de posibilidades para el parámetro b está sujeto a 3 condiciones:

1. Una restricción matemática producto de la existencia de una relación entre las cargas electro-

magnéticas q_e, q_m y la carga axiónica ω dada por

$$\omega^4 = \frac{96 b^{n-1} n \kappa^2 (q_e^2 + q_m^2)}{n - 1 - 8 n \kappa b^{n-1}}, \quad (3.30)$$

donde n es simplemente una redefinición del parámetro ξ , $n = \frac{1}{1 - 4\xi}$. El lado izquierdo de la igualdad es siempre no negativo, y eso impone condiciones sobre b en el lado derecho.

2. Una restricción proveniente de la entropía, puesto que el parámetro b modifica la entropía de las soluciones en la siguiente forma:

$$\mathcal{S} = \frac{A}{4} \left(\frac{1}{G} - 2\pi \frac{n-1}{n} (4b)^{\frac{1-n}{2}} \right), \quad (3.31)$$

y por lo tanto, la restricción sobre b queda en evidencia pues la entropía siempre debe ser positiva. En el caso $\omega > 0$, las soluciones con entropía positiva están en el rango $0 < \xi < \frac{1}{4}$, acordes a las restricciones estudiadas en [70].

3. Una restricción proveniente de la conductividad eléctrica, dado que el parámetro b también la modifica:

$$\sigma_{DC} = 1 + \frac{(n-1) - 8n\kappa b^{n-1}}{72n\kappa b^{n-1} + (n-1)(4^{2-n}(3n-5) - 1)}. \quad (3.32)$$

Se puede observar que para valores arbitrarios de b , la conductividad se podría ver afectada de modo tal de obtener soluciones físicamente inaceptables ($\sigma_{DC} < 0$). Se observa también que existe un valor crítico para n_{crit} tal que para cualquier $n > n_{\text{crit}}$ existe una pareja (n, b) donde la conductividad es infinita. Esta divergencia podría ser indicador de una teoría que imite el comportamiento de conductores perfectos.

El otro tipo de soluciones, cuando $\omega < 0$, es menos restrictivo en términos del parámetro b , pero a diferencia, la Temperatura de Hawking es $T = 0$. Una característica que destaca en esta solución es el hecho que el parámetro no minimal toma valores discretos, y esto tiene un efecto sobre la masa del agujero negro. La entropía sigue la fórmula de Bekenstein-Hawking. Aún más interesante que lo anterior, es que en este caso la matriz de conductividad eléctrica tiene el siguiente comportamiento:

$$\sigma_{DC} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{q_m}{q_e} \\ -\frac{q_m}{q_e} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

que es muy similar al efecto Hall cuando el tiempo de relajación tiende a infinito (2.28).

Axionic charged black branes with arbitrary scalar nonminimal coupling

Adolfo Cisterna

Universidad Central de Chile, Vicerrectoria académica, Toesca 1783, Santiago, Chile

E-mail: adolfo.cisterna-at-ucentral.cl

Luis Guajardo

Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, Casilla 747, Talca, Chile.

E-mail: luis.guajardo.r-at-gmail.com

Mokhtar Hassaine

Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, Casilla 747, Talca, Chile.

E-mail: hassaine-at-inst-mat.otalca.cl

ABSTRACT: In this paper, we construct four-dimensional charged black branes of a nonminimally coupled and self-interacting scalar field. In addition to the scalar and Maxwell fields, the model involves two axionic fields homogeneously distributed along the two-dimensional planar base manifold providing in turn a simple mechanism of momentum dissipation. Interestingly enough, the horizon of the solution can be located at two different positions depending on the sign of the axionic charge, and in both cases there exists a wide range of values of the nonminimal coupling parameter yielding physical acceptable solutions. For negative axionic charge, the allowed nonminimal coupling parameters take discrete values and the solution turns out to be extremal since it has zero temperature. A complete analysis of the thermodynamical features of the solutions is also carried out. Finally, thanks to the mechanism of momentum dissipation, the holographic DC conductivities of the solutions are computed in terms of the black hole horizon data, and we analyze the effects of the nonminimal coupling parameter on these conductivities. For example, we notice that for the non extremal solutions, there always exists a nonminimal coupling (which is greater than the conformal one in four dimensions) yielding perfect conductivity in the sense that the conductivity is infinite. Even more astonishing, the conductivity matrix for the extremal solutions has a Hall effect-like behavior.

Contents

1. Introduction	1
2. Model, field equations and black brane solutions	3
3. Thermodynamics of the solutions by means of the Hamiltonian method	6
4. Holographic DC Conductivities	10
5. Conclusion	15

1. Introduction

In the last decades, the ideas underlying the Anti de-Sitter/Conformal Field Theory (AdS/CFT) correspondence have been applied to get a better understanding of phenomena that occur in the condensed matter physics as the quantum Hall effect, the superconductivity or the superfluidity, see e. g. [1, 2]. As a significative example, we can mention the case of charged hairy black holes with a planar horizon that may be relevant to describe the behavior of unconventional superconductors [3]. In this scenario, the nonzero condensate behavior of the unconventional superconductors is mimicked by the existence of a hair at low temperature that must disappear in the high temperature regime [3]. Nevertheless, finding black holes with such features is an highly nontrivial problem that is rendered even more difficult by the various no-hair theorems with scalar fields existing in the current literature, see e. g. [4]. Fortunately, the precursor works of Refs. [5] and [6] have established that scalar fields nonminimally coupled seem to be an excellent laboratory in order to escape the standard scalar no-hair theorems. Indeed, as shown independently in Ref. [5] and Ref. [6], conformal scalar field nonminimally coupled to Einstein gravity can support black hole configuration with a nontrivial scalar field. These black hole solutions have been dubbed BBMB solution in the current literature. However, the BBMB solution suffers from some pathology essentially because of the divergence of the scalar field at the event horizon. This inconvenient makes its physical interpretation and the problem of its stability a subject of debate. A way of circumventing this pathology consists in introducing a cosmological constant whose effect is to precisely push the singularity behind the horizon, and as a direct consequence, the scalar field becomes well-defined at the event horizon [7]. It is important to stress that for the BBMB solution or its extensions with cosmological constant dubbed as the MTZ solution [7, 8], the parameter ξ that couples nonminimally the scalar field to the curvature is always

the conformal one in four dimensions, namely $\xi = \frac{1}{6}$, and the horizon topology of the black hole solutions is either spherical or hyperbolic depending on the sign of the cosmological constant. There also exist examples of black hole solutions with the conformal coupling $\xi = \frac{1}{6}$ but with a potential term that breaks the conformal invariance of the matter source, see e. g. [9, 10]. Nevertheless, charged black holes with planar horizon topology for a scalar field nonminimally coupled to Einstein gravity with or without a cosmological constant are not known¹. It seems that extra matter source is needed in order to sustain planar charged black hole with a nonminimal scalar field. This intuition is based on the works done in [14, 15] where a planar version of the MTZ solution was rendered possible thanks to the introduction of two 3-forms that were originated from two Kalb-Raimond potentials. Interestingly enough, this construction was also extended for arbitrary nonminimal coupling in [16]. Very recently, it has also been shown that (charged) planar AdS black holes can arise as solutions of General Relativity with a source composed by a conformal scalar field together with two axionic fields depending linearly on the coordinates of the planar base manifold [17]. The existence of these planar black holes is mainly due to the presence of the axionic scalar fields which, in addition of inducing an extra scale, allow the planar solutions to develop an event horizon. More precisely, as proved in [17], the black hole mass is related to the axionic charge, and hence these axionic (charged) black branes can be interpreted as extremals in the sense that all their Noetherian charges are fixed in term term of the axionic intensity parameter. Many other interesting features are inherent to the presence of axionic fields for planar solutions. Among others, axionic fields depending linearly on the coordinates of the planar base manifold provide a very simple mechanism of momentum dissipation [18]. From an holographic point of view, this feature has a certain interest since, as established in Refs. [19, 20], the computation of the DC conductivities can be uniquely expressed in term of the black hole horizon data. Mainly because of these results, the study of axionic black hole configurations in different contexts has considerably grow up the last time, see e. g. [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28].

In the present, we plan to extend the work done in the conformal situation [17] to the case of a four-dimensional scalar field with an arbitrary nonminimal coupling with two axionic fields. The model also involves a parameter b that enters in the scalar potential and in the function that minimally couples the scalar and the axionic fields, see below (2.3a-2.3b). The range of this extra parameter will be fixed by some reality conditions as well as by demanding the solutions to have positive entropy. Asymptotically AdS planar dyonic black hole solutions will be presented with axionic fields homogenously distributed along the orthogonal planar coordinates of the base manifold for *a priori* any positive value of the nonminimal coupling parameter ξ . However, the positive entropy condition will considerably reduce the range of the permissible values of the nonminimal coupling parameter. As in the conformal case [17], the solutions only contain an integration constant, the axionic charge, here denoted by ω . Interestingly enough, the location of the event horizon can be at two different positions depending on the sign of the axionic charge ω . Moreover, for $\omega < 0$, the range of permissible

¹In higher dimensions $D > 4$, it has been shown that locally AdS black hole solutions with planar base manifold can emerge for scalar field nonminimally coupled to Lovelock gravity [11, 12, 13].

values of the nonminimal coupling parameter is discrete, and the solution is shown to be extremal since it has zero temperature. Finally, the full DC conductivities associated to the charged black brane solutions will be computed following the recipes given in [19, 20]. One of our motivations is precisely to identify the impact on the conductivities of the nonminimal coupling parameter.

The plan of the paper is organized as follows. In the next section, we present the model which consists of the Einstein gravity action with a negative cosmological constant with a source given by a self-interacting and nonminimally scalar field coupled to two axionic fields. In Sec. 3, the asymptotically AdS planar dyonic solutions are presented. In Sec. 4, a detailed analysis of the thermodynamics properties of the solutions through the Hamiltonian method is provided allowing to identify correctly the mass of the dyonic solutions. In the next section, following the perturbative method presented in [19, 20], the full DC conductivities of the (non) extremal solutions are computed and the effects of the nonminimal coupling parameter are analyzed. The last section is devoted to our conclusions.

2. Model, field equations and black brane solutions

We consider a four-dimensional Einstein-Maxwell model with a negative cosmological constant, a nonminimally coupled and self-interacting scalar field ϕ together with two axionic fields ψ_i for $i = 1, 2$ whose action is given by

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\kappa(R - 2\Lambda) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\xi}{2} R \phi^2 - U_b(\phi) - \frac{\varepsilon_b(\phi)}{2} \sum_{i=1}^2 \partial_\mu \psi_i \partial^\mu \psi_i \right) \quad (2.1)$$

Here the Maxwell field strength is $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, the nonminimal coupling parameter is denoted by ξ while the potential U_b and the coupling ε_b will be given below. For latter convenience, we shall opt for the following parametrization of the nonminimal coupling parameter ξ

$$\xi = \frac{n-1}{4n}, \quad (2.2)$$

which maps the region $\xi > 0$ to $n \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]^2$. Note that the particular value $\xi = \frac{1}{4}$ which corresponds to the limit $n \rightarrow \infty$ will be treated separately. The potential $U_b(\phi)$ and the coupling $\varepsilon_b(\phi)$ associated to the axionic fields depend on a positive constant denoted by b whose range will be conditioned by some reality conditions as shown below

$$U_b(\phi) = \frac{1-n}{8n \left(1 - b\phi^{\frac{2}{n-1}}\right)^4} \left(4b^3(n-3)(n-4)\phi^{\frac{2n+4}{n-1}} - 3b^2(n-4)(3n-7)\phi^{\frac{2n+2}{n-1}} + 6b(n-3)^2\phi^{\frac{2n}{n-1}} - (n-3)(n-4)\phi^2 - 6b^{5-n}\phi^{\frac{8}{n-1}} \right), \quad (2.3a)$$

²A simple calculation shows that the range of values $\xi < 0$ is not compatible with the reality condition as defined by Eq. (2.6).

$$\varepsilon_b(\phi) = 1 + \frac{n-1}{8n\kappa} \left(\frac{(n-2)\phi^2 - (n-3)b\phi^{\frac{2n}{n-1}} - b^{3-n}\phi^{\frac{4}{n-1}}}{(1-b\phi^{\frac{2}{n-1}})^2} \right). \quad (2.3b)$$

Before proceeding, we would like to stress that the minimal case $\xi = 0$ or equivalently $n = 1$ which has been fully treated in [18] is clearly excluded from our analysis because of the form of the expressions $U_b(\phi)$ and $\varepsilon_b(\phi)$. Also, we may note that for the conformal situation $\xi = \frac{1}{6}$ or equivalently $n = 3$, the potential vanishes identically and the axionic minimal coupling $\varepsilon_b(\phi) = 1$, and this situation corresponds to the case already studied in [17].

The field equations obtained by varying the action (2.1) with respect to the metric, the Maxwell field A_μ , the scalar field ϕ and the axionic fields ψ_i read respectively

$$\begin{aligned} \kappa(G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}T_{\mu\nu}^\phi + \frac{1}{2}T_{\mu\nu}^\psi + \frac{1}{2}T_{\mu\nu}^{\text{em}}, \\ \nabla_\mu F^{\mu\nu} &= 0, \\ \square\phi &= \frac{n-1}{4n}R\phi + \frac{dU_b}{d\phi} + \frac{1}{2}\frac{d\varepsilon_b}{d\phi} \sum_{i=1}^2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_i \partial_\nu \psi_i, \\ \nabla_\alpha (\varepsilon_b(\phi) \nabla^\alpha \psi_i) &= 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

where the different energy-momentum tensors are given by

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^\phi &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + U_b(\phi) \right) + \frac{n-1}{4n} (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu + G_{\mu\nu}) \phi^2, \\ T_{\mu\nu}^\psi &= \varepsilon_b(\phi) \sum_{i=1}^2 \left(\partial_\mu \psi_i \partial_\nu \psi_i - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \psi_i \partial^\alpha \psi_i \right), \\ T_{\mu\nu}^{\text{em}} &= F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Dyonic black brane solutions of the field equations for $\Lambda = -3$ and with axionic fields homogeneously distributed along the two-dimensional planar base manifold can be found, and are given by

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(dx^2 + dy^2), \\ f(r) &= \frac{1}{r^2} \left(r - \frac{3\omega}{\sqrt{12\kappa}} \right) \left(r + \frac{\omega}{\sqrt{12\kappa}} \right)^3, \quad \psi_1(x) = \omega x, \quad \psi_2(y) = \omega y \\ \phi(r) &= \left[\frac{\omega}{b(\sqrt{12\kappa}r + \omega)} \right]^{\frac{n-1}{2}}, \quad A_\mu dx^\mu = -\frac{q_e}{r} dt + \frac{q_m}{2} (x dy - y dx), \end{aligned} \quad (2.5)$$

where the intensity of the axionic fields ω is tied to the electric and magnetic charges by the relation

$$\omega = \pm \left(\frac{96 b^{n-1} n \kappa^2 (q_e^2 + q_m^2)}{n-1-8n\kappa b^{n-1}} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.6)$$

Table 1: Range of the permissible values of the nonminimal coupling parameter ξ depending on the sign of the axionic parameter ω ensuring a real solution.

Sign of ω	horizon r_+	Permissible values of n or equivalently of ξ and range of b
$\omega > 0$	$r_+ = \frac{3\omega}{\sqrt{12\kappa}}$	$n > 1$ i. e. $\xi \in]0, \frac{1}{4}[$ $b \in]0, b_0[$
$\omega > 0$	$r_+ = \frac{3\omega}{\sqrt{12\kappa}}$	$n < 0$, i. e. $\xi \in]\frac{1}{4}, \infty[$, $b \in]b_0, \infty[$
$\omega < 0$	$r_+ = -\frac{\omega}{\sqrt{12\kappa}}$	$n = 1 - 2k$, i. e. $\xi = \frac{k}{2(2k-1)}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $b \in]b_0, \infty[$

We will now be as exhaustive as possible to enumerate the properties of these dyonic black brane solutions. For a nonminimal coupling parameter ξ as parameterized by (2.2), we have to distinguish between the case $n > 1$ corresponding to $\xi \in]0, \frac{1}{4}[$, and the case $n < 0$, i. e. $\xi \in]\frac{1}{4}, \infty[$. For $n > 1$, in order to deal with a real constant ω as defined by (2.6), the parameter b of the model must belong to the interval $b \in]0, b_0[$ with

$$b_0 = \left(\frac{n-1}{8n\kappa} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad (2.7)$$

while for $n < 0$, one must have $b \in]b_0, \infty[$. Also, the constraint (2.6) allows both sign for the intensity of the axionic fields ω . This remark has an interesting consequence concerning the location of the horizon r_+ since for $\omega > 0$, we have $r_+ = \frac{3\omega}{\sqrt{12\kappa}}$ while for $\omega < 0$, the event horizon is located at $r_+ = -\frac{\omega}{\sqrt{12\kappa}}$. In this former case, because of the form of the metric function (2.5), the temperature of the solution vanishes identically and the black brane configuration can be interpreted as an extremal solution. It remains to ensure that the scalar field (2.5) is well-defined in the region outside the horizon, namely for $r \in [r_+, \infty[$. For $\omega > 0$, the scalar field is regular everywhere in the region $r > 0$. On the other hand, for a negative axionic intensity parameter $\omega < 0$, the reality condition on the scalar field on the region $r \in [r_+ = -\frac{\omega}{\sqrt{12\kappa}}, \infty[$ restricts the parameter n to be an odd negative integer $n = 1 - 2k$ with $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ or equivalently the nonminimal coupling parameters is forced to take the discrete values given by $\xi = \frac{k}{2(2k-1)}$. All these details are summarized in the table 1. It is also interesting to stress that for $\omega < 0$, even if the scalar field vanishes at the horizon, the expressions of the potential (2.3a) and the coupling (2.3b) remain finite once evaluated on the solution at the horizon, i. e.

$$U_b(\phi)|_{r_+} = \frac{3(n-1)b^{1-n}}{4n}, \quad \varepsilon_b(\phi)|_{r_+} = 1 - \frac{(n-1)b^{1-n}}{8n\kappa}. \quad (2.8)$$

This remark will be of importance for the finiteness of the DC conductivities of the extremal solutions. Finally, we would like to make a comment concerning the neutral configuration $q_e = q_m = 0$. In this case, the reality condition on ω given by Eq. (2.6) is replaced by a constraint on b given by $b = b_0$ where b_0 is defined in (2.7).

To conclude this section, we briefly report the solution for the special coupling $\xi = \frac{1}{4}$ which was excluded from the previous study. In contrast with the other couplings, the black

brane solution can not be charged, and the neutral solution is given by

$$ds^2 = - \left(r^2 - \frac{\omega^2}{2\kappa} - \frac{\omega^3}{2\kappa r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(r^2 - \frac{\omega^2}{2\kappa} - \frac{\omega^3}{2\kappa r} \right)} + r^2(dx^2 + dy^2), \quad (2.9)$$

$$\phi(r) = e^{\frac{r}{\omega}}, \quad \psi_1(x) = \omega x, \quad \psi_2(y) = \omega y, \quad (2.10)$$

for a potential U and a coupling ε free of any couplings that read

$$U(\phi) = \frac{\phi^2}{4\kappa \ln(\phi)} (2\kappa \ln(\phi)^3 + 6\kappa \ln(\phi)^2 + (3\kappa - 1) \ln(\phi) - 2), \quad (2.11)$$

$$\varepsilon(\phi) = 1 - \frac{\phi^2}{4\kappa} (\ln(\phi) + 2). \quad (2.12)$$

One can easily see that for $\omega > 0$, the metric solution admits a single root located at $r_+ \in]\frac{\omega^2}{3\kappa}, \infty[$.

3. Thermodynamics of the solutions by means of the Hamiltonian method

We now study the thermodynamics properties of the non-extremal solution (2.5) with $\omega > 0$ whose event horizon is located at $r_+ = \frac{3\omega}{\sqrt{12\kappa}}$ with $n \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ or equivalently $\xi \in]0, \frac{1}{4}[\cup] \frac{1}{4}, \infty[$. In order to achieve this task, we will proceed using the Euclidean approach where the time is imaginary and periodic with period $\beta = T^{-1}$. Here, T stands for the temperature which is fixed by requiring regularity at the horizon. The temperature of the non-extremal solution (2.5) reads

$$T = \frac{16\omega}{9\pi\sqrt{12\kappa}}. \quad (3.1)$$

The Euclidean action I_{Euc} is related to the Gibbs free energy \mathcal{F} by

$$I_{Euc} = \beta\mathcal{F} = \beta(\mathcal{M} - T\mathcal{S} - \sum_i \mu_i \mathcal{Q}_i),$$

where \mathcal{M} is the mass, \mathcal{S} the entropy and μ_i are the extra potentials with their corresponding charges \mathcal{Q}_i [29].

In order to construct a well-defined Euclidean action, we will consider a mini superspace where the metric is static and given by

$$ds^2 = N(r)f(r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(dx^2 + dy^2),$$

with $\tau \in [0, \beta]$. The radial coordinate r ranges from the horizon to infinity, i. e. $r \geq r_+$, and the planar coordinates both are assumed to belong to a compact set, that is $x \in \Omega_x$ and $y \in \Omega_y$ with $\int dx dy = \Omega_x \Omega_y$. We also assume a specific ansatz for the scalar, axionic

and electromagnetic fields, i. e. $\phi = \phi(r)$, $A_\mu dx^\mu = A_\tau(r)d\tau + A_x(y)dx + A_y(x)dy$, and $\psi_1 = \psi_1(x)$, and $\psi_2 = \psi_2(y)$. In doing so, the reduced Euclidean action takes the form

$$I_{Euc} = \int d^4x (N\mathcal{H} + A_\tau p') + B, \quad (3.2)$$

where B is a boundary term that will be properly fixed below. Here p is the conjugate momentum of A_τ , $p = -\frac{r^2}{N(r)}A_\tau(r)'$, and the reduced Hamiltonian \mathcal{H} is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & (2\kappa - \xi\phi(r)^2)(rf'(r) + f(r)) - \frac{1}{2}f(r)r^2(-1 + 4\xi)\phi'(r)^2 - r\xi\phi(r)(rf'(r) + 4f(r))\phi'(r) \\ & - 2r^2f(r)\xi\phi(r)\phi''(r) + \frac{\varepsilon(\phi)}{2} \sum_{i=1}^2 (\partial_i\psi_i)^2 + \frac{(\partial_x A_y - \partial_y A_x)^2}{2r^2} + \frac{2p^2}{r^2} + r^2 U_b(\phi) + 2\kappa r^2 \Lambda. \end{aligned}$$

The boundary term B is fixed by requiring that the reduced action has an extremum, that is $\delta I_{Euc} = 0$, yielding to

$$\begin{aligned} \delta B = & \left[(-A_\tau \delta p - N(r) [(2r\kappa - r\xi\phi(r)^2 r^2 \xi\phi(r)\phi'(r))\delta f - r^2(f'(r)\xi\phi(r) + f(r)\phi'(r) - 2f(r)\xi\phi'(r))\delta\phi \right. \\ & \left. + 2r^2 f(r)\xi\phi(r)\delta\phi']\right]_{r_+}^R - \int_{r_+}^R dr \varepsilon_n(\phi(r)) \left\{ \left[\int_{\Omega_y} dy \partial_x \psi_1 \delta\psi_1 \right]_{x \in \Omega_x} + \left[\int_{\Omega_x} dx \partial_y \psi_2 \delta\psi_2 \right]_{y \in \Omega_y} \right\} \quad (3.3) \\ & - \int_{r_+}^R dr \frac{N(r)}{r^2} \left\{ \left[\int_{\Omega_x} dx (\partial_y A_x - \partial_x A_y) \delta A_x \right]_{y \in \Omega_y} - \left[\int_{\Omega_y} dy (\partial_y A_x - \partial_x A_y) \delta A_y \right]_{x \in \Omega_x} \right\} \beta \Omega_x \Omega_y, \end{aligned}$$

where this expression has to be evaluated at the limit $R \rightarrow \infty$. The field equations obtained from varying the Euclidean action (which do not depend on the boundary term B) imply that N is a constant, and this latter can be chosen without any loss of generality to be $N(r) = 1$. On the other hand, Gauss law implies that $p = cst = q_e$. For the axionic fields, we note that their contribution strongly depends on the integral $\int_{r_+}^r \varepsilon_b(\phi(r)) dr$, which in our case can be computed yielding to

$$\int_{r_+}^r \varepsilon_b(\phi(r)) dr = r - \frac{(n-1)b^{1-n}}{96\kappa^2 nr} \left(\omega^{n-1}(\sqrt{12\kappa r} + \omega)^{3-n} - \omega^2 \right) - (r \longleftrightarrow r_+). \quad (3.4)$$

The final variation of δB at the infinity is finite and given by

$$\delta B(\infty) = \beta \Omega_x \Omega_y \left(\frac{4\omega^2}{\sqrt{12\kappa}} + \eta \frac{(n-3)(n-1)\sqrt{12\kappa} b^{1-n} \omega^2}{48n\kappa^2} \right),$$

where η is defined as

$$\eta = \delta_n^2 + \delta_n^{-k}, \quad \text{where } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \quad (3.5)$$

The emergence of this extra contribution proportional to η which is effective only for $n = 2$ and for any nonzero negative integer can be explained from the fact that the "binomial"

expression appearing between the large brackets in (3.4) will contribute with a linear term in the radial coordinate only for integer values $n \in \mathbb{N}$ less or equal to three³. Working in the grand canonical ensemble, where β and all the potentials are fixed, the boundary term at the infinity can be integrated as

$$B(\infty) = \beta \Omega_x \Omega_y \left(\frac{4\omega^3}{3\sqrt{12\kappa}} + \eta \frac{(n-3)(n-1)\sqrt{12\kappa}b^{1-n}\omega^3}{144n\kappa^2} \right). \quad (3.6)$$

For the contribution at the horizon of the Euclidean action, we require the following variations

$$\begin{aligned} \delta f|_{r_+} &= -f'(r_+)\delta r_+, & \delta\phi|_{r_+} &= \delta(\phi(r_+)) - \phi'(r_+)\delta r_+ \\ \delta p|_{r_+} &= \delta q_e, & \delta A_y|_{r_+} &= \frac{x}{2}\delta q_m, & \delta A_x|_{r_+} &= -\frac{y}{2}\delta q_m \\ \delta\psi_1|_{r_+} &= x\delta\omega, & \delta\psi_2|_{r_+} &= y\delta\omega \end{aligned}$$

For reason that will become clear, see below Eq. (3.10b), we define

$$\tilde{G} = \frac{1}{16\pi\kappa - \frac{2(n-1)}{n}\pi\phi(r_+)^2}, \quad (3.7)$$

and we finally get

$$\delta B(r_+) = \delta \left(\frac{A_+}{4\tilde{G}} \right) + \beta [\Phi_e \delta q_e + \Phi_m \delta q_m - \Phi_1 \delta\omega - \Phi_2 \delta\omega] \Omega_x \Omega_y, \quad (3.8)$$

where $A_+ = \Omega_x \Omega_y r_+^2$ is the horizon area, $\Phi_e = \frac{q_e}{r_+}$, $\Phi_m = \frac{q_m}{r_+}$ and Φ_1 and Φ_2 correspond to the axionic potentials, defined as ω times the horizon term of (3.4), i.e.,

$$\Phi_1 = \Phi_2 \equiv \omega \left(r_+ - \frac{(n-1)b^{1-n}}{96\kappa^2 n r_+} \left(\omega^{n-1} (\sqrt{12\kappa} r_+ + \omega)^{3-n} - \omega^2 \right) - \eta \frac{(n-3)(n-1)\sqrt{12\kappa}b^{1-n}\omega}{96n\kappa^2} \right).$$

Therefore, the boundary term at the horizon is

$$B(r_+) = \frac{A_+}{4\tilde{G}} + \beta [\Phi_e q_e + \Phi_m q_m - \Phi_1 \omega - \Phi_2 \omega] \Omega_x \Omega_y. \quad (3.9)$$

Plugging (3.6) and (3.9) we obtain our boundary term, $B = B(\infty) - B(r_+)$. The relation between the boundary term and the Gibbs free energy allows us to identify the mass \mathcal{M} , the entropy \mathcal{S} , the electric charge \mathcal{Q}_e , the magnetic charge \mathcal{Q}_m and the axionic charges \mathcal{Q}_1 and \mathcal{Q}_2 ,

$$\mathcal{M} = \Omega_x \Omega_y \left(\frac{4\omega^3}{3\sqrt{12\kappa}} + \eta \frac{(n-3)(n-1)\sqrt{12\kappa}b^{1-n}\omega^3}{144n\kappa^2} \right), \quad (3.10a)$$

$$\mathcal{S} = \frac{A_+}{4\tilde{G}}, \quad (3.10b)$$

$$\mathcal{Q}_e = \Omega_x \Omega_y q_e, \quad \mathcal{Q}_m = \Omega_x \Omega_y q_m, \quad \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2 = -\Omega_x \Omega_y \omega. \quad (3.10c)$$

³We may remember that the values $n = 0$ and $n = 1$ were excluded from the very beginning, and for $n = 3$ the expression multiplying η vanishes identically.

It is reassuring to check that in the conformal case $n = 3$, these thermodynamics quantities reduce to those obtained in [17]. On the other hand, even if the first law is satisfied by means of the constraint (2.6), the signs of the entropy and the mass must be analyzed carefully. Firstly, the positivity of the entropy imposes a lower bound for the parameter b ; this is because the constant \tilde{G} as defined by (3.7) must be strictly positive, and this leads to

$$b > \frac{1}{4} \left(\frac{n-1}{8n\kappa} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{4} b_0, \quad \text{for } n > 1, \quad \text{and} \quad b < \frac{1}{4} b_0, \quad \text{for } n < 0.$$

Referring to the Table 1, one can see that the reality condition imposed by (2.6) for $\omega > 0$ make possible to deal with solutions with positive entropy only if $n > 1$ or equivalently $\xi \in]0, \frac{1}{4}[$ and the range of the parameter b must then be reduced to $b \in]\frac{1}{4}b_0, b_0[$. For the other values of the nonminimal coupling parameter $n < 0$ or equivalently $\xi > \frac{1}{4}$, the entropy of the solutions turns out to be always negative because of the reality condition (2.6). Concerning the mass, it is interesting to note that the mass is always positive for $\eta = 0$ as defined by (3.5) or for the conformal case $n = 3$. On the other hand, for $n = 2$, the positivity of the mass requires $b > \frac{1}{2}b_0$, and hence our static solution with $n = 2$ can have positive entropy and mass by demanding the parameter b to belong to the set $b \in]\frac{1}{2}b_0, b_0[$. Finally, for the remaining values for which $\eta = 1$, namely $n = -1, -2, \dots$, the solutions will always have negative mass and entropy.

For the extremal solution corresponding to $\omega < 0$ and ξ taking discrete values (cf. Table 1) with a scalar field vanishing at the horizon $\phi(r_+) = 0$, it is not safe to consider the Euclidean approach since the inverse of the temperature is infinite. Nevertheless, one can compute the entropy of the extremal solution by means of the Wald's formula [30] yielding

$$\mathcal{S}_{\text{extremal}} = 4\pi\kappa\Omega_x\Omega_y r_+^2. \quad (3.11)$$

It is interesting to note that this result matches with the non extremal expression (3.10b) with (3.7) by taking $\phi(r_+) = 0$. In addition, as it can be seen from Eq. (3.11), the entropy of the extremal solution is always positive and given by the Hawking formula, $S = \frac{\text{Area}}{4G}$, after restoring correctly the value of κ in term of the Newton gravitational constant, i. e. $\kappa = \frac{1}{16\pi G}$. On the other hand, the mass of the extremal solution is given by

$$\mathcal{M}_{\text{extremal}} = \Omega_x\Omega_y \left(\frac{4\omega^3}{3\sqrt{12\kappa}} + \frac{(n-3)(n-1)\sqrt{12\kappa}b^{1-n}\omega^3}{144n\kappa^2} \right), \quad (3.12)$$

and it is easy to see that for the permissible discrete values of the nonminimal coupling parameters $n = 1 - 2k$ with $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ this expression is always positive for $b > b_0$ (cf Table 1) even if $\omega < 0$.

Table 2: Signs of the entropy and mass of the dyonic solutions whose reality conditions are fixed by Table 1 and where $b_0 = \left(\frac{n-1}{8n\kappa}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Sign of ω	Permissible values of ξ	Signs of entropy and mass
$\omega > 0$	$n > 1$ and $n \neq 2$ i. e. $\xi \in]0, \frac{1}{4}[\setminus \frac{1}{8}$	$\mathcal{S} > 0$ and $\mathcal{M} > 0$, for $b \in]\frac{1}{4}b_0, b_0[$
$\omega > 0$	$n = 2$ i. e. $\xi = \frac{1}{8}$	$\mathcal{S} > 0$ and $\mathcal{M} > 0$, for $b \in]\frac{1}{2}b_0, b_0[$
$\omega > 0$	$n < 0$ i. e. $\xi \in]\frac{1}{4}, \infty[$	$\mathcal{S} < 0$ and $\mathcal{M} < 0$, for $b > b_0$
$\omega < 0$	$n = 1 - 2k$, i. e. $\xi = \frac{k}{2(2k-1)}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$\mathcal{S} > 0$ and $\mathcal{M} > 0$, for $b > b_0$

4. Holographic DC Conductivities

In Refs [19, 20], it was established that the full DC conductivities for black holes enjoying a momentum dissipation can be computed in terms of the black hole horizon data. The main idea is to construct some conserved currents independent of the holographic radial coordinate r . To that end, we follow the prescription as described in Refs. [19, 20], and we first turn on the following relevant perturbations on the black brane solution (2.5)

$$\begin{aligned}\delta A_x &= -E_x t + a_x(r), & \delta A_y &= -E_y t + a_y(r) \\ \delta g_{tx} &= r^2 h_{tx}(r), & \delta g_{rx} &= r^2 h_{rx}(r), & \delta g_{ty} &= r^2 h_{ty}(r), & \delta g_{ry} &= r^2 h_{ry}(r) \\ \delta \psi_1 &= \chi_1(r), & \delta \psi_2 &= \chi_2(r),\end{aligned}$$

where E_x, E_y are two constants. Consequently, the two perturbed Maxwell equations read

$$\begin{aligned}f' a'_x + F a''_x + q_e h'_{tx} + q_m (f' h_{ry} + f h'_{ry}) &= 0, \\ f' a'_y + F a''_y + q_e h'_{ty} - q_m (f' h_{rx} + f h'_{rx}) &= 0,\end{aligned}$$

which allow to define the following two conserved currents,

$$J_x := -f a'_x - q_e h_{tx} - q_m f h_{ry}, \quad (4.1a)$$

$$J_y := -f a'_y - q_e h_{ty} + q_m f h_{rx}. \quad (4.1b)$$

According to the AdS/CFT correspondence, the holographic DC conductivities are determined by the conserved currents in the asymptotic boundary, and since the expressions obtained above (4.1a) and (4.1b) are independent of the radial coordinate, we can evaluate them at the horizon r_+ . The next step is to impose boundary conditions on the linearized perturbations at the black hole horizon. In order to achieve this task, it is convenient to use the Eddington-Finkelstein coordinates (v, r) such that $v = t + \int \frac{dr}{f(r)}$. In this case, the gauge field will be well-defined by demanding

$$a_x = -E_x \int \frac{dr}{f(r)}, \quad a_y = -E_y \int \frac{dr}{f(r)}, \quad (4.2)$$

while we will require the axionic fields to be constant near the horizon, and for the metric perturbations we will need to impose

$$h_{rx} = \frac{h_{tx}}{f(r)}, \quad h_{ry} = \frac{h_{ty}}{f(r)}. \quad (4.3)$$

All the previous conditions can be substituted into the rx and ry components of the linearized Einstein equations, obtaining a system of equations for $h_{tx}(r_+)$ and $h_{ty}(r_+)$, whose solutions are given by

$$h_{tx} = \frac{-E_y q_m^3 - q_m \varepsilon_b(\phi) \omega^2 r^2 E_y - q_e \varepsilon_b(\phi) \omega^2 r^2 E_x - q_e^2 q_m E_y}{16\alpha^2 q_m^4 + 2q_m^2 \varepsilon_b(\phi) \omega^2 r^2 + \varepsilon_b(\phi)^2 \omega^4 r^4 + 16\alpha^2 q_e^2 q_m^2} \Big|_{r=r_+}, \quad (4.4a)$$

$$h_{ty} = \frac{q_e^2 q_m E_x + q_m^3 E_x - q_e \varepsilon_b(\phi) \omega^2 r^2 E_y + 4\alpha q_m \varepsilon_b(\phi) \omega^2 r^2 E_x}{q_m^4 + 2q_m^2 \varepsilon_b(\phi) \omega^2 r^2 + \varepsilon_b(\phi)^2 \omega^4 r^4 + Q_e^2 q_m^2} \Big|_{r=r_+}. \quad (4.4b)$$

Since the DC conductivities depend on the location of the horizon, we will first consider the non extremal case $\omega > 0$ where the the horizon is at $r_+ = \frac{3\omega}{\sqrt{12\kappa}}$ while the extremal situation $\omega < 0$ and $r_+ = -\frac{\omega}{\sqrt{12\kappa}}$ will be treated at the end of the section. Hence, the final step is to insert (4.2 - 4.4b) into (4.1a), (4.1b) to obtain the conductivities trough

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial J_x}{\partial E_x} = \frac{\tilde{\varepsilon}_b \omega^4 (12(q_e^2 + q_m^2)\kappa + 9\tilde{\varepsilon}_b \omega^4)}{16q_m^2 (q_e^2 + q_m^2)\kappa^2 + 24q_m^2 \tilde{\varepsilon}_b \omega^4 \kappa + 9\tilde{\varepsilon}_b^2 \omega^8}, \\ \sigma_{xy} &= \frac{\partial J_x}{\partial E_y} = \frac{q_e q_m \kappa (64(q_e^2 + q_m^2)\kappa + 96\tilde{\varepsilon}_b \omega^4)}{64q_m^2 (q_e^2 + q_m^2)\kappa^2 + 96q_m^2 \tilde{\varepsilon}_b \omega^4 \kappa + 36\tilde{\varepsilon}_b^2 \omega^8}, \\ \sigma_{yx} &= \frac{\partial J_y}{\partial E_x} = -\sigma_{xy}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial J_y}{\partial E_y} = \sigma_{xx}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

where we have defined

$$\tilde{\varepsilon}_b \equiv \varepsilon_b(\phi(r_+)) = 1 + \frac{(n-1)(4^{2-n}(3n-5) - 1)b^{1-n}}{72n\kappa}. \quad (4.6)$$

The conductivity matrix is antisymmetric in accordance with the invariance under the SO(2) symmetry. The purely electric DC conductivity σ_{DC} is given by

$$\begin{aligned} \sigma_{DC} &\equiv \sigma_{xx}(q_m = 0) = 1 + \frac{4q_e^2 \kappa}{3\tilde{\varepsilon}_b \omega^4} \\ &= 1 + \frac{(n-1) - 8n\kappa b^{n-1}}{72n\kappa b^{n-1} + (n-1)(4^{2-n}(3n-5) - 1)}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

where we have explicitly used the constraint (2.6). We are now in position to analyze the effects of the parameter b and the nonminimal coupling parameter n on the electrical DC conductivity. We also recall that the parameter b is subjected to some reality conditions (cf. Table 1) corresponding to the mathematical range of b but also to physical constraints that ensure the positivity of the mass and entropy (cf. Table 2) that we will refer as the physical range of b .

Firstly, it is straightforward to prove that there exists a value of the nonminimal coupling parameter $n_0 \approx 3.4681$ corresponding to $\xi_0 \approx 0.1779$ (2.2) such that for each $n > n_0$, there exists a precise value of the parameter b denoted by b_1 with $\frac{b_0}{4} < b_1 < b_0$ (cf. Table 2) such that the DC conductivity is strictly positive for $b \in]b_1, b_0[$ and σ_{DC} becomes infinite at (n, b_1) . In other words, this means that for any coupling greater than n_0 , one can always choose a parameter $b \in]b_1, b_0[$ of the theory that yields to well-defined physical solutions, namely solutions with positive mass and entropy and having a positive conductivity. Additionally for the choice $b = b_1$, the model will describe perfect conductivity in the sense that $\sigma_{DC} \rightarrow \infty$ at the point (n, b_1) with $n > n_0$.

Now, in order to visualize the influence on the electric DC conductivity of the parameters b and n , we will plot the graphics of σ_{DC} in function of b and n . In Fig.1, we plot the conductivity vs the parameter b for two distinct values of the nonminimal coupling parameter, namely $n = 2 < n_0$ and $n = 4 > n_0$. The graphic given by Fig.1(a) for $n = 2$ is in fact representative of all the cases $1 < n \leq n_0$. One can see that for the physical range of b , namely $b \in]\frac{1}{4}b_0, b_0[$ or $b \in]\frac{1}{2}b_0, b_0[$ for $n = 2$ (cf. Table 2), the conductivity is strictly positive and finite. In fact, the positivity of the conductivity is always ensured even for the full mathematical range of b , i. e. $b \in]0, b_0[$. On the other hand, the graphic represented in Fig.1(b) for $n = 4$ will be similar for any value $n > n_0$. In this case, as mentioned before, one can see the existence of a vertical asymptote at $b = b_1$ (for $n = 4$ we have $b_1 \approx 0.66534$) where the conductivity becomes infinite. Nevertheless, in contrast with the previous case, the conductivity is positive only for $b \geq b_1$, and hence part of the physical range, namely $b \in]\frac{1}{4}b_0, b_1[$ yields to negative conductivity. We also include a plot of the non extremal situation for $n < 0$ or equivalently $\xi > \frac{1}{4}$, see Fig.2. The mathematical range of b is located at the right of the blue line while its physical range is at the left of the dotted line. One can see that for a mathematically well-defined solution, the electric conductivity is always positive even if it has negative mass and entropy. We can also appreciate the influence of the nonminimal coupling parameter on σ_{DC} by drawing the graphics of this latter in function of n , see Fig.3. In order to achieve this task, we must be careful with the election of b since its range of permissible values depends explicitly on n , see tables 1 and 2 where we have defined b_0 in (2.7). As explained before, one can see that for $n \leq n_0$, the electric conductivity is positive while for $n > n_0$, one has $\sigma_{DC} < 0$.

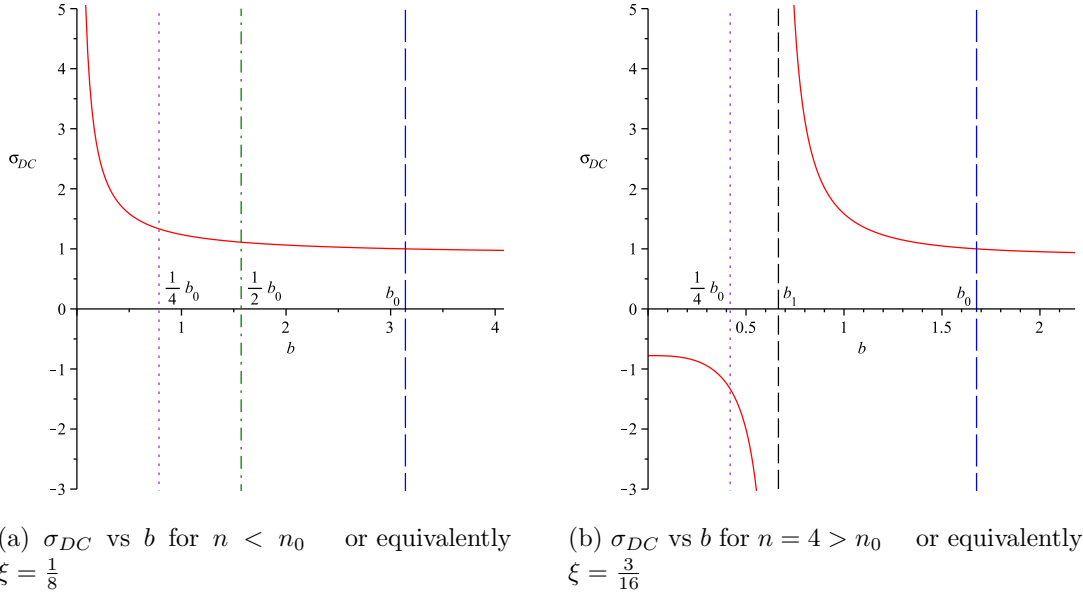


Figure 1: The conductivity σ_{DC} in term of the parameter b for nonminimal couplings $0 < \xi < \frac{1}{4}$.

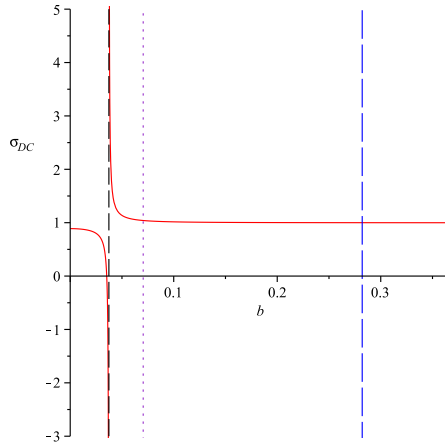


Figure 2: σ_{DC} vs b for any nonminimal couplings $n < 0$ or equivalently $\xi > \frac{1}{4}$.

The remaining DC conductivities namely the thermoelectric and the heat conductivities can also be obtained by turning on a more general time-dependent perturbation⁴

$$\delta A_x = t(-E + \zeta a(r)) + a_x(r), \quad \delta g_{tx} = -t\zeta f(r) + r^2 h_{tx}(r), \quad \delta g_{rx} = r^2 h_{rx}, \quad \delta \psi_i = \chi(r),$$

⁴For simplicity, we will only consider the DC conductivities along the x -coordinate without magnetic charge.

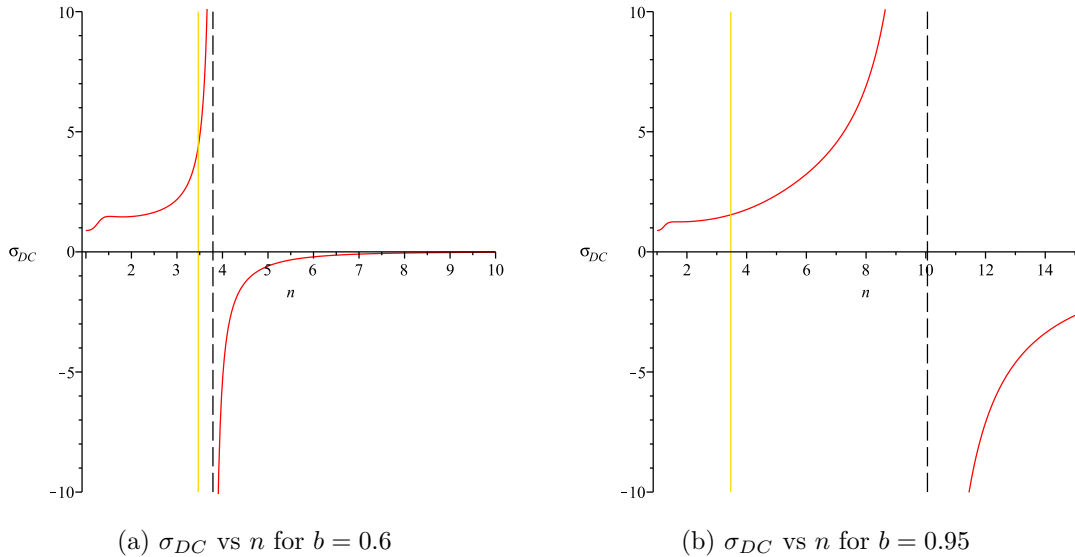


Figure 3: Influence of the nonminimal coupling parameter n on the electric conductivity.

where ζ can be shown to parameterize a time dependent source for the heat current. As a consequence, in addition to the conserved current J_x , the following quantity

$$Q_x = f(r)^2 (f(r)r^2 h_{tx})' - aJ_x$$

is also conserved along the radial coordinate [19]. Hence, the thermoelectric conductivities α and $\bar{\alpha}$ as well as the heat conductivity $\bar{\kappa}$ can be computed yielding

$$\alpha = \beta \frac{\partial Q_x}{\partial E} = \frac{4\pi q_e}{\omega^2 \tilde{\varepsilon}_b}, \quad \bar{\alpha} = \beta \frac{\partial J_x}{\partial \zeta} = \frac{4\pi q_e}{\omega^2 \tilde{\varepsilon}_b}, \quad \bar{\kappa} = \beta \frac{\partial Q_x}{\partial \zeta} = \frac{64\pi\omega}{3\tilde{\varepsilon}_b \kappa \sqrt{12\kappa}}, \quad (4.8)$$

where β as usual is the inverse of the temperature.

Finally, for the extremal solutions, namely $\omega < 0$ (cf. Tables 1 and 2), the analysis is completely analogue. This is due to the fact that, even if the scalar field vanishes at the event horizon, the minimal coupling function $\tilde{\varepsilon}_b$ remains finite at the horizon (2.8). As a direct consequence, the expressions derived previously remain valid with the difference that in the extremal case, the horizon is located at $r_+ = -\frac{\omega}{\sqrt{12\kappa}}$. Interestingly enough, the conductivity matrix becomes an antisymmetric matrix given by

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{q_m}{q_e} \\ \frac{q_m}{q_e} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

It is somehow appealing that for the extremal solution, the conductivity matrix has a Hall effect-like behavior with a Hall conductivity that looks like that B/ρ instead of ρ/B , (here ρ is the density of charge and B the orthogonal magnetic field). Indeed, in the AdS/CFT dictionary, $(3+1)$ -dimensional AdS dyonic black holes are conjectured to be dual to a $(2+1)$

CFT. In this picture, the electric bulk gauge field does not have a counterpart in the dual field theory but instead it fixes the electric charge density ρ to be proportional to the electric charge of the black hole, i. e. $\rho \propto q_e$. On the other hand, the magnetic bulk gauge field is in correspondence with an external magnetic field in the CFT side with a field strength $B \propto q_m$. Hence, the Hall conductivity in our case (4.9) is proportional to the ratio between the magnetic field and the electric charge density, i. e. $\sigma_{xy} \propto \frac{B}{\rho}$. In order to circumvent this pathology one could have invoked from the very beginning the electromagnetic duality symmetry of the dyonic solution which consists in interchanging the electric with the magnetic charge namely $q_e \leftrightarrow q_m$, and in this case, one will end with a Hall conductivity given by $\sigma_{\text{Hall}} \propto \frac{\rho}{B}$.

5. Conclusion

Here, we have considered a self-interacting scalar field nonminimally coupled to the four-dimensional Einstein gravity with a negative cosmological constant. The matter source is also supplemented by the Maxwell action with two axionic fields minimally coupled to the scalar field. Our model is specified from the very beginning by two parameters that are the nonminimal coupling parameter denoted ξ or equivalently n (2.2) and the constant b that enters in the minimal coupling as well as in the potential. For this model, we have obtained dyonic planar black holes with axionic fields depending linearly on the coordinates of the planar base manifold. We have noticed that these charged solutions depend on a unique integration constant denoted by ω and the horizon can be located at two different positions depending on the sign of ω . Surprisingly, for $\omega < 0$, the temperature of the solution vanishes identically and hence one can interpret the solution as an extremal black brane. We have also shown that some reality conditions (cf. Table 1) supplemented by the requirement of having solutions with positive entropy and mass restrict considerably the permissible values of the nonminimal coupling parameter and of the parameter b , see Table 2. For a positive axionic charge $\omega > 0$, the set of physically acceptable values of the nonminimal coupling parameter is given by $\xi \in]0, \frac{1}{4}[$ while for the extremal solution corresponding to $\omega < 0$, only discrete values of the nonminimal coupling parameter given by $\xi = \frac{k}{2(2k-1)}$ with $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ yield solutions with positive mass and entropy. These restrictions on the nonminimal coupling parameter are to be expected since, even for purely scalar field nonminimally coupled to Einstein gravity, black hole configurations have been shown to be ruled out for $\xi < 0$ and $\xi \geq \frac{1}{2}$, see Ref. [31].

In the last part of this work, we have taken advantage of the momentum dissipation ensured by the axionic fields to compute the different conductivities by means of the recipes given in Refs. [19, 20]. Many interesting results can be highlighted from the study of the holographic DC conductivities inherent to these dyonic solutions. For the non extremal solutions, we have shown that for $n \leq n_0 \approx 3.4681$ or equivalently $\xi \leq \xi_0 \approx 0.1779$, the dyonic solutions always enjoy a positive conductivity for any mathematically permissible value of b . On the other hand, for $n > n_0$, the positive conductivity condition restricts the interval of b to be $]b_1, b_0[$ with $b_1 > \frac{1}{4}b_0$. In other words, this means that the physical solutions (in the sense of having positive mass and entropy) for $n > n_0$ with $b \in]\frac{1}{4}b_0, b_1[$ will have a negative

conductivity. Also, we have shown that for $n > n_0$ there always exist a value of the parameter b denoted by b_1 yielding perfect conductivity in the sense that $\sigma_{DC}(n, b_1) \rightarrow \infty$. Finally, for the extremal solution, we have shown that the diagonal elements of the conductivity matrix precisely vanish and its off-diagonal elements are similar to those inherent to the Hall effect.

An interesting extension of our model will be to consider an additional k -essence term for the axionic part of the action and to analyze the effects on the conductivities of the nonminimal coupling parameter ξ conjugated with the k -essence parameter, see Ref. [24]. In the same lines a natural generalization of these solutions would be the extension to higher dimensional scenarios following the lines of [32].

Finally, it will be very interesting to explore more deeply some of the properties of our solutions such as the extremality, the perfect conductivity or the Hall effect-like behavior of the extremal solutions. With this respect, in Ref. [33], it was shown that the Reissner-Nordstrom at the extremal limit experiences a sort of Meissner effect in the sense that the magnetic flux lines are expelled. Hence, a work to be done consists precisely in investigating the extremal solutions found here can exhibit a kind of Meissner effect.

Acknowledgments

This work has been partially supported by grant FONDECYT 11170274 (A.C). We would like to thank especially Moises Bravo-Gaete for stimulating discussions and nice comments to improve the draft. One of us, M. H. would like to dedicate this work to the memory of his late friend and professor Christian Duval.

References

- [1] S. A. Hartnoll and P. Kovtun, Phys. Rev. D **76**, 066001 (2007)
- [2] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog and G. T. Horowitz, Phys. Rev. Lett. **101**, 031601 (2008).
- [3] S. A. Hartnoll, Class. Quant. Grav. **26**, 224002 (2009).
- [4] J. D. Bekenstein, *Black holes: Classical properties, thermodynamics, and heuristic quantization*, arXiv:gr-qc/9808028.
- [5] N. M. Bocharova, K. A. Bronnikov and V. N. Melnikov, Vestnik Moskov. Univ. Fizika **25**, 706 (1970).
- [6] J. D. Bekenstein, Annals Phys. **82**, 535 (1974).
- [7] C. Martinez, R. Troncoso and J. Zanelli, Phys. Rev. D **67**, 024008 (2003).
- [8] C. Martinez, J. P. Staforelli and R. Troncoso, Phys. Rev. D **74**, 044028 (2006).
- [9] A. Anabalón and A. Cisterna, Phys. Rev. D **85**, 084035 (2012).
- [10] E. Ayón-Beato, M. Hassaine and J. A. Mendez-Zavaleta, Phys. Rev. D **92**, no. 2, 024048 (2015) Addendum: [Phys. Rev. D **96**, no. 4, 049905 (2017)].
- [11] M. Bravo Gaete and M. Hassaine, Phys. Rev. D **88**, 104011 (2013).

- [12] M. Bravo Gaete and M. Hassaine, *JHEP* **1311**, 177 (2013).
- [13] F. Correa and M. Hassaine, *JHEP* **1402**, 014 (2014).
- [14] Y. Bardoux, M. M. Caldarelli and C. Charmousis, *JHEP* **1205**, 054 (2012).
- [15] Y. Bardoux, M. M. Caldarelli and C. Charmousis, *JHEP* **1209**, 008 (2012).
- [16] M. M. Caldarelli, C. Charmousis and M. Hassaine, *JHEP* **1310**, 015 (2013).
- [17] A. Cisterna, C. Erices, X. M. Kuang and M. Rinaldi, *Phys. Rev. D* **97**, no. 12, 124052 (2018).
- [18] T. Andrade and B. Withers, *JHEP* **1405**, 101 (2014).
- [19] A. Donos and J. P. Gauntlett, *JHEP* **1411**, 081 (2014).
- [20] A. Donos and J. P. Gauntlett, *JHEP* **1404**, 040 (2014).
- [21] Y. Ling and X. Zheng, *Nucl. Phys. B* **917**, 1 (2017).
- [22] Y. Ling, P. Liu, J. P. Wu and Z. Zhou, *Phys. Lett. B* **766**, 41 (2017).
- [23] J. Erdmenger, D. Fernandez, P. Goulart and P. Witkowski, *JHEP* **1703**, 147 (2017).
- [24] A. Cisterna, M. Hassaine, J. Oliva and M. Rinaldi, *Phys. Rev. D* **96**, no. 12, 124033 (2017);
- [25] P. Wang, H. Wu and H. Yang, “Holographic DC Conductivity for Backreacted Nonlinear Electrodynamics with Momentum Dissipation,” arXiv:1805.07913 [hep-th].
- [26] N. Bhatnagar and S. Siwach, *Int. J. Mod. Phys. A* **33**, no. 04, 1850028 (2018).
- [27] K. Goldstein, N. Iizuka, S. Kachru, S. Prakash, S. P. Trivedi and A. Westphal, *JHEP* **1010**, 027 (2010).
- [28] A. Mokhtari, S. A. Hosseini Mansoori and K. Bitaghsir Fadafan, *Phys. Lett. B* **785**, 591 (2018).
- [29] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15**, 2752 (1977).
- [30] R. M. Wald, *Phys. Rev. D* **48**, no. 8, R3427 (1993).
- [31] A. E. Mayo and J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **54**, 5059 (1996).
- [32] C. Erices and C. Martinez, *Phys. Rev. D* **97**, no. 2, 024034 (2018) [arXiv:1707.03483 [hep-th]].
- [33] A. Chamblin, R. Emparan and G. W. Gibbons, *Phys. Rev. D* **58**, 084009 (1998).

Capítulo 4

Fórmula tipo Cardy para Agujeros Negros en Horizontes Planos

A partir de los trabajos de Hawking y Bekenstein, se cree que los agujeros negros se comportan como objetos termodinámicos, con temperatura y entropía que los caracterizan. Hawking utiliza un enfoque semiclásico para mostrar que la temperatura se relaciona con el campo gravitatorio que se genera en el horizonte de eventos, y por otro lado la fórmula de Bekenstein-Hawking relaciona la entropía con el área del horizonte de eventos. Pero en la mecánica estadística tradicional, la entropía \mathcal{S} mide la multiplicidad de los microestados detrás de un macroestado (lo que comúnmente, aunque poco preciso, se conoce como medir el *desorden*). Dado que la entropía del agujero negro juega un rol similar a la entropía en el sentido estadístico, la pregunta natural es entender qué significaría entonces contar los microestados de un agujero negro (o en una versión más informal: ¿cómo entender el “desorden” en un agujero negro si ni siquiera sabemos qué hay dentro?).

Este capítulo está dividido en dos partes. En la sección 4.1 repasaremos las primeras señales de vida de la correspondencia AdS/CFT: el importante resultado de Brown y Henneaux [16] que nos muestra la conexión que existe entre el espaciotiempo AdS₃ y una Teoría de Campos Conforme de dimensión dos, y luego con el trabajo de Ströminger [18] que nos muestra que la entropía calculada desde la CFT es igual a la entropía del agujero negro BTZ. En la sección 4.2, veremos un caso particular donde el cálculo à la Ströminger no es apropiado, y así introduciremos quién es y qué papel juega el *solitón gravitacional* en el cálculo de la entropía. El artículo [2] apunta precisamente en la dirección de confirmar el importante papel del solitón en el cálculo de la entropía, trabajando sobre una clase muy amplia de agujeros negros.

4.1. AdS/CFT en 2+1 dimensiones

4.1.1. Álgebras de Witt y de Virasoro

En dos dimensiones, para la métrica euclidiana $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, las ecuaciones (1.22) se reducen a las conocidas ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\partial_1 \epsilon_1 = \partial_2 \epsilon_2, \quad \partial_1 \epsilon_2 = -\partial_2 \epsilon_1. \quad (4.1)$$

La natural aparición de las ecuaciones de Cauchy-Riemann motiva trabajar el plano con coordenadas complejas z, \bar{z} y las siguientes reglas:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad (4.2)$$

$$\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \partial_{\bar{z}} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (4.3)$$

Con ello, la transformación infinitesimal ϵ se puede descomponer en una parte que depende sólo de z y otra que depende solo de \bar{z} , que representamos esquemáticamente por

$$\epsilon = \varepsilon(z) + \bar{\varepsilon}(\bar{z}). \quad (4.4)$$

Por otra parte, de la teoría de variable compleja sabemos que las funciones que satisfacen (4.1) son las funciones analíticas, por lo cual obtenemos el siguiente resultado: *las transformaciones de coordenadas conforme en dos dimensiones coinciden con las transformaciones analíticas de coordenadas*. De ahí, es claro que el grupo conforme en dos dimensiones será un grupo infinito dimensional, pues las funciones analíticas se pueden escribir como series de Laurent:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_i z^i, \quad (4.5)$$

y cada a_i contará un parámetro de simetría.

Gracias a la expansión en series de Laurent, la transformación infinitesimal ϵ se puede representar en términos generales como

$$\epsilon = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m z^{m+1} \partial_z + b_m \bar{z}^{m+1} \partial_{\bar{z}}, \quad (4.6)$$

donde hemos escogido para la representación la base $l_m \equiv z^{m+1} \partial_z, \bar{l}_m \equiv \bar{z}^{m+1} \partial_{\bar{z}}$ (con $m \in \mathbb{Z}$), solo por una cuestión de comodidad, ya que ahora es simple ver que las relaciones de conmutación de los generadores $\{l_m, \bar{l}_m\}$ son las siguientes:

$$[l_m, l_n] = (m - n) l_{m+n}, \quad [\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m - n) \bar{l}_{m+n}, \quad [l_m, \bar{l}_n] = 0. \quad (4.7)$$

que se conoce como el álgebra de Witt.

En las coordenadas z, \bar{z} definidas arriba, la condición de traza nula (1.103) se escribe $T_{z\bar{z}} = 0$. Esto, y la ecuación de conservación $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ nos permite concluir que la componente T_{zz} del tensor es una función holomorfa $T_{zz}(z)$ y, al mismo tiempo, su componente $T_{\bar{z}\bar{z}}$ es antiholomorfa. Así, por simplicidad definimos $T(z) \equiv T_{zz}(z)$ y $\bar{T}(\bar{z}) = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$.

En la teoría cuántica de campos es común trabajar con operadores locales. El **OPE** (por *Operator Product Expansion*) es una forma de entender la interacción entre estos operadores cuando están definidos sobre puntos cercanos. En términos generales, esta relación está dada por [72]

$$\mathcal{O}_j(z, \bar{z}) \mathcal{O}_i(w, \bar{w}) = F_{ij}^k(z - w, \bar{z} - \bar{w}) \mathcal{O}_k(w, \bar{w}), \quad (4.8)$$

donde el producto está definido si $|z| > |w|$. Este hecho está relacionado al ordenamiento temporal de la mecánica cuántica.

El tensor de energía momento satisface que su OPE consigo mismo es de la forma

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w), \quad (4.9)$$

donde c es una constante que se llama **carga central**, o a veces recibe el nombre de anomalía conforme. En virtud de la ecuación anterior, la respuesta del tensor de energía momento ante una transformación conforme $z \rightarrow w = f(z)$ es:

$$T(w) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-2} \left(T(z) - \frac{c}{12}S(w, z)\right), \quad (4.10)$$

donde $S(w, z) = \left(\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-2}$ es el operador Schwarziano.

La relación simetría-carga que mencionamos en la sección 1.1.3 vuelve a aparecer usando integrales de contorno:

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2\pi i} \oint (dzT(z)\epsilon(z) + d\bar{z}\bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z})). \quad (4.11)$$

Si definimos

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dzT(z)z^{n+1}, \quad \bar{L}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z}\bar{T}(\bar{z})\bar{z}^{n+1}, \quad (4.12)$$

vemos que estos generadores obedecen las relaciones del álgebra de Virasoro, el cual puede ser concebida como la extensión central del álgebra de Witt, con una carga central c que depende de la teoría [40, 73]:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{n+m,0}, \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{\bar{c}}{12}(m^3-m)\delta_{n+m,0}, \\ [L_m, \bar{L}_n] &= 0. \end{aligned}$$

Para finalizar esta sección, consideraremos un ejemplo muy importante. Partimos por el hecho que un cilindro se puede mapear al plano complejo a través de una aplicación conforme. Las coordenadas t, θ del cilindro ($t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi[$) son aplicadas en $z, \bar{z} = e^{t \pm i\theta}$. La circunferencia $t = t_0$ del cilindro se corresponde con la circunferencia de radio e^{t_0} en el plano, y el origen $z = 0$ corresponde a $t \rightarrow -\infty$. Por simplicidad, definimos $w = -\theta + it$, de modo que la aplicación ahora se lee $z = e^{-iw}, \bar{z} = e^{i\bar{w}}$.

Mirando la parte holomorfa, y dado que la aplicación anterior es conforme, podemos aplicar (4.10), con

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{i}{z}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{i}{z^2}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = \frac{2i}{z^3}, \quad (4.13)$$

por lo que $S(w, z) = \frac{1}{2z^2}$. Luego, obtenemos que

$$T_{\text{cil}}(w) = -z^2 T_p(z) + \frac{c}{24}. \quad (4.14)$$

De lo anterior podemos calcular el Hamiltoniano del sistema, definido por

$$H \equiv \frac{1}{2\pi} \oint dqT(q) + d\bar{q}\bar{T}(\bar{q}).$$

Usando la relación anterior, para la parte holomorfa obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \oint dw T_{\text{cil}}(w) = \frac{i}{2\pi} \oint \frac{dz}{z} \left(-z^2 T_{\text{p}}(z) + \frac{c}{24} \right) \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint dz z T_{\text{p}}(z) - \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{c/24}{z} = L_0 - \frac{c}{24}, \quad (4.16)$$

donde en la última integral de línea hemos usado la fórmula de Cauchy:

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2\pi i} \oint dz \frac{f(z)}{(z-\xi)^{n+1}}$$

Finalmente,

$$H = L_0 - \frac{c}{24} + \bar{L}_0 - \frac{\bar{c}}{24}. \quad (4.17)$$

4.1.2. Fórmula de Cardy

La identificación de los extremos del cilindro da origen a un toro. Una métrica para el toro con signatura euclídea es $ds^2 = dt^2 + d\theta^2$, donde las coordenadas t, θ son ambas periódicas. También podemos llegar al toro directamente desde el plano complejo a través de un *parámetro modular* τ , identificando

$$z \equiv z + 2\pi, \quad z \equiv z + 2\pi\tau$$

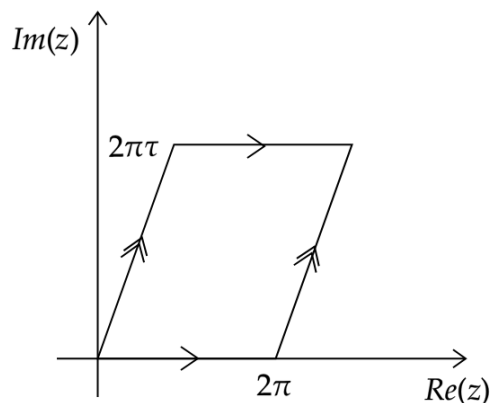


Figura 4.1

En el contexto de la Mecánica Estadística, un **ensamble microcanónico** consiste en un sistema donde el número de partículas, el volumen y la energía son fijados. La entropía se obtiene a través del logaritmo de la densidad de estados. Sin embargo, la energía generalmente es difícil de medir (e incluso de controlar) en experimentos reales, por lo que una alternativa es pensar que la energía es variable y se fija la temperatura del sistema. Esto define un **ensamble canónico**. Sobre este ensamble canónico se define una función de partición \mathcal{Z} por

$$\mathcal{Z} = \sum_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}}, \quad (4.18)$$

donde T es la temperatura y k_B es la constante de Boltzmann. Definiendo $\beta = \frac{1}{k_B T}$, y considerando que los E_n son los valores propios del hamiltoniano, podemos reescribir la función de partición como

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-\beta H}. \quad (4.19)$$

Para hacer lo mismo sobre el toro con parámetro modular $\tau = \Re(\tau) + i\Im(\tau)$, lo primero es tener en consideración que bajo condiciones de borde periódicas, la integral euclídea de caminos de Feynman coincide con la función de partición si identificamos β con el período del tiempo imaginario. Si $\Re(\tau) = 0$, se obtiene una generalización de la función de partición a

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-2\pi\Im(\tau)H}. \quad (4.20)$$

Si $\Re(\tau) \neq 0$, la identificación periódica del tiempo incluyen un desplazamiento horizontal dado por $2\pi\Re(\tau)$. El operador que captura este desplazamiento es

$$e^{iP(2\pi\Re(\tau))},$$

por lo que para un parámetro modular arbitrario, la función de partición está dada por

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-2\pi\Im(\tau)H} e^{iP(2\pi\Re(\tau))}, \quad (4.21)$$

la cual, siguiendo (4.17) y su análogo para el momentum P , nos permiten escribir la función de partición para un parámetro τ arbitrario, según

$$\mathcal{Z} \equiv \text{Tr} e^{2\pi i\tau(L_0 - \frac{c}{24})} e^{-2\pi i\bar{\tau}(\bar{L}_0 - \frac{c}{24})}. \quad (4.22)$$

Cardy [74, 75] mostró que esta función de partición es invariante bajo el grupo modular.

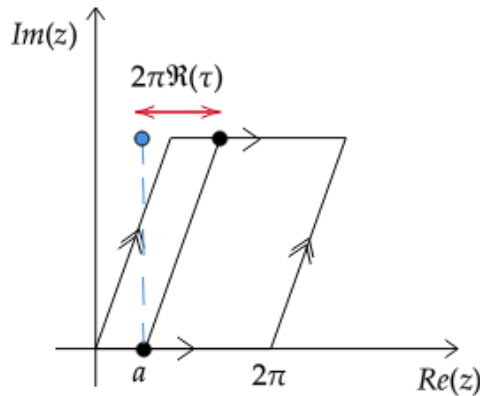


Figura 4.2: El punto $a + 0i$ es identificado con $a + 2\pi\tau = z + 2\pi(\Re(\tau) + i\Im(\tau)) = (a + 2\pi\Re(\tau)) + i\Im(\tau)$. Un desplazamiento horizontal se obtiene cuando $\Re(\tau) \neq 0$

Para derivar la fórmula de Cardy, seguiremos la derivación hecha en [76]. Supondremos que τ es imaginario puro, y consideraremos por simplicidad que $\tau, \bar{\tau}$ son variables independientes. La función de

partición puede ser reescrita como:

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \text{Tr} e^{2\pi i\tau(L_0 - \frac{c}{24})} e^{-2\pi i\bar{\tau}(\bar{L}_0 - \frac{\bar{c}}{24})} = \sum_{\Delta, \bar{\Delta} \geq 0} \rho(\Delta, \bar{\Delta}) e^{2\pi i\tau(\Delta - \frac{c}{24})} e^{-2\pi i\bar{\tau}(\bar{\Delta} - \frac{\bar{c}}{24})}, \quad (4.23)$$

donde ρ es la densidad de estados con valores propios $L_0 = \Delta, \bar{L}_0 = \bar{\Delta}$. Podemos invertir estas dependencias usando integrales de contorno. Nos concentraremos en la dependencia en τ , puesto que la parte correspondiente a $\bar{\tau}$ se adiciona análogamente. Entonces:

$$\rho(\Delta) = \oint_C d\tau e^{-2\pi i\tau(\Delta - \frac{c}{24})} \mathcal{Z}(\tau). \quad (4.24)$$

Notemos que el comportamiento de la densidad de estados a alta temperatura ($\tau \rightarrow 0$) está dominado por el comportamiento de $\mathcal{Z}(\tau)$, del cual no tenemos mayor información. Sin embargo, la invariancia modular de Cardy, en específico la transformación $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$, nos permite relacionar el comportamiento a altas temperaturas ($\tau \rightarrow 0$) con el comportamiento a bajas temperaturas ($-\frac{1}{\tau} \rightarrow 0$). En efecto,

$$\mathcal{Z}(\tau) = \mathcal{Z}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = e^{\frac{2\pi ic}{24\tau}} \tilde{\mathcal{Z}}\left(-\frac{1}{\tau}\right),$$

donde $\tilde{\mathcal{Z}}\left(-\frac{1}{\tau}\right) \equiv \text{Tr} e^{2\pi iL_0/\tau}$.

La ventaja de esta consideración es que $\tilde{\mathcal{Z}}\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ está dominada por la contribución del menor valor propio de L_0 , el cual puede ser considerado como cero (si no, aparecerán correcciones logarítmicas, como se hizo en [77]). Además, podemos considerar que el vacío de la CFT es único, por lo que $\tilde{\mathcal{Z}}\left(-\frac{1}{\tau}\right) \rightarrow 1$ cuando $\tau \rightarrow 0$. Estas observaciones nos permiten aproximar la integral anterior por

$$\rho(\Delta) = \oint_C d\tau e^{-2\pi i\tau(\Delta - \frac{c}{24})} \mathcal{Z}(\tau) \quad (4.25)$$

$$\approx \int d\tau e^{-2\pi i\tau(\Delta - \frac{c}{24}) + \frac{2\pi ic}{24\tau}}. \quad (4.26)$$

Para estimar el valor de esta integral usaremos el método de la aproximación por punto silla, es decir, para $\Delta \gg 1$ la integral

$$\rho(\Delta) = \int d\tau e^{-2\pi i f_{\Delta}(\tau)}$$

puede ser aproximada por

$$\rho(\Delta) \approx e^{-2\pi i f_{\Delta}(\tau^*)},$$

donde en este caso τ^* es un punto estacionario de $f_{\Delta}(\tau) = -\tau\left(\Delta - \frac{c}{24}\right) + \frac{c}{24\tau}$. Se obtiene:

$$\tau^* \approx i\sqrt{\frac{c}{24\Delta}}$$

y por lo tanto,

$$\rho(\Delta) \approx \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{c\Delta}{6}}\right).$$

Recuperando la dependencia en términos de $\bar{\Delta}$, obtenemos la *Fórmula de Cardy*:

$$\mathcal{S} \approx \ln \rho(\Delta) = 2\pi\sqrt{\frac{c\Delta}{6}} + 2\pi\sqrt{\frac{\bar{c}\bar{\Delta}}{6}}. \quad (4.27)$$

4.1.3. Las simetrías asintóticas de Brown & Henneaux

En Física, el concepto de simetría es fundamental: el Teorema de Noether, las simetrías de *gauge* e incluso la misma Relatividad de Einstein, la cual es invariante bajo difeomorfismos. Sobre las simetrías de la métrica $g_{\mu\nu}$ (los vectores de Killing) ya hemos dedicado unas palabras de los Preliminares (sec. 1.1.3).

En esta sección estamos interesados en las simetrías asintóticas (y en particular, en las de AdS_3). Informalmente hablando, nos interesan las simetrías que actúan sobre la estructura asintótica del espaciotiempo. Aún cuando esta idea es sencilla de imaginar, debemos esclarecer qué significa la “estructura asintótica de un espaciotiempo”.

Siguiendo las ideas presentadas en los artículos [16,78], tenemos que esta estructura asintótica (sobre el infinito espacial) depende de ciertas condiciones de borde, las cuales (i) deben respetar el grupo de isometrías del espaciotiempo, así como también (ii) deben producir cantidades conservadas finitas (y no nulas) en el formalismo Hamiltoniano de la Relatividad General.

La condición (i) parece ser un requerimiento natural. Si X es un espaciotiempo, y queremos decir que Y es un espaciotiempo asintóticamente X , aplicar una simetría de X sobre Y no le puede quitar ese status. Por su parte, (ii) nos dice que las transformaciones cuyas cargas asociadas se anulan actúan como *gauge*, dado que no producen efectos físicamente interesantes.

Recordemos que la métrica AdS_3 se puede ver como una solución de las ecuaciones $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$, donde la constante cosmológica es $\Lambda = -\frac{1}{\ell^2}$, y ℓ es el radio de AdS_3 . El elemento de línea de este espaciotiempo está dado por

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1\right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (4.28)$$

donde ϕ es una coordenada angular de período 2π . Las condiciones de borde definidas en este caso están definidas según [16]:

$$g_{tt} = -\frac{r^2}{\ell^2} + \mathcal{O}(1), \quad (4.29a)$$

$$g_{tr} = \mathcal{O}(r^{-3}), \quad (4.29b)$$

$$g_{t\phi} = \mathcal{O}(1), \quad (4.29c)$$

$$g_{rr} = \frac{\ell^2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-4}), \quad (4.29d)$$

$$g_{r\phi} = \mathcal{O}(r^{-3}), \quad (4.29e)$$

$$g_{\phi\phi} = r^2 + \mathcal{O}(1), \quad (4.29f)$$

$$(4.29g)$$

tras lo cual, el análisis de la ecuación de Killing (1.19) lleva a las siguientes condiciones para las simetrías $\xi \equiv \xi^\mu \partial_\mu$, ($\mu \in \{t, r, \phi\}$):

$$\xi^t = \ell A(t, \phi) + \frac{\ell^3}{r^2} \bar{A}(t, \phi) + \mathcal{O}(r^{-4}), \quad (4.30a)$$

$$\xi^r = r B(t, \phi) + \mathcal{O}(r^{-1}), \quad (4.30b)$$

$$\xi^\phi = C(t, \phi) + \frac{\ell^2}{r^2} \bar{C}(t, \phi) + \mathcal{O}(r^{-4}), \quad (4.30c)$$

donde $A, \bar{A}, B, C, \bar{C}$ son funciones arbitrarias de (t, ϕ) sujetas a las siguientes relaciones:

$$\ell \partial_t A = \partial_\phi C = -B, \quad (4.31a)$$

$$\ell \partial_t C = \partial_\phi A, \quad (4.31b)$$

$$\bar{A} = -\frac{\ell}{2} \partial_t B, \quad (4.31c)$$

$$\bar{C} = \frac{1}{2} \partial_\phi B. \quad (4.31d)$$

Las simetrías asintóticas forman un grupo, el cual en este caso es isomorfo al grupo conforme en dos dimensiones. Para ver esto, redefinimos $A(t, \phi)$ y $C(t, \phi)$ de la siguiente forma:

$$A(t, \phi) = F_+(t/\ell + \phi) + F_-(t/\ell - \phi), \quad (4.32)$$

$$C(t, \phi) = F_+(t/\ell + \phi) - F_-(t/\ell - \phi), \quad (4.33)$$

donde ahora F_+ y F_- son funciones de un argumento x^\pm (respectivamente), con $x^\pm = \frac{t}{\ell} \pm \phi$. Esta redefinición nos ayuda a reescribir ξ (4.30) de tal modo que se obtiene una parte dependiente de F_+ y otra de F_- , la cual esquemáticamente representamos por

$$\xi = T^+[F_+] + T^-[F_-] + \mathcal{O}(r^{-1}). \quad (4.34)$$

Ahora, usando (4.31) se puede ver que los operadores diferenciales $T^+[F_+], T^-[F_-]$ son:

$$T^+[F_+] = \left(\ell F_+ + \frac{\ell^3}{2r^2} F_+'' \right) \partial_t - r F_+' \partial_r + \left(F_+ - \frac{\ell^2}{2r^2} F_+'' \right) \partial_\phi, \quad (4.35)$$

$$T^-[F_-] = \left(\ell F_- + \frac{\ell^3}{2r^2} F_-'' \right) \partial_t - r F_-' \partial_r - \left(F_- - \frac{\ell^2}{2r^2} F_-'' \right) \partial_\phi, \quad (4.36)$$

donde el símbolo ' denota la derivada de la función F_+, F_- respecto de x^+, x^- respectivamente. Pero, como ϕ tiene período 2π , se puede hacer un análisis de Fourier. De este modo, tras definir

$$T_n^+ \equiv T^+[e^{in(t/\ell + \phi)}], \quad T_n^- \equiv T^-[e^{in(t/\ell - \phi)}], \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.37)$$

se obtienen las relaciones del grupo conforme en dos dimensiones:

$$[T_n^+, T_m^-] = 0, \quad [T_n^+, T_m^+] = i(n-m)T_{n+m}^+, \quad [T_n^-, T_m^-] = i(n-m)T_{n+m}^-. \quad (4.38)$$

En [16] se muestra que el álgebra generada por el corchete de Poisson de las cargas globales es isomorfo al álgebra generada por el corchete de Lie de las simetrías asintóticas, salvo una posible extensión central. Vale decir, si denotamos L_n^\pm respectivamente a los generadores de estas cargas globales, el resultado anterior nos dice que:

$$\begin{aligned} [L_n^+, L_m^+] &= (n-m)L_{n+m}^+ + \frac{c_+}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \\ [L_n^-, L_m^-] &= (n-m)L_{n+m}^- + \frac{c_-}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \\ [L_n^+, L_m^-] &= 0. \end{aligned}$$

Para el caso de AdS₃, se obtiene que las cargas centrales son iguales:

$$c_+ = c_- = \frac{3\ell}{2G}. \quad (4.39)$$

4.1.4. Fórmula de Cardy para el agujero negro BTZ

Strominger [18], observó que BTZ es un espacio asintóticamente AdS_3 , y por lo tanto, le corresponde una teoría cuántica de campos conforme, con las cargas centrales obtenidas en (4.39). Luego, su objetivo fue calcular la entropía de la CFT correspondiente, y para eso utilizó la Fórmula de Cardy. Para tal efecto, notemos que a partir de (4.35) tenemos $T_0^+ = \ell\partial_t + \partial_\phi$ y $T_0^- = \ell\partial_t - \partial_\phi$. Luego, las correspondientes cargas asociadas son L_0^\pm , que en términos de sus valores propios para el caso del agujero negro BTZ corresponden a:

$$\Delta_0^\pm = \frac{\ell M \pm J}{2}, \quad (4.40)$$

salvo una constante aditiva que se escoge de tal modo que Δ_0^\pm se anulen en el caso $M = J = 0$. Con esta configuración, podemos ver en el caso no rotante ($J = 0$) que

$$M = \frac{r_+^2}{8G\ell}, \quad \Delta_0^+ = \Delta_0^- = \frac{r_+^2}{16G}, \quad (4.41)$$

y usando (4.27) obtenemos $\mathcal{S}_{\text{Cardy}} = \frac{2\pi r_+}{4G}$, que coincide con la fórmula de Bekenstein-Hawking (1.56). Asimismo, en el caso rotante ($J \neq 0$), tenemos:

$$M = \frac{r_+^2 + r_-^2}{8G\ell^2}, \quad J = \frac{r_+ r_-}{4G\ell}, \quad (4.42)$$

$$\Delta_0^+ = \frac{(r_+ + r_-)^2}{16G\ell}, \quad \Delta_0^- = \frac{(r_+ - r_-)^2}{16G\ell}, \quad (4.43)$$

obteniendo también $\mathcal{S}_{\text{Cardy}} = \frac{2\pi r_+}{4G} = \mathcal{S}_{BH}$.

La fórmula de Cardy ha sido estudiada ampliamente, extendiendo su área de utilidad sobre AdS a mayores dimensiones [19], para casos rotantes [79], y también a otros espacios que no son AdS [20–23, 80, 81].

4.2. El rol del Solitón Gravitatorio

A veces puede ocurrir que los campos de materia modifican el comportamiento asintótico de la métrica. Por ejemplo, la solución BTZ cargada tiene un comportamiento logarítmico [17]. Modificar el comportamiento asintótico puede traer como consecuencia que las cargas globales asociadas contengan términos divergentes, y por lo tanto, las condiciones de borde se deben modificar pidiendo como mínimo que esto no ocurra. Tal es el caso de la solución [25], que presentamos a continuación.

La acción

$$I[g, \phi] = \frac{1}{\pi G} \int d^3x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16} - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (4.44)$$

representa la interacción entre la gravedad en tres dimensiones y una componente de materia dada por un campo escalar $\phi = \phi(r)$ mínimamente acoplado, junto con un potencial $V(\phi)$. Una solución exacta (que en adelante nos referiremos a ella como la *solución con pelo*) se puede obtener para la familia uniparamétrica de potenciales de la forma

$$V_\nu(\phi) = -\frac{1}{8\ell^2} (\cosh^6 \phi + \nu \sinh^6 \phi). \quad (4.45)$$

En efecto, para $\nu \geq -1$, el campo escalar ϕ está dado por

$$\phi(r) = \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{B}{H(r) + B}}, \quad (4.46)$$

donde $H(r) = \frac{1}{2}(r + \sqrt{r^2 + 4Br})$, y además la métrica es

$$ds^2 = - \left(\frac{H(r)}{H(r) + B} \right)^2 F(r) dt^2 + \left(\frac{H(r) + B}{H(r) + 2B} \right)^2 \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 dx^2, \quad (4.47)$$

donde hemos definido $F(r) = \frac{H(r)^2}{\ell^2} - (1 + \nu) \left(\frac{3B^2}{\ell^2} + \frac{2B^3}{\ell^2 H(r)} \right)$. Existe una singularidad en el origen, la que está cubierta por un horizonte de eventos ubicado en $r_+ = B\Theta_\nu$, donde la constante Θ_ν está definida según

$$\Theta_\nu = 2(z\bar{z})^{2/3} \frac{z^{2/3} - \bar{z}^{2/3}}{z - \bar{z}}, \quad z = 1 + i\sqrt{\nu}. \quad (4.48)$$

La Temperatura de Hawking y la masa para esta solución con pelo se leen

$$T = \frac{3B(1 + \nu)}{2\pi\ell^2\Theta_\nu}, \quad M = \frac{3B^2}{8G\ell^2}(1 + \nu), \quad (4.49)$$

respectivamente, mientras que el comportamiento asintótico de estas soluciones está dado por:

$$\phi = \frac{\chi}{r^{1/2}} + \alpha \frac{\chi^3}{r^{3/2}} + \mathcal{O}(r^{-5/2}). \quad (4.50)$$

$$g_{rr} = \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{4\ell^2\chi^2}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}), \quad g_{tt} = -\frac{r^2}{\ell^2} + \mathcal{O}(1), \quad (4.51)$$

$$g_{tr} = \mathcal{O}(r^{-2}), \quad g_{xx} = r^2 + \mathcal{O}(1), \quad (4.52)$$

$$q_{xr} = \mathcal{O}(r^{-2}), \quad g_{tx} = \mathcal{O}(1). \quad (4.53)$$

Se puede mostrar que, aún cuando las condiciones de borde aquí descritas han cambiado respecto de aquellas de la solución BTZ (4.29), éstas siguen siendo invariantes bajo el álgebra de Virasoro generada por los vectores de Killing (4.35). Más aún, la extensión central es la misma que en el caso de la solución BTZ [25].

Con todo lo anterior, quizás a primera impresión resulte un poco extraño comprobar que la Fórmula de Cardy no reproduce la entropía de Bekenstein-Hawking. En efecto, mientras que la entropía de Bekenstein-Hawking sigue siendo

$$\mathcal{S}_{\text{BH}} = \frac{\pi r_+}{2G} = \frac{\pi B\Theta_\nu}{2G}, \quad (4.54)$$

la fórmula de Cardy nos entrega:

$$\mathcal{S}_{\text{Cardy}} = \frac{\sqrt{6}\pi B\sqrt{1 + \nu}}{2G\sqrt{\ell}}. \quad (4.55)$$

Esta es la interrogante que se plantea en el artículo [26]. Para abordar esta discrepancia, notemos que en la solución con pelo no se puede anular el campo escalar sin modificar la masa de la solución. En otras palabras, la solución BTZ no está conectada con ésta, en el sentido que no se puede deformar continuamente una de las soluciones para llegar a la otra. Esta desconexión entre las soluciones podría ser vista como la responsable que la Fórmula de Cardy reproduzca correctamente la entropía solo en uno de los casos. Siguiendo con esta línea de pensamiento, sería natural imaginar que una fórmula *à la* Cardy podría ser obtenida para la solución con pelo.

Si el espectro de los operadores L_0^\pm del álgebra de Virasoro, cuyos valores propios están dados por

Δ^\pm , es tal que el menor valor propio Δ_0^\pm no se anula, la F3rmula de Cardy se puede escribir [82]:

$$\mathcal{S}_{\text{Cardy}} = 2\pi\sqrt{\frac{c_+ - 24\Delta_0}{6}}\left(\Delta^+ - \frac{c_+}{24}\right) + 2\pi\sqrt{\frac{c_- - 24\Delta_0^-}{6}}\left(\Delta^- - \frac{c_-}{24}\right) \quad (4.56)$$

El punto clave es el siguiente: notemos que al redefinir los operadores L_0^\pm como

$$\tilde{L}_0^\pm = L_0^\pm - \frac{c_\pm}{24} \quad (4.57)$$

la F3rmula de Cardy se reescribe de la siguiente forma:

$$\mathcal{S}_{\text{Cardy}} = 4\pi\sqrt{-\Delta_0^+\Delta^+} + 4\pi\sqrt{-\Delta_0^-\Delta^-}, \quad (4.58)$$

donde se observa que la entropía se podría obtener si se conociera directamente el espectro de Δ^\pm , *sin hacer ninguna referencia explícita a las cargas centrales*.

En (4.58), el valor Δ_0^\pm debe satisfacer la condición

$$-\frac{c_\pm}{24} \leq \Delta_0^\pm < 0, \quad (4.59)$$

tras lo cual, se puede apreciar que al aplicar la F3rmula de Cardy sobre el agujero negro BTZ se está asumiendo implícitamente que AdS₃ es considerado como el estado fundamental (o estado de menor energía) de la solución. Esto lo podemos evidenciar de la siguiente manera. Primero, tenemos que $M_{\text{AdS}} = -\frac{1}{8G}$, y por lo tanto Δ_0^\pm corresponderá a su menor valor propio, que en este caso es

$$\Delta_0^\pm = \frac{\ell M_{\text{AdS}}}{2} = -\frac{\ell}{16G}. \quad (4.60)$$

Notemos que el anterior es el único valor que alcanza la cota inferior de (4.59) cuando

$$c_+ = c_- = \frac{3\ell}{2G}. \quad (4.61)$$

Luego, como ya mostramos en la sección anterior, (4.58) reproduce la entropía de Bekenstein-Hawking.

Los autores proponen que, producto de la desconexión entre la solución BTZ y la solución con pelo, AdS₃ no debería ser considerado como el estado fundamental para este nuevo sector. Por este motivo, se propone buscar un nuevo estado fundamental para la solución con pelo, el cual debe compartir, como mínimo, tres características esenciales con la solución AdS₃:

- debe ser una solución regular de la teoría bajo análisis.
- la solución debe carecer de constantes de integración.
- la carga asociada a la masa (energía) de la solución debe ser negativa.

Estas tres características definen lo que llamamos una solución de tipo *solit3n* [26] [83, 84]. Para el sector con pelo, los autores proponen como estado fundamental la siguiente solución

$$ds^2 = \ell^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha_\nu(1 + \rho^2)}\right)^{-2} \times \left(- (1 + \rho^2)^2 d\tau^2 + \frac{4d\rho^2}{2 + \rho^2 + \frac{c_\nu}{1 + \rho^2}} + \left(\frac{2}{2 + c_\nu}\right)^2 \rho^2 \left(2 + \rho^2 + \frac{c_\nu}{1 + \rho^2}\right) dx^2\right), \quad (4.62)$$

con

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2}(\Theta_\nu + \sqrt{\Theta_\nu^2 + 4\Theta_\nu}), \quad c_\nu = \frac{2(1+\nu)}{\alpha_\nu^3}, \quad y \quad (4.63)$$

$$\phi(r) = \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1}{1 + \alpha_\nu(1 + \rho^2)}}, \quad (4.64)$$

la cual satisface las tres condiciones anteriores. La carga asociada a la masa de esta solución está dada por

$$M_{\text{sol}} = -\frac{\Theta_\nu^2}{24G(1+\nu)}. \quad (4.65)$$

Finalmente, usando (4.65) y

$$\Delta_0^\pm = \frac{\ell M_{\text{sol}}}{2}, \quad (4.66)$$

de la fórmula (4.58) se obtiene

$$\mathcal{S}_{\text{Cardy}} = \frac{\pi B \Theta_\nu}{2G} = \mathcal{S}_{\text{BH}} \quad (4.67)$$

4.3. Fórmula à la Cardy para Agujeros Negros en Horizontes Planos

En vista de los resultados de la sección anterior, es natural preguntarse por la existencia y unicidad de soluciones de tipo solitón. Hasta ahora la respuesta es en general desconocida, sin embargo, sobre horizontes planos la doble continuación analítica ha sido una técnica utilizada para construir este tipo de soluciones a partir de la solución de agujero negro [85].

En términos simples, la continuación analítica es un cambio de variables de la coordenada temporal $t = i\tau$ que transforma la métrica de una signatura Lorentziana a una de signatura euclídea. La consecuencia de esta transformación en Física es trascendental, pues τ es una coordenada periódica, y su período β se puede identificar con el inverso de la temperatura del agujero negro.

Por ejemplo, podemos ver esta conexión si consideremos la siguiente clase de métricas:

$$ds^2 = -N^2(r)f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad (4.68)$$

que como ya hemos visto, puede representar soluciones de tipo agujero negro. Definamos $r = r_+$ como la locación del horizonte de eventos, esto es, $f(r_+) = 0$. Además, pediremos que este horizonte sea una raíz simple de $f(r)$, y que ésta sea una función creciente, al menos, sobre el intervalo $[r_+, \infty[$. Por su parte, $d\Omega_{D-2}^2$ es el elemento de línea de la variedad de base. Para el caso de horizontes planos, este es

$$d\Omega_{D-2}^2 = \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2. \quad (4.69)$$

Al hacer el cambio de variable $t = i\tau$, obtenemos

$$ds^2 = N^2(r)f(r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{D-2}^2. \quad (4.70)$$

De las hipótesis sobre la función $f(r)$, tenemos que $f'(r_+) > 0$. Luego, la métrica en la vecindad $V = \{r : r \approx r_+, r > r_+\}$ es

$$ds^2 \sim_V N^2(r_+)f'(r_+)(r-r_+)d\tau^2 + \frac{dr^2}{f'(r_+)(r-r_+)} + r_+^2 d\Omega_{D-2}^2. \quad (4.71)$$

Usando el cambio de variable $R = \sqrt{\frac{4(r-r_+)}{f'(r_+)}}$, y mirando la superficie de nivel $\Omega = cst$, se tiene

$$\frac{N^2(r_+)f'(r_+)^2}{4}R^2d\tau^2 + dR^2. \quad (4.72)$$

Finalmente, tras redefinir $\tau = \frac{2}{N(r_+)f'(r_+)}\phi$ se obtiene la métrica de un plano, definido en las coordenadas polares R, ϕ :

$$R^2d\phi^2 + dR^2. \quad (4.73)$$

Esta métrica es completamente no singular cerca de $R = 0$, siempre que ϕ sea periódica con período 2π , ya que para una periodicidad diferente podría llevar a una singularidad cónica. Así, τ debe tener período

$$\beta = \frac{4\pi}{N(r_+)f'(r_+)}, \quad (4.74)$$

que es el inverso de la Temperatura de Hawking (1.60).

Por su parte, trabajando sobre una variedad de base plana (4.69), en la doble continuación analítica intercambiamos el rol de la coordenada temporal con cualquiera de las coordenadas espaciales, por ejemplo

$$t \mapsto i\chi, \quad x_1 \mapsto i\tau, \quad (4.75)$$

donde debemos imponer la condición que la coordenada x_1 sea necesariamente periódica, y su período debe coincidir con el período de la coordenada τ . El período de x_1 se puede normalizar para que sea igual a 2π , por lo tanto, obtenemos la condición

$$\beta = 2\pi, \quad (4.76)$$

que, usando (4.74), es simplemente una ecuación para el horizonte de eventos r_+ . Esto otorga a r_+ un valor fijo, y de este modo, deja de ser un parámetro libre.

El objetivo del artículo [2] es confirmar la importancia del rol del solitón gravitacional, proponiéndolo como el estado fundamental para cualquier teoría de campo, cuyo dual sea una teoría de gravedad con variedad de base planar que exhiba una relación de potencias entre la entropía y la temperatura, $\mathcal{S} \sim T^{\frac{d_{\text{eff}}}{z}}$, donde d_{eff} es una dimensionalidad espacial "efectiva" y z es el exponente dinámico responsable de la (posible) anisotropía del espaciotiempo. Si bien en el caso de AdS se tiene la situación estándar $d_{\text{eff}} = D - 2$ y $z = 1$, estos valores podrían cambiar sobre otro tipo de métricas. Tal es el caso, por ejemplo, de métricas que violan la propiedad de hiperescalamiento [86–89], donde $d_{\text{eff}} \neq D - 2$, o de métricas tipo *Lifshitz* (donde $z \neq 1$). Como mencionamos anteriormente, el espíritu de la correspondencia AdS/CFT se ha extendido a otras teorías, y esta clase de métricas no son la excepción [90, 91]. Para ello, trabajamos sobre agujeros negros rotantes en dimensión arbitraria que tengan una variedad de base planar. Consideramos soluciones isotrópicas [54, 92–96], soluciones donde se rompe la propiedad de hiperescalamiento [97] y soluciones de tipo Lifshitz [98–100]. El estado fundamental estará en un estado neutro cuando el agujero negro esté cargado eléctricamente, y no rotará si el agujero negro es rotante. De esta manera, el estado base carece de constantes de integración.

Por su parte, la masa del solitón puede ser calculada a partir de la generalización cuasilocal del

formalismo ADT [101–105], presentado en las referencias [106, 107]. En estos artículos se define el potencial ADT *off-shell*, $\sqrt{-g}\mathcal{Q}_{\text{ADT}}^{\mu\nu}$ en función del potencial de Noether $K^{\mu\nu}$ y el término de superficie Θ^μ que surge de la variación de

$$\sqrt{-g}\mathcal{Q}_{\text{ADT}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta K^{\mu\nu} - \xi^{[\mu}\Theta^{\nu]}, \quad (4.77)$$

donde ξ^μ denota al vector de Killing. La carga conservada en esta formulación se calcula a través de

$$\mathcal{Q}[\xi] = \int d^{D-2}x_{\mu\nu} \left(\Delta K^{\mu\nu}(\xi) - 2\xi^{[\mu} \int_0^1 ds \Theta^{\nu]}(\xi|s) \right), \quad (4.78)$$

donde $\Delta K^{\mu\nu} = K_{s=1}^{\mu\nu} - K_{s=0}^{\mu\nu}$ denota la diferencia del potencial de Noether entre el agujero negro y la solución sin masa, y $d^{D-2}x_{\mu\nu}$ representa la integración sobre la frontera de codimensión 2.

A Cardy-like formula for rotating black holes with planar horizon

Moisés Bravo Gaete,^a Luis Guajardo^b and Mokhtar Hassaine^b

^a*Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule,
Casilla 617, Talca, Chile*

^b*Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca,
Casilla 747, Talca, Chile*

E-mail: mbravo@ucm.cl, luis.guajardo.r@gmail.com,
hassaine@inst-mat.otalca.cl

ABSTRACT: We show that the semiclassical entropy of D -dimensional rotating (an)isotropic black holes with planar horizon can be successfully computed according to a Cardy-like formula. This formula does not refer to any central charges but instead involves the vacuum energy which is identified with a gravitational bulk soliton. The soliton is obtained from the non-rotating black hole solution by means of a double analytic continuation. The robustness of the Cardy-like formula is tested with numerous and varied examples, including AdS, Lifshitz and hyperscaling violation planar black holes.

KEYWORDS: Black Holes, Classical Theories of Gravity

ARXIV EPRINT: [1702.02416](https://arxiv.org/abs/1702.02416)

Contents

1	Introduction	1
2	General formula for the asymptotic growth of the number of states	4
3	Corroborating the Cardy-like formula in the isotropic case, $z = 1$	6
3.1	Stationary cylindrical black holes	7
3.2	Black hole with a super-renormalizable self-interacting scalar field in 3D	8
3.3	Lovelock AdS black holes	13
3.4	Hyperscaling violation black hole in D dimensions	15
3.5	Hyperscaling violation black hole with higher-order gravity theory	16
4	Testing the Cardy-like formula in the anisotropic case	17
4.1	Lifshitz black holes with higher-order gravity theories	17
4.2	Charged anisotropic black holes with two Abelian gauge fields	19
4.3	Turning on the angular momentum	20
5	Summary and concluding remarks	21

1 Introduction

Since the seminal works of Bekenstein and Hawking [1, 2], black holes are believed to behave as thermodynamic objects with characteristic temperature and entropy. A natural question has then emerged concerning the statistical interpretation of the black hole entropy. One of the first results that has shed some light on this problem was the observation that the asymptotic symmetries of the three-dimensional AdS space consist in two copies of the Virasoro algebra with a central charge [3]. This latter corresponds to the symmetry group of a two-dimensional CFT and, in this case, the Cardy formula is well-appropriate to express the asymptotic density of states [4]. An important manifestation of the AdS/CFT correspondence was then provided by showing that the Cardy formula applied for the BTZ black hole [5] correctly reproduces the expression of the Bekenstein-Hawking entropy [6]. Soon after, this approach was generalized for higher-dimensional black holes having a two-dimensional CFT dual in the case of standard General Relativity [7] as well as in presence of higher-derivative corrections [8].

Extensions of the Cardy formula have been considered and studied in the current literature. Among other, one can mention the higher-dimensional generalization of the Cardy formula which applied for strongly coupled field theories having an AdS dual [9]. There also exist extensions of the Cardy formula with applications for three-dimensional spacetimes that are not AdS like the warped AdS spaces [10] or anisotropic spacetimes,

namely the Lifshitz spacetimes [11] or the hyperscaling violation geometries [12–14]. The interest on anisotropic spacetimes has considerably grown up this last decade essentially due to the will of extending the ideas underlying the gauge/gravity duality to strongly coupled field theories with an anisotropic scaling symmetry [15]. Notice also that the cases of three-dimensional black holes have permitted a better comprehension of the holographic derivation of the entropy by highlighting the prominent role played by the soliton, see refs. [16–18]. This observation is not in contradiction with the standard derivation of the Cardy formula for which the ground state is implicitly assumed to be the three-dimensional AdS spacetime. Nevertheless, this assumption is in general valid only for the vacuum sector but not in the hairy sector which possesses a different ground state. It is then more judicious to deal with a Cardy formula written in terms of the vacuum energy rather than the central charges. Unfortunately, it is not possible *a priori* to find out the vacuum energy of the putative field theory. However, as stressed in refs. [16–18], the vacuum energy can be identified with the mass of a bulk soliton constructed from the black hole through a double Wick rotation in the same way that the AdS soliton [19], which reinforces the importance of the role played by the soliton. Importance also confirmed in the Lifshitz case [11] where the robustness of the Lifshitz Cardy formula has been tested successfully for three-dimensional Lifshitz black holes with a nonminimally scalar field [20].

One of the aim of this paper is precisely to confirm the importance of the gravitational soliton. We will highlight this importance in the case of rotating black holes in arbitrary dimension D with a planar base manifold. This restriction on the horizon’s topology is justified by the fact that the soliton can be easily constructed from the black hole by a double analytic continuation similar to the one operated in the AdS soliton [19]. With the view of achieving this task, we will be interested on higher-dimensional extensions of the Cardy formula for field theories satisfying the following two assumptions: (i) the field theory possibly displays a hyperscaling violation reflected by the fact that the thermal entropy \mathcal{S} scales with respect to the temperature as $\mathcal{S} \sim T^{\frac{d_{\text{eff}}}{z}}$, and (ii) the ground state for the field theory is identified with a bulk soliton which is regular everywhere and devoid of any integration constant. Here, d_{eff} is an effective spatial dimensionality for the dual theory (related to the dimension of the stress-energy tensor) which measures the possible deviation from the spatial dimension and z is the Lifshitz dynamical exponent. In the standard AdS situation, the “effective” spatial dimension $d_{\text{eff}} = D - 2$ and the dynamical exponent $z = 1$. Under these hypothesis, formulas for the asymptotic growth of the number of states have been obtained in the non-rotating case in [12–14], and their spinning generalizations in the isotropic case $z = 1$ were found in [21]. In the present work, we extend this formula for a generic dynamical exponent z . The resulting Cardy-like formula makes no mention to any central charge but instead involves the mass of the ground state which is identified with the nonrotating gravitational soliton. Nevertheless, since a very little is known about the putative field theories, we propose to corroborate the validity of the Cardy-like formula considering gravity theories whose spectrum of solutions contain black holes whose entropy exhibits a power law temperature as described in the hypothesis (i) as well as regular solitons (ii). This inspection will be done for different classes of black hole solutions with different asymptotic behaviors (rotating AdS, Lifshitz and hyperscaling violation black

holes with a planar base manifold) by comparing the gravitational entropy with the entropy field expression involving the effective spatial dimension and the vacuum energy. In all our examples, the spinning planar black holes are derived from static configurations through a Lorentz boost and the vacuum energy corresponds to the mass of the gravitational soliton obtained from the nonrotating black hole through a double Wick rotation. We will also extend these results to the case of charged planar black holes, where again the ground state is identified with the soliton derived from the neutral and nonrotating black hole. Since the soliton is devoid of any integration constant, its mass will be computed using the quasilocal generalization of the ADT formalism [22–26] as presented in refs. [27, 28]. One of the main result of these two last papers lies in the prescription of the off-shell ADT potential $\mathcal{Q}_{\text{ADT}}^{\mu\nu}$ in terms of the off-shell Noether potential $K^{\mu\nu}$ and the surface term Θ^μ arising from the variation of the action

$$\sqrt{-g}\mathcal{Q}_{\text{ADT}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta K^{\mu\nu} - \xi^{[\mu}\Theta^{\nu]}, \tag{1.1}$$

where ξ^μ denotes the Killing vector. The corresponding conserved charge is computed to be

$$Q(\xi) = \int d^{D-2}x_{\mu\nu} \left(\Delta K^{\mu\nu}(\xi) - 2\xi^{[\mu} \int_0^1 ds \Theta^{\nu]}(\xi|s) \right), \tag{1.2}$$

where $\Delta K^{\mu\nu}(\xi) \equiv K_{s=1}^{\mu\nu}(\xi) - K_{s=0}^{\mu\nu}(\xi)$ denotes the difference of the Noether potential between the black hole and the zero-mass solution, and $d^{D-2}x_{\mu\nu}$ represents the integration over the co-dimension two boundary. For the examples treated in this paper, the action can schematically be written as

$$S = \int d^Dx \sqrt{-g} \mathcal{L}(g, \phi, A_{(i)}),$$

where ϕ is a scalar field (possibly a dilatonic field) with its usual kinetic term and $A_{(i)} = A_{(i)\mu} dx^\mu$ stand for Abelian gauge fields or Proca fields. In this generic case, the boundary term and Noether potential needed to compute the charge (1.2) are given by

$$\begin{aligned} \Theta^\mu &= 2\sqrt{-g} \left[P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \nabla_\gamma \delta g_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} + \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_{(i)\nu})} \delta A_{(i)\nu} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right], \\ K^{\mu\nu} &= \sqrt{-g} \left[2P^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\rho \xi_\sigma - 4\xi_\sigma \nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_{(i)\nu})} \xi^\sigma A_{(i)\sigma} \right], \end{aligned} \tag{1.3}$$

where $P^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}}$, and $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ is the Riemann tensor.

The plan of the paper is organized as follows. In the next section, a general formula for the asymptotic growth of the number of states including the angular momentum is proposed. This generic Cardy-like formula involves the effective spatial dimension d_{eff} , the Lifshitz dynamical exponent z , the mass and angular momentum of the black hole as well as the vacuum energy which corresponds to the mass of the bulk soliton. In section 3, we corroborate the validity of the Cardy-like formula in the isotropic case $z = 1$ with stationary cylindrical black holes. The case of a three-dimensional black hole solution of the Einstein equations with a source given by a self-interacting scalar field with a super-renormalizable potential is also treated in full details. Lovelock AdS black holes will also be inspected in

order to reinforce the validity of the Cardy-like formula. To end the section 3, two examples of hyperscaling violating black holes with different effective spatial dimensionality will be studied. In section 4, we will deal with the anisotropic case $z \neq 1$. Lifshitz black holes solutions of higher-order gravity theories will be our first testing example while the case of charged anisotropic black holes produced by various dilaton fields will constitute our second class of example. Finally, the last section is devoted to the summary and to the concluding remarks. For simplicity, we have decided to fix the radius of curvature to unit, $l = 1$, while the Newton gravitational constant G is defined through the change $2\kappa = 16\pi G$.

2 General formula for the asymptotic growth of the number of states

As recalled in the introduction, the asymptotic symmetries of AdS_3 are represented by two copies of the Virasoro algebra with equal left and right moving central charges

$$c^+ = c^- = c = \frac{3l}{2G} = \frac{12\pi}{\kappa},$$

(in our convention $l = 1$ and $2\kappa = 16\pi G$), and the standard Cardy formula takes the following form

$$S = 2\pi\sqrt{\frac{c}{6}\tilde{\Delta}^+} + 2\pi\sqrt{\frac{c}{6}\tilde{\Delta}^-}, \tag{2.1}$$

where $\tilde{\Delta}^\pm = \frac{1}{2}(M \pm J)$ are the eigenvalues of the left and right Virasoro operators. In this representation of the Cardy formula, it is implicitly assumed that the ground state is identified with the AdS spacetime. Nevertheless, the AdS spacetime is only a suitable ground state in the case of standard General Relativity, and this assumption is not longer valid in presence of source for example. Hence, it is more reasonable to deal with a Cardy formula involving the vacuum charge than the central charge. In the vacuum sector for standard General Relativity, the ground state is nothing but the three-dimensional AdS soliton whose mass is computed below (3.9) and gives $M_{\text{sol}} = -\pi/\kappa$. Finally, the standard Cardy formula (2.1) can be as well expressed as

$$S = 4\pi\sqrt{-\frac{1}{2}M_{\text{sol}}}\sqrt{\tilde{\Delta}^-} + 4\pi\sqrt{-\frac{1}{2}M_{\text{sol}}}\sqrt{\tilde{\Delta}^+}. \tag{2.2}$$

Notice that Cardy-like formulas involving the vacuum energy instead of the central charges have been proved to be very useful for examples where the ground state is not the three-dimensional AdS spacetime, see e.g. [11–14, 16–18]. The matching between the gravitational entropy and the Cardy formula (2.2) is perfectly consolidated for three-dimensional black holes that are asymptotically AdS (even in the weaker sense). Nevertheless, as mentioned in the introduction, we are interested on generalizations of the Cardy formula that apply for field theories displaying an hyperscaling violation behavior such that the thermal entropy \mathcal{S} scales w.r.t. the temperature T as

$$\mathcal{S} \sim T^{\frac{d_{\text{eff}}}{z}},$$

where d_{eff} is an effective spatial dimensionality and z is the Lifshitz exponent. In order to achieve this task, we closely follow the derivations done in refs. [12, 21]. The partition function \mathcal{Z} defined on the torus of modulus τ such that $2\pi\tau = 2\pi r e^{i\phi}$ and $2\pi\bar{\tau} = 2\pi r e^{-i\phi}$ can be written as

$$\mathcal{Z}[\tau, \bar{\tau}] = \text{Tr} \left[e^{2\pi i \tau L_0} e^{-2\pi i \bar{\tau} \bar{L}_0} \right],$$

with $L_0 + \bar{L}_0 = M$ and $L_0 - \bar{L}_0 = J$. The density of states $\rho(M, J)$ can be obtained by taking an inverse Laplace transform yielding

$$\rho(M, J) = \int dr d\phi \mathcal{Z}[r, \phi] \exp \left[-2\pi i r e^{i\phi} L_0 + 2\pi i r e^{-i\phi} \bar{L}_0 \right]. \quad (2.3)$$

In the microcanonical ensemble, the entropy is basically the logarithm of the density of states $\mathcal{S} \sim \log \rho(M, J)$. Defining the quantity

$$\mathcal{Z}_0[r, \phi] = \text{Tr} \left\{ \exp \left[2\pi i r e^{i\phi} \left(L_0 - \frac{M_{\text{sol}}}{2} \right) - 2\pi i r e^{-i\phi} \left(\bar{L}_0 - \frac{M_{\text{sol}}}{2} \right) \right] \right\},$$

and assuming that \mathcal{Z}_0 presents the following modular invariance

$$\mathcal{Z}_0 \left[-\frac{1}{r \frac{d_{\text{eff}}}{z}}, -\phi \right] = \mathcal{Z}_0[r, \phi],$$

the density of states $\rho(M, J)$ can be re-written as

$$\rho(M, J) = \int dr d\phi \mathcal{Z}_0 \left[-\frac{1}{r \frac{d_{\text{eff}}}{z}}, -\phi \right] \exp \left[-\frac{\pi i M_{\text{sol}}}{r \frac{d_{\text{eff}}}{z}} e^{-i\phi} + \frac{\pi i M_{\text{sol}}}{r \frac{d_{\text{eff}}}{z}} e^{i\phi} - 2\pi i r e^{i\phi} L_0 + 2\pi i r e^{-i\phi} \bar{L}_0 \right].$$

Now, as usual, this last expression can be evaluated using a saddle-point approximations for r and ϕ , and assuming that \mathcal{Z}_0 varies slowly, one gets

$$\begin{aligned} S &= \pi \sqrt{\frac{d_{\text{eff}} + z}{z}} \left[(-2M_{\text{sol}})^z \frac{1}{d_{\text{eff}}^{d_{\text{eff}}}} \right]^{\frac{1}{z+d_{\text{eff}}}} \left(\sqrt{(d_{\text{eff}} + z)^2 M^2 - 4d_{\text{eff}} z J^2} + (d_{\text{eff}} + z) M \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left(\sqrt{(d_{\text{eff}} + z)^2 M^2 - 4d_{\text{eff}} z J^2} - (d_{\text{eff}} - z) M \right)^{\frac{d_{\text{eff}} - z}{2(d_{\text{eff}} + z)}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

This formula constitutes the extension of the Cardy formula (2.2) in arbitrary dimension for a field theory with a spatial effective dimension d_{eff} and dynamical exponent z .

Let us see the consistency of this expression with known formulas. First of all, in the isotropic case $z = 1$, the expression (2.4) is compatible with the Cardy formula (2.2) in the standard AdS case in three dimensions (which corresponds to $d_{\text{eff}} = 1$) as well as with the formula derived in [21] for hyperscaling violation metric. On the other hand, in the non-rotating case with anisotropy, i.e. $J = 0$ with $z \neq 1$, the formula (2.4) reproduces the Lifshitz Cardy formula in three dimensions with $d_{\text{eff}} = 1$, see [11], and also the generic formula for hyperscaling violation metric [12–14].

In the electrically charged case, the Cardy-like formula (2.4) becomes

$$\begin{aligned}
 S &= \pi \sqrt{\frac{d_{\text{eff}} + z}{z}} \left[(-2M_{\text{sol}})^z \frac{1}{d_{\text{eff}}^{d_{\text{eff}}}} \right]^{\frac{1}{z+d_{\text{eff}}}} \\
 &\times \left(\sqrt{(d_{\text{eff}} + z)^2 \left(M - \frac{1}{2} \phi_e Q_e \right)^2 - 4d_{\text{eff}} z J^2} + (d_{\text{eff}} + z) \left(M - \frac{1}{2} \phi_e Q_e \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\times \left(\sqrt{(d_{\text{eff}} + z)^2 \left(M - \frac{1}{2} \phi_e Q_e \right)^2 - 4d_{\text{eff}} z J^2} - (d_{\text{eff}} - z) \left(M - \frac{1}{2} \phi_e Q_e \right) \right)^{\frac{d_{\text{eff}} - z}{2(d_{\text{eff}} + z)}},
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

where ϕ_e denotes the electric potential while Q_e stands for the electric charge.

3 Corroborating the Cardy-like formula in the isotropic case, $z = 1$

In this section, we will be mainly concerned with planar black holes that are asymptotically AdS or exhibiting an hyperscaling violation behavior. In these cases, the asymptotic form of the metric can be parameterized as follows

$$ds^2 = \frac{1}{r^{\frac{2\theta}{D-2}}} \left[-r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + r^2 \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2 \right], \tag{3.1}$$

where θ represents the parameter responsible of the violation of the hyperscaling property, and $\theta = 0$ will correspond to the planar AdS case. Note that, for the asymptotic metric (3.1), the isotropic transformations $t \rightarrow \lambda t$, $r \rightarrow \lambda^{-1} r$ and $x_i \rightarrow \lambda x_i$ are identified as an isometry in the AdS case, and as a conformal transformation for non vanishing θ .

For this class of black holes, the dynamical exponent appearing in the Cardy-like formula (2.4) corresponds to the isotropic situation $z = 1$ while the effective spatial dimension d_{eff} is given by $d_{\text{eff}} = D - 2$ in the AdS case ($\theta = 0$) otherwise it will depend explicitly on the violating parameter θ . In the hyperscaling case, one of the difficulty is to correctly identify the functional dependence of the effective spatial dimension. For example, for Einstein gravity with scalar field source, the effective spatial dimension is $d_{\text{eff}} = D - 2 - \theta$, while for higher-order gravity theories, this dependence may be different as shown below, see also [13, 14].

In what follows, we will treat various isotropic examples with the aim of testing the Cardy-like formula, starting from AdS planar black holes. As a first example, we examine D -dimensional stationary cylindrical black holes solutions of Einstein gravity with a negative cosmological constant. We also look at the case of a three-dimensional solution of Einstein gravity with a self-interacting scalar field with a super-renormalizable potential. The case of higher theories is also inspected through the analysis of Lovelock AdS black holes. In the second part, two examples of hyperscaling violation black holes will be studied. The first testing example is described by the Einstein gravity with a scalar field source corresponding to a spatial dimensionality $d_{\text{eff}} = D - 2 - \theta$. Next, in order to test the force of the Cardy-like formula with a different spatial dimensionality, we deal with an hyperscaling violating black hole solution of a pure quadratic gravity theory.

3.1 Stationary cylindrical black holes

We start the corroborating study of the Cardy-like formula (2.4) with the case of the Einstein field equations in the presence of a negative cosmological constant

$$G_{\mu\nu} - \frac{(D-1)(D-2)}{2}g_{\mu\nu} = 0,$$

and whose corresponding action is

$$S[g] = \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{-g} \left(R + (D-1)(D-2) \right). \quad (3.2)$$

We consider the higher-dimensional extension of the stationary cylindrical black hole found by Lemos [29] in four dimensions and reported in [30],

$$ds^2 = -F(r) \left(\Xi dt - \sum_{i=1}^n a_i d\phi_i \right)^2 + r^2 \sum_{i=1}^n (a_i dt - \Xi d\phi_i)^2 + \frac{dr^2}{F(r)} - r^2 \sum_{i<j}^n (a_i d\phi_j - a_j d\phi_i)^2 + r^2 \sum_{i=1}^{D-2-n} dx_i^2. \quad (3.3)$$

Here $n = [(D-1)/2]$ corresponds to the number of rotation parameters a_i , $\Xi = \sqrt{1 + \sum_i^n a_i^2}$, and the metric function reads

$$F(r) = r^2 \left(1 - \left(\frac{r_h}{r} \right)^{D-1} \right).$$

In four dimensions, the number of rotations is $n = 1$, and the solution reduces to the stationary cylindrical black hole solution of Lemos [29].

As calculated in ref. [30], the entropy of the solution is

$$\mathcal{S} = \frac{2\pi \text{Vol}(\Sigma_{D-2}) \Xi r_h^{D-2}}{\kappa}, \quad (3.4)$$

with mass and angular momenta given by

$$M = \frac{\text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{2\kappa} \left((D-1)\Xi^2 - 1 \right) r_h^{D-1}, \quad J_i = \frac{(D-1)\text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{2\kappa} \Xi a_i r_h^{D-1}, \quad (3.5)$$

where $\text{Vol}(\Sigma_{D-2})$ corresponds to the volume element of the $(D-2)$ -dimensional Euclidean space.

In order to test the validity of the Cardy-like formula (2.4), one needs to construct the static soliton and to compute its mass through the quasilocal expression (1.2). As explained in the introduction, operating a double Wick rotation on the static version of the solution, that is eq. (3.3) with $a_i = 0$, one gets the AdS soliton [19]

$$ds^2 = -r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + f(r) d\phi^2 + r^2 \sum_{i=1}^{D-3} dx_i^2, \quad (3.6)$$

with

$$f(r) = r^2 \left[1 - \left(\frac{2}{(D-1)r} \right)^{D-1} \right]. \quad (3.7)$$

The next step is to determine the mass of the soliton through the quasilocal formula (1.2) where the Killing vector field is $\xi^t = \partial_t$. The variation of the Noether potential and the surface term are given by

$$\int_0^1 ds \Theta^r = \frac{1}{2\kappa} \left(\frac{2}{D-1} \right)^{D-1}, \quad \Delta K^{rt}(\xi^t) = -\frac{1}{\kappa} \left(\frac{2}{D-1} \right)^{D-1}. \quad (3.8)$$

Finally, the mass of the D -dimensional AdS gravitational soliton reads

$$M_{\text{sol}} = -\frac{\text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{2\kappa} \left(\frac{2}{D-1} \right)^{D-1}, \quad (3.9)$$

and it is simple to check that the formula (2.4) where J^2 is now understood as $J^2 = \sum_{i=1}^n J_i^2$ and where $d_{\text{eff}} = D - 2$ and $z = 1$ correctly reproduces the gravitational entropy (3.4).

3.2 Black hole with a super-renormalizable self-interacting scalar field in 3D

We pursue our survey considering now a three-dimensional toy model whose action is described by the Einstein-Hilbert piece with a cosmological constant together with a non-minimally self-interacting scalar field

$$S[g, \phi] = \int d^3x \sqrt{-g} \left(\frac{R - 2\Lambda}{2\kappa} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{1}{16} R \phi^2 - U(\phi) \right). \quad (3.10)$$

The nonminimal coupling corresponds to the conformal one in three dimensions, and as it is well known the potential term which is compatible with the conformal invariance of the matter source is $U(\phi) \propto \phi^6$. Nevertheless, in our case, we chose a potential term breaking the conformal invariance of the matter action, and defined by all the powers lower than the conformal one (super-renormalizable potential), that is

$$U(\phi) = \lambda_1 \phi + \lambda_2 \phi^2 + \lambda_3 \phi^3 + \lambda_4 \phi^4 + \lambda_5 \phi^5 + \lambda_6 \phi^6. \quad (3.11)$$

The field equations obtained from the variation of the action (3.10) with respect to the metric and the scalar field are

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= \kappa \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi + U \right) + \frac{1}{8} (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu + G_{\mu\nu}) \phi^2 \right), \\ \square \phi - \frac{1}{8} R \phi &= \frac{dU}{d\phi}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

In ref. [32], the authors have derived a static black hole solution of the model described by (3.10)–(3.11)–(3.12) using a conformal machinery where the coupling constants are

parameterized as follows

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{[(\mu - 3)^2 (4\mu - 3) \lambda^4 + 27 (\mu - 1)^2] \lambda \sqrt{2}}{18\sqrt{\kappa} (\mu - 1)^2 (1 - \lambda^2)^5}, \\
\lambda_2 &= -\frac{5\lambda^2 [\lambda^2 (4\mu - 3) (\mu - 3)^2 + 27 (\mu - 1)^2]}{72 (\mu - 1)^2 (1 - \lambda^2)^5}, \\
\lambda_3 &= \frac{5\sqrt{2\kappa} \mu^3 \lambda^3}{54 (\mu - 1)^2 (1 - \lambda^2)^5}, \quad \lambda_4 = -\frac{5\kappa \lambda^2 [(4\mu - 3) (\mu - 3)^2 + 27 (\mu - 1)^2 \lambda^2]}{576 (\mu - 1)^2 (1 - \lambda^2)^5}, \\
\lambda_5 &= \frac{[27 (\mu - 1)^2 \lambda^4 + (4\mu - 3) (\mu - 3)^2] \sqrt{2} \lambda \kappa^{3/2}}{1152 (\mu - 1)^2 (1 - \lambda^2)^5}, \\
\lambda_6 &= -\frac{\kappa^2 [27 (\mu - 1)^2 \lambda^6 + (4\mu - 3) (\mu - 3)^2]}{13824 (\mu - 1)^2 (1 - \lambda^2)^5}, \\
\Lambda &= -\frac{[27 (\mu - 1)^2 + \lambda^6 (4\mu - 3) (\mu - 3)^2]}{27 (\mu - 1)^2 (1 - \lambda^2)^5}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

More precisely, as shown in [32], the action defined by (3.10)–(3.11)–(3.13) can be obtained from the conformally invariant action¹ denoted by $\tilde{S}[\tilde{g}, \tilde{\phi}]$ and corresponding to the action (3.10) with the potential $U \propto \tilde{\phi}^6$ through a map parameterized by the factor λ , and both actions are related as follows

$$S[g, \phi] = (1 - \lambda^2) \tilde{S}[\tilde{g}, \tilde{\phi}]. \tag{3.14}$$

In fact, the static solution reported in [32] was constructed using the one-parameter mapping with a seed configuration given by the solution of the conformally self-interacting version of the Martinez-Zanelli solution [33] found in [34]. Instead of writing down the static solution [32], we report its spinning extension obtained from the static configuration as usual in three dimensions through a Lorentz boost defined by

$$t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2}}(t + \omega \varphi), \quad \varphi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2}}(\varphi + \omega t), \tag{3.15}$$

and well-defined for $\omega^2 < 1$. The line element of the resulting rotating solution is given by

$$ds^2 = H^2(r) \left\{ -N^2(r) F(r) dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + R^2(r) (d\varphi + N^\varphi(r) dt)^2 \right\}, \tag{3.16}$$

where the metric functions and the scalar field read

$$\begin{aligned}
N^2(r) &= r^2 \frac{(1 - \omega^2)}{(r^2 - \omega^2 F(r))}, \quad R^2(r) = \frac{1}{(1 - \omega^2)} (r^2 - \omega^2 F(r)), \quad N^\varphi(r) = \frac{\omega (r^2 - F(r))}{(r^2 - \omega^2 F(r))}, \\
\phi(r) &= \sqrt{\frac{2}{\kappa H(r)}} \left[\sqrt{\frac{12 (\mu - 1) r_h}{(3 (\mu - 1) r_h - 2 r \mu)}} + 2 \lambda \right], \\
F(r) &= r^2 \left[1 + (\mu - 1) \left(\frac{r_h}{r} \right)^3 - \mu \left(\frac{r_h}{r} \right)^2 \right], \quad H(r) = \left[\lambda \sqrt{\frac{3 (\mu - 1) r_h}{(3 (\mu - 1) r_h - 2 r \mu)}} + 1 \right]^2.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

¹There is a slight abuse of language in the sense that “by conformally invariant action”, we mean that only the matter source involving the scalar field is invariant under the conformal transformations and not the gravity action.

We now analyze the thermodynamical properties of the spinning solution through the Euclidean method where the Euclidean time τ is imaginary $\tau = it$ and periodic of period β which is the inverse of the temperature $\beta = T^{-1}$. The Euclidean action I_{Euc} is related with the free energy F by

$$I_{\text{Euc}} = \beta F = \beta (M - TS - \Omega J), \quad (3.18)$$

where M is the mass, S the entropy and Ω is the chemical potential corresponding to the angular momentum J . On the other hand, in order to display the boundary term B that will ensure the finiteness of the Euclidean action, we find more convenient to consider the following class of Euclidean metric

$$ds^2 = H^2(r) \left\{ N^2(r) F(r) d\tau^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + R^2(r) (d\varphi + iN^\varphi(r) d\tau)^2 \right\},$$

with the assumption that the scalar field only depends on the radial coordinate, $\phi = \phi(r)$. The Euclidean time $\tau \in [0, \beta]$ and the radial coordinate $r \in [r_h, \infty[$ where r_h is the location of the horizon and $\varphi \in [0, 2\pi[$. The reduced action principle reads

$$I_{\text{Euc}} = 2\pi\beta \int (N(r)\mathcal{H}(r) + N^\varphi(r)p(r)') dr + B, \quad (3.19)$$

where

$$p(r) = \frac{1}{16} \frac{H(r)R^3(r)(8 - \phi(r)^2\kappa)N^\varphi(r)'}{N(r)\kappa}, \quad (3.20)$$

and the Hamiltonian \mathcal{H} is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{8 - \kappa\phi^2}{8\kappa} \left[RFH'' + HFR'' - \frac{RFH'^2}{H} + \frac{1}{2}F'R'H + H' \left(\frac{1}{2}F'R + R'F \right) \right] \\ & - \frac{1}{4}HFR\phi\phi'' + \frac{1}{4}HFR\phi'^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}F'R + FR' \right) H\phi\phi' + \frac{H^3R(\Lambda + \kappa U(\phi))}{\kappa} \\ & - \frac{24\kappa p^2}{HR^3(\kappa\phi^2 - 8)}. \end{aligned}$$

In the reduced action (3.19), B is a boundary term that is fixed by requiring that the Euclidean action has an extremum, that is $\delta I_E = 0$; this last condition in turn implies that

$$\begin{aligned} \delta B = & -2\pi\beta \left[\left(\frac{8 - \kappa\phi^2}{8\kappa} \left\{ \frac{1}{2}H'RN + \frac{1}{2}HR'N \right\} - \frac{1}{8}HRN\phi\phi' \right) \delta F + \left(\frac{8 - \kappa\phi^2}{8\kappa} RFN \right) \delta H' + \right. \\ & + \left(\frac{8 - \kappa\phi^2}{8\kappa} \left\{ -2\frac{H'RFN}{H} - \frac{1}{2}RNF' - RFN' \right\} + \frac{1}{4}RFN\phi\phi' \right) \delta H + \left(\frac{8 - \kappa\phi^2}{8\kappa} HFN \right) \delta R' \\ & - \left(\frac{8 - \kappa\phi^2}{8\kappa} H \left\{ \frac{1}{2}F'N + FN' \right\} \right) \delta R - \left(\frac{1}{4}HFRN\phi \right) \delta\phi' + \left(\frac{3}{4}HFRN\phi' + \frac{1}{8}HF'RN\phi \right. \\ & \left. + \frac{1}{4}HFRN'\phi + \frac{1}{4}H'FRN\phi \right) \delta\phi + N^\varphi\delta p \Big]_{r=r_h}^{r=\infty}, \end{aligned}$$

where the variation is taken between the horizon and the infinity. The temperature is fixed requiring regularity of the metric at the horizon yielding to

$$\beta(N(r)F'(r))|_{r_h} = 4\pi,$$

and for the solution (3.17), one obtains

$$T = \frac{(3-\mu)r_h\sqrt{1-\omega^2}}{4\pi}. \quad (3.21)$$

We do not display the field equations of the reduced action (3.19) but their full integration will reproduce the solution (3.17) with

$$p = -\frac{\omega\mu(1-\lambda^2)}{\kappa(1-\omega^2)}r_h^2.$$

We are now in position to compute the boundary term. Its contribution at the infinity gives

$$\delta B|_{\infty} = \frac{2\pi\beta\mu(1+\omega^2)(1-\lambda^2)r_h}{\kappa(1-\omega^2)}\delta r_h \implies B|_{\infty} = \beta\frac{\pi\mu(1+\omega^2)(1-\lambda^2)}{\kappa(1-\omega^2)}r_h^2,$$

while at the horizon, one gets

$$\delta B|_{r_h} = -2\pi\beta \left[\frac{4\pi(1-\lambda^2)\mu}{\sqrt{1-\omega^2}(\mu-3)\kappa\beta} \delta r_h + N^\varphi(r_h) \delta p \right],$$

and since $\Omega = N^\varphi(\infty) - N^\varphi(r_h) = -\omega$, we obtain

$$B|_{r_h} = \frac{8\pi^2(1-\lambda^2)\mu}{\sqrt{1-\omega^2}(3-\mu)\kappa}r_h + 2\pi\beta\Omega p. \quad (3.22)$$

Finally, the boundary term is given by

$$\begin{aligned} B &= B|_{\infty} - B|_{r_h} \\ &= \beta\frac{\pi\mu(1+\omega^2)(1-\lambda^2)}{\kappa(1-\omega^2)}r_h^2 - \frac{8\pi^2(1-\lambda^2)\mu}{\sqrt{1-\omega^2}(3-\mu)\kappa}r_h - 2\pi\beta\Omega p, \end{aligned} \quad (3.23)$$

and hence the comparison between (3.23) and (3.18) permits the identification of the entropy

$$\mathcal{S} = \frac{8\mu\pi^2 r_h (1-\lambda^2)}{\kappa(3-\mu)\sqrt{1-\omega^2}}, \quad (3.24)$$

as well as the mass, angular momentum and angular velocity that are given by

$$M = \frac{\mu\pi(1+\omega^2)(1-\lambda^2)}{\kappa(1-\omega^2)}r_h^2, \quad J = -\frac{2\pi\mu\omega(1-\lambda^2)}{\kappa(1-\omega^2)}r_h^2, \quad \Omega = -\omega. \quad (3.25)$$

It is interesting to note that the values of the entropy, the mass and the angular momentum of the black hole solution with the super-renormalizable potential are precisely $(1-\lambda^2)$ time those of the black hole solution with the conformal potential [33, 34]. This is not

surprising and can be explained as follows. On one hand, the actions being proportional with that precise factor (3.14), so that their Euclidean actions

$$I_{\text{Euc}} = (1 - \lambda^2) \tilde{I}_{\text{Euc}}.$$

On the other hand, since the temperatures and the chemical potentials are the same for both solution, $T = \tilde{T}$ and $\Omega = \tilde{\Omega}$, we have by virtue of (3.18)

$$I_{\text{Euc}} = \beta (M - TS - \Omega J) = (1 - \lambda^2) \tilde{I}_{\text{Euc}} = (1 - \lambda^2) \beta (\tilde{M} - T\tilde{S} - \Omega\tilde{J}).$$

For completeness, we also notice that the first law of thermodynamics is satisfied

$$dM = TdS - \omega dJ. \tag{3.26}$$

Once again, in order to display the role played by the gravitational soliton for computing the entropy, we construct the gravitational soliton and derive its mass. The soliton obtained from the static black hole configuration, eqs. (3.16)–(3.17) with $\omega = 0$, through a double Wick rotation reads

$$ds^2 = -r^2 h^2(r) dt^2 + \frac{h^2(r) dr^2}{r^2 f(r)} + r^2 f(r) h^2(r) d\varphi^2, \tag{3.27}$$

with

$$f(r) = 1 + (\mu - 1) \left[\frac{2}{(3 - \mu)r} \right]^3 - \mu \left[\frac{2}{(3 - \mu)r} \right]^2, \quad h(r) = \left[\lambda \sqrt{\frac{3(\mu - 1)}{(3(\mu - 1) - r\mu(3 - \mu))}} + 1 \right]^2.$$

For a Killing vector $\xi^t = (1, 0, 0)$, the surface term and the variation of the Noether potential read

$$\begin{aligned} \int_0^1 ds \Theta^r &= (1 - \lambda^2) \left[-\frac{8\mu^2 r}{9(3 - \mu)\kappa(\mu - 1)} + \frac{\mu^2(4\mu - 3)(\mu - 3)^4 r^4}{27(\mu - 1)^2(3(\mu - 1) + r\mu(\mu - 3))^2 \kappa} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(4\mu - 3)(\mu - 3)^2 r^2}{27(\mu - 1)^2 \kappa} - \frac{2\mu}{(3 - \mu)^2 \kappa} \right], \\ \Delta K^{rt}(\xi^t) &= (1 - \lambda^2) \left[\frac{8\mu^2 r}{9(3 - \mu)\kappa(\mu - 1)} - \frac{\mu^2(4\mu - 3)(\mu - 3)^4 r^4}{27(\mu - 1)^2(3(\mu - 1) + r\mu(\mu - 3))^2 \kappa} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(4\mu - 3)(\mu - 3)^2 r^2}{27(\mu - 1)^2 \kappa} \right], \end{aligned}$$

yielding to a mass of the soliton (1.2) given by

$$M_{\text{sol}} = -\frac{4\pi\mu(1 - \lambda^2)}{(3 - \mu)^2 \kappa}. \tag{3.28}$$

Finally, it is easy to check that the formula of the gravitational entropy (3.24) is correctly reproduced by means of the Cardy-like formula (2.4) using the conserved quantities (3.25) and the mass of the gravitational soliton (3.28).

3.3 Lovelock AdS black holes

In General Relativity, two of the main fundamental assumptions are the requirement of general covariance and the fact that the field equations for the metric are at most of second order. In three and four dimensions, these requirements automatically single out the gravity theory to be described by the Einstein-Hilbert action plus eventually a cosmological constant. However, for dimensions greater than four, a more general gravity theory, the so-called Lovelock theory, satisfies these standard requirements [35]. The D -dimensional Lovelock Lagrangian is a D -form constructed out of the vielbein, the spin connection and their exterior derivative and is given by

$$\sum_{p=0}^{[D/2]} \alpha_p \epsilon_{a_1 \dots a_D} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_D},$$

where $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega_c^a \omega^{cb}$ is the curvature two-form, the coefficients α_p are arbitrary dimensionful coupling constants and the wedge product between differential forms is understood. We recognize the first two terms of the Lovelock Lagrangian to be proportional to the cosmological constant and to the Einstein-Hilbert piece. Being D -dimensional forms, the Lovelock actions are automatically invariant under the local Lorentz transformations. In addition, in odd dimension, this Lorentz gauge symmetry can be enlarged for a particular choice of the coefficients α_p to a local (A)dS or Poincaré symmetry group; the resulting Lagrangians are called Chern-Simons, see e. g. [36] for a review on Chern-Simons theory. As shown in [37], the coefficients α_p can also be chosen such that the theory has a unique AdS vacuum with a fixed value of the cosmological constant. In doing so, one yields to a series of inequivalent actions indexed by an integer n with $1 \leq n \leq [(D-1)/2]$, and given by

$$S_n = -\frac{1}{2\kappa n(D-3)!} \int \sum_{p=0}^n \frac{C_p^n}{(D-2p)} \epsilon_{a_1 \dots a_D} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_D}, \quad (3.29)$$

or in tensorial form by

$$S_n = \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{-g} \left[R + \frac{(D-1)(D-2)}{n} + \frac{(n-1)}{2(D-3)(D-4)} L_{GB} + \frac{(n-1)(n-2)}{3!(D-3)(D-4)(D-5)(D-6)} L^{(3)} + \dots \right],$$

where $L_{GB} = R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ stands for the Gauss-Bonnet Lagrangian and $L^{(3)}$ is given by

$$L^{(3)} = R^3 - 12RR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + 16R_{\mu\nu}R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho} + 24R_{\mu\nu}R_{\rho\sigma}R^{\mu\rho\nu\sigma} + 3RR_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 24R_{\mu\nu}R^\mu{}_{\rho\sigma\kappa}R^{\nu\rho\sigma\kappa} + 4R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\eta\zeta}R^{\rho\sigma}{}_{\eta\zeta} - 8R_{\mu\rho\nu\sigma}R^\mu{}_\eta{}^\nu{}_\zeta R^{\rho\eta\sigma\zeta}.$$

Using differential forms, the field equations arising from the variation of the action (3.29) with respect to the vielbein and the spin connection read

$$\epsilon_{aa_2 \dots a_D} \bar{R}^{a_2 a_3} \dots \bar{R}^{a_{2n-1} a_{2n}} e^{a_{2n+1}} \dots e^{a_D} = 0, \quad (3.30a)$$

$$\epsilon_{aba_3 \dots a_D} \bar{R}^{a_3 a_4} \dots \bar{R}^{a_{2n-1} a_{2n}} T^{2n+1} e^{a_{2n+2}} \dots e^{a_D} = 0, \quad (3.30b)$$

where $\bar{R}^{ab} = R^{ab} + e^a e^b$ and T^a is the torsion 2-form $T^a = de^a + \omega_b^a e^b$. The spectrum of solutions of Lovelock and Chern-Simons gravity theories contain (topological) AdS black holes with interesting thermodynamical properties, see e.g. [37–42].

We now construct the spinning extension of the black hole solution of the field equations (3.30) found in [41] with planar base manifold. Its line element is given by

$$ds^2 = -N^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + R^2(r) (d\varphi + N^\varphi(r)dt)^2 + r^2 \sum_{i=1}^{D-3} dx_i^2, \quad (3.31)$$

with

$$\begin{aligned} N^2(r) &= r^2 F(r) (1 - \omega^2) (r^2 - F(r)\omega^2)^{-1}, & N^\varphi(r) &= \omega (r^2 - F(r)) (r^2 - F(r)\omega^2)^{-1}, \\ R^2(r) &= \frac{1}{(1 - \omega^2)} (r^2 - F(r)\omega^2), & F(r) &= r^2 \left(1 - \left(\frac{r_h}{r} \right)^{\frac{D-1}{n}} \right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Skipping the details, the entropy together with the Hawking temperature read

$$\mathcal{S} = \frac{2\pi r_h^{D-2} \text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{\kappa \sqrt{1 - \omega^2}}, \quad T = \frac{(D - 1)r_h \sqrt{1 - \omega^2}}{4\pi n}, \quad (3.33)$$

while the mass and angular momentum are given by

$$M = \left(\frac{D - 2 + \omega^2}{2\kappa} \right) \frac{\text{Vol}(\Sigma_{D-2}) r_h^{D-1}}{n(1 - \omega^2)}, \quad J = - \left(\frac{D - 1}{2\kappa} \right) \frac{\omega \text{Vol}(\Sigma_{D-2}) r_h^{D-1}}{n(1 - \omega^2)}, \quad (3.34)$$

and we easily check that the first law holds.

On the other hand, the corresponding soliton derived from the static black hole solution with a double analytic continuation is

$$ds^2 = -r^2 dt^2 + \frac{1}{r^2} \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 f(r) d\varphi^2 + r^2 \sum_{i=1}^{D-3} dx_i^2, \quad f(r) = 1 - \left[\frac{2n}{(D - 1)r} \right]^{\frac{D-1}{n}},$$

and the mass of the soliton is computed to be

$$M_{\text{sol}} = - \frac{\text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{\kappa(D - 1)} \left(\frac{2n}{D - 1} \right)^{D-2}. \quad (3.35)$$

Finally, the gravitational expression of the entropy (3.33) matches perfectly with the Cardy-like formula (2.4) with $d_{\text{eff}} = D - 2$ and with the conserved quantities (3.34)–(3.35). Notice that this matching is far from trivial and deserves a certain attention for the following reason. As said in the introduction, there exists higher-dimensional extension of the Cardy formula that applied for field theory having an AdS dual, the so-called Cardy-Verlinde formula [9]. Nevertheless, as stressed in [43], the Cardy-Verlinde formula fails in general for the Lovelock AdS black holes independently of the topology of the base manifold.

3.4 Hyperscaling violation black hole in D dimensions

Up to now, we have only considered cases where the violating exponent is vanishing, $\theta = 0$. Nevertheless, hyperscaling violation black holes are also known in the current literature, see e.g. [44–47]. It is conjectured that these solutions may have a certain interest in holographic contexts related to condensed matter physics, see e.g. [48] and [49]. For example, solutions with an hyperscaling violation exponent $\theta = D - 3$ can be useful to describe a dual theory with an $\mathcal{O}(N^2)$ Fermi surface (N being the number of degrees of freedom).

Hyperscaling violation black holes can also be an excellent set-up to test the robustness of the Cardy-like formula (2.4) since in this case the effective spatial dimension d_{eff} is not longer equal to $D - 2$ but will instead depend on the exponent θ . A toy model in order to achieve this task is given by the Einstein-Hilbert action with a self-interacting scalar field

$$S[g, \phi] = \int d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - U(\phi) \right], \quad (3.36)$$

whose field equations read

$$G_{\mu\nu} = \kappa \left[\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi + U \right) \right], \quad \square \phi = \frac{dU}{d\phi}. \quad (3.37)$$

Indeed, for a Liouville potential of the form

$$U(\phi) = -\frac{(D-2-\theta)(D-1-\theta)}{2\kappa} e^{\frac{\sqrt{4\kappa\theta}\phi}{\sqrt{(\theta-D+2)(D-2)}}}, \quad (3.38)$$

a static hyperscaling violation black hole was found in [50] with a generic value of the exponent θ , and whose effective spatial dimension is $d_{\text{eff}} = D - 2 - \theta$.

As done previously, we construct the spinning extension of the solution [50] that reads

$$ds^2 = \frac{1}{r^{\frac{2\theta}{D-2}}} \left[-N^2(r) dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + R^2(r) (d\varphi + N^\varphi(r) dt)^2 + r^2 \sum_{i=1}^{D-3} dx_i^2 \right], \quad (3.39)$$

where

$$\begin{aligned} N^2(r) &= r^2 (1 - \omega^2) F(r) (r^2 - F(r)\omega^2)^{-1}, & R^2(r) &= \frac{1}{1 - \omega^2} (r^2 - F(r)\omega^2), \\ N^\varphi(r) &= \omega \frac{(r^2 - F(r))}{(r^2 - \omega^2 F(r))}, & F(r) &= r^2 \left(1 - \left(\frac{r_h}{r} \right)^{D-1-\theta} \right), & \phi(r) &= \sqrt{\frac{\theta(\theta - D + 2)}{\kappa(D-2)}} \ln(r). \end{aligned}$$

Since the thermodynamics analysis is quite similar to the case of the scalar field with a super-renormalizable potential, we only sketch briefly the quantities of interest as the entropy and temperature of the solution

$$\mathcal{S} = \frac{2\pi \text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{\kappa \sqrt{1 - \omega^2}} r_h^{D-2-\theta}, \quad T = \frac{r_h (D-1-\theta) \sqrt{1 - \omega^2}}{4\pi}, \quad (3.40)$$

and hence the effective spatial dimensionality $d_{\text{eff}} = D - 2 - \theta$. The mass and angular momentum of the solution are given by

$$M = \frac{(\omega^2 + D - 2 - \theta) \text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{2\kappa (1 - \omega^2)} r_h^{D-1-\theta}, \quad J = -\frac{(D-1-\theta) \omega \text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{2\kappa (1 - \omega^2)} r_h^{D-1-\theta}. \quad (3.41)$$

On the other hand, the corresponding soliton is described by the following line element

$$ds^2 = \frac{1}{r^{\frac{2\theta}{D-2}}} \left[-r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + f(r) d\varphi^2 + r^2 \sum_{i=1}^{D-3} dx_i^2 \right], \quad (3.42)$$

with the metric function and the scalar field given by

$$f(r) = r^2 \left\{ 1 - \left[\frac{2}{(D-1-\theta)r} \right]^{D-1-\theta} \right\}, \quad \phi(r) = \sqrt{\frac{\theta(\theta-D+2)}{\kappa(D-2)}} \ln(r).$$

The mass of the soliton obtained through the quasilocal charge expression (1.2) reads

$$M_{\text{sol}} = -\frac{\text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{2\kappa} \left(\frac{2}{D-1-\theta} \right)^{D-1-\theta}, \quad (3.43)$$

and it is straightforward to check that the Cardy-like formula (2.4) with $d_{\text{eff}} = D - 2 - \theta$ fits perfectly with the gravitational entropy (3.40).

3.5 Hyperscaling violation black hole with higher-order gravity theory

As said before, the effective spatial dimensionality d_{eff} is not always equal to $D - 2 - \theta$ but may have a different expression depending on the theory considered. Nevertheless, in order to corroborate the Cardy-like formula with a different value of the effective dimension, we opt for a pure quadratic gravity theory defined by the action

$$\frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{-g} (\beta_1 R^2 + \beta_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}), \quad (3.44)$$

with field equations given by

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu} := & \beta_2 \square R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (4\beta_1 + \beta_2) g_{\mu\nu} \square R - (2\beta_1 + \beta_2) \nabla_\mu \nabla_\nu R + 2\beta_2 R_{\mu\alpha\nu\beta} R^{\alpha\beta} + 2\beta_1 R R_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2} (\beta_1 R^2 + \beta_2 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}) g_{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

After a straightforward computation, one can see that the field equations admit the line element (3.39) with $\theta = D - 1$ with the metric functions given by

$$\begin{aligned} N^2(r) &= r^2 (1 - \omega^2) F(r) (r^2 - F(r)\omega^2)^{-1}, & R^2(r) &= \frac{1}{1 - \omega^2} (r^2 - F(r)\omega^2), \\ N^\varphi(r) &= \omega \frac{(r^2 - F(r))}{(r^2 - \omega^2 F(r))}, & F(r) &= r^2 \left(1 - \left(\frac{r_h}{r} \right)^{\frac{2(D-1)}{D-2}} \right), \end{aligned}$$

and, where the coupling constants are tied as

$$\beta_1 = -\frac{(D+2)\beta_2}{5D-2}.$$

The entropy and temperature of the solution are given by

$$\mathcal{S} = \frac{16\pi \text{Vol}(\Sigma_{D-2}) (D-1)^2 \beta_2}{(5D-2)(D-2)\kappa\sqrt{1-\omega^2}} r_h^{\frac{D}{D-2}}, \quad T = \frac{(D-1)\sqrt{1-\omega^2} r_h}{2(D-2)\pi}, \quad (3.46)$$

which imply that the effective dimension is $d_{\text{eff}} = D/(D - 2)$. Without giving more details, we just report the usual quantities of interest

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{4 (D + \omega^2 (D - 2)) \beta_2 (D - 1)^2 \text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{(D - 2)^2 \kappa (5 D - 2) (1 - \omega^2)} r_h^{\frac{2(D-1)}{D-2}}, \\
 J &= -\frac{8 (D - 1)^3 \beta_2 \text{Vol}(\Sigma_{D-2}) \omega}{(D - 2)^2 \kappa (5 D - 2) (1 - \omega^2)} r_h^{\frac{2(D-1)}{D-2}}, \\
 M_{\text{sol}} &= -\frac{16 \text{Vol}(\Sigma_{D-2}) \beta_2}{(5 D - 2) \kappa} \left(\frac{D - 2}{4} \right)^{\frac{D}{D-2}} \left(\frac{4}{D - 1} \right)^{\frac{2}{D-2}}, \tag{3.47}
 \end{aligned}$$

and again, we constat the perfect matching between the gravitational entropy and the Cardy-like formula (2.4).

4 Testing the Cardy-like formula in the anisotropic case

We now consider the anisotropic case which corresponds to a dynamical exponent $z \neq 1$ with our convention. In the static case, the asymptotic metric of anisotropic (Lifshitz or hyperscaling violating) black holes can be described by the following line element

$$ds^2 = \frac{1}{r^{\frac{2\theta}{D-2}}} \left[-r^{2z} dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + r^2 \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2 \right], \tag{4.1}$$

where now $z \neq 1$ is responsible of the anisotropy between the time and the space coordinates.

In spite of the fact that the Cardy-like formula (2.4) is also appropriate with $z \neq 1$, stationary anisotropic black hole solutions are not known in the literature. Moreover, unlike the isotropic case, the Lorentz boosts are not longer symmetries for spacetimes with $z \neq 1$, and hence the usual trick of performing a Lorentz boost to the static solution may yield to a metric with a rather obscure causal structure. These are the reasons for which we will first concentrate on static anisotropic black holes ($J = 0$) in order to test the consistency of the formulas (2.4)–(2.5). Nevertheless, in the last subsection, we will observe the effect on turning on the momentum of a static Lifshitz black hole by the usual Lorentz transformation. Making abstraction of the causal structure, we will compute the mass and angular momentum of the resulting metric and see explicitly that the Cardy-like formula with $J \neq 0$ is still consistent with the gravitational entropy.

4.1 Lifshitz black holes with higher-order gravity theories

We now deal with a gravity action in arbitrary dimension D with quadratic-curvature corrections given by

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{-g} \left(R - 2\Lambda + \beta_1 R^2 + \beta_2 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \beta_3 R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} \right). \tag{4.2}$$

The corresponding field equations read

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + (\beta_2 + 4\beta_3) \square R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (4\beta_1 + \beta_2) g_{\mu\nu} \square R - (2\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3) \nabla_\mu \nabla_\nu R \\
 + 2\beta_3 R_{\mu\gamma\alpha\beta} R_\nu^{\gamma\alpha\beta} + 2(\beta_2 + 2\beta_3) R_{\mu\alpha\nu\beta} R^{\alpha\beta} - 4\beta_3 R_{\mu\alpha} R_\nu^\alpha + 2\beta_1 R R_{\mu\nu} \\
 - \frac{1}{2} \left(\beta_1 R^2 + \beta_2 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \beta_3 R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \right) g_{\mu\nu} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

In refs. [51, 52], three families of Lifshitz black hole solutions were found. In the present case, we are only interested on the family for which the dynamical exponent $z > -(D-2)$ and described by the following line element²

$$ds^2 = -r^{2z} \left[1 - \left(\frac{r_h}{r} \right)^{\frac{z+D-2}{2}} \right] dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 \left[1 - \left(\frac{r_h}{r} \right)^{\frac{z+D-2}{2}} \right]} + r^2 \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2.
 \tag{4.4}$$

The coupling constants ensuring the existence of this solution can be found in [51, 52]. For this family of solution, the entropy and temperature are

$$\mathcal{S} = -\frac{2\pi \text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{\kappa} Q(z) r_h^{D-2},
 \tag{4.5}$$

$$T = \frac{(z+D-2)(r_h)^z}{8\pi},
 \tag{4.6}$$

with

$$Q(z) = \frac{(3z^2 + (D-2)(D+2))(D-2+3z)(D+2-3z)}{27z^4 - 4(27D-45)z^3 - (D-2)[2(5D-116)z^2 + 4(D^2-D+30)z + (D+2)(D-2)^2]}.
 \tag{4.7}$$

Since the field equations are of higher order, we find more convenient to adopt the quasilocal formalism in order to compute the mass. This will correspond to the charge Q defined in (1.2) with a Killing vector field $\xi^t = \partial_t$. In the present case, the tensor $P^{\alpha\beta\gamma\delta}$ appearing in the charge formula (1.2) is given by

$$\begin{aligned}
 P^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{4\kappa} \left(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} \right) + \frac{\beta_1}{2\kappa} R \left(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} \right) \\
 + \frac{\beta_2}{4\kappa} \left(g^{\beta\delta} R^{\alpha\gamma} - g^{\beta\gamma} R^{\alpha\delta} - g^{\alpha\delta} R^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} R^{\beta\delta} \right) + \frac{\beta_3}{\kappa} R^{\alpha\beta\gamma\delta}.
 \end{aligned}$$

After a tedious but straightforward computation, one obtains the expression of the mass

$$M = -\frac{(D-2) \text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{4\kappa} Q(z) r_h^{z+D-2}.
 \tag{4.8}$$

As usual, the corresponding static soliton is

$$\begin{aligned}
 ds^2 = -r^2 dt^2 + \frac{1}{r^2} \frac{dr^2}{f(r)} + r^{2z} f(r) d\varphi^2 + r^2 \sum_{i=1}^{D-3} dx_i^2, \\
 f(r) = 1 - \left[\frac{4}{(z+D-2)} \right]^{\frac{z+D-2}{2z}} \frac{1}{r^{\frac{z+D-2}{2}}},
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

²The two remaining Lifshitz black hole solutions have a zero entropy.

and its mass is computed to be

$$M_{\text{sol}} = z \text{Vol}(\Sigma_{D-2}) \left[\frac{4}{(z+D-2)} \right]^{\frac{z+D-2}{z}} \frac{Q(z)}{4\kappa}. \quad (4.10)$$

It is interesting to note again that the expression of the entropy (4.5) coincides with the Cardy-like formula with $d_{\text{eff}} = D-2$, $J = 0$ and for any value of the dynamical exponent z .

4.2 Charged anisotropic black holes with two Abelian gauge fields

In this subsection, we would like to check the charged version of the Cardy-like formula (2.5) in the anisotropic and static situation, $z \neq 1$ and $J = 0$. In order to achieve this task, one considers the case of Einstein gravity with two abelian fields $A_{(i)}$ and a dilaton ϕ with action

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{-g} \left(R - 2\Lambda - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i \phi} \mathcal{F}_{(i)}^2 \right), \quad (4.11)$$

with $\mathcal{F}_{(i)}^2 = F_{(i)\mu\nu} F_{(i)}^{\mu\nu}$ for $i = 1, 2$. For the following ansatz

$$ds^2 = -r^{2z} F(r) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 F(r)} + r^2 \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2, \quad (4.12)$$

$$A_{(i)\mu} dx^\mu = A_{(i)t} dt, \quad \phi = \phi(r),$$

a solution was found in [53]

$$F(r) = 1 - m \left(\frac{r_h}{r} \right)^{z+D-2} + (m-1) \left(\frac{r_h}{r} \right)^{2(z+D-3)}, \quad (4.13a)$$

$$A_{(1)t} = \sqrt{\frac{2(z-1)}{z+D-2}} \mu^{-\frac{\lambda_1}{2}} (r^{z+D-2} - r_h^{z+D-2}), \quad (4.13b)$$

$$A_{(2)t} = -\sqrt{\frac{2(m-1)(D-2)}{z+D-4}} \mu^{-\frac{\lambda_2}{2}} r_h^{z+D-3} (r^{-(z+D-4)} - r_h^{-(z+D-4)}), \quad (4.13c)$$

$$e^\phi = \mu r \sqrt{2(D-2)(z-1)}, \quad \lambda_1 = -\sqrt{\frac{2(D-2)}{z-1}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{2(z-1)}{D-2}}, \quad (4.13d)$$

where m, μ are integration constants, and r_h stands for the location of the horizon. Note that this presentation (4.13) is equivalent to the one considered in [53], after some redefinitions of the constants. We stick to (4.13) for latter convenience. With our notation, the Wald entropy and Hawking temperature read

$$\mathcal{S} = \frac{2\pi}{\kappa} r_h^{D-2} \text{Vol}(\Sigma_{D-2}), \quad (4.14)$$

$$T = \frac{[(z+D-4)(2-m)+2]}{4\pi} r_h^z,$$

while the mass, electric potential and electric charge are

$$M = \frac{(D-2)m}{2\kappa} r_h^{z+D-2} \text{Vol}(\Sigma_{D-2}), \quad \Phi_e = \sqrt{\frac{2(D-2)(m-1)}{z+D-4}} \mu^{-\frac{\lambda_2}{2}} r_h,$$

$$Q_e = \frac{\sqrt{2(D-2)(m-1)(z+D-4)} \mu^{\frac{\lambda_2}{2}}}{2\kappa} r_h^{z+D-3} \text{Vol}(\Sigma_{D-2}).$$

It remains to derive the soliton counterpart from the uncharged black hole solution which corresponds to the limit $m \rightarrow 1$. The double Wick rotation takes the following form

$$ds^2 = -r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 f(r)} + r^{2z} f(r) d\varphi^2 + r^2 \sum_{i=1}^{D-3} dx_i^2, \quad (4.15)$$

$$f(r) = 1 - \left(\frac{\tilde{r}_h}{r}\right)^{z+D-2},$$

where we have defined

$$\tilde{r}_h = \left(\frac{2}{z+D-2}\right)^{\frac{1}{z}}.$$

Using (1.3), the variation of the Noether potential and the surface term read

$$\Delta K^{rt} = -\frac{\tilde{r}_h^{z+D-2}}{\kappa}, \quad \int_0^1 ds \Theta^r = -\frac{z-2}{2\kappa} \tilde{r}_h^{z+D-2},$$

and then the mass of the soliton is

$$M_{\text{sol}} = -\frac{z \text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{2\kappa} \left(\frac{2}{z+D-2}\right)^{\frac{z+D-2}{z}}. \quad (4.16)$$

It is now straightforward to check that the formula (2.5) matches perfectly with the Wald entropy (4.14).

4.3 Turning on the angular momentum

We now turn on the angular momentum of the solution discussed in section 4.1 by operating a standard Lorentz transformation

$$t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}}(t + \omega \varphi), \quad \varphi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}}(\varphi + \omega t).$$

The resulting metric reads

$$ds^2 = -N^2(r) dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + R^2(r) (d\varphi + N^\varphi(r) dt)^2 + r^2 \sum_{i=1}^{D-3} dx_i^2, \quad (4.17)$$

where

$$\begin{aligned} N^2(r) &= r^{2(z+1)} H(r) (1-\omega^2) [r^2 - r^{2z} H(r) \omega^2]^{-1}, \\ R^2(r) &= \frac{1}{(1-\omega^2)} [r^2 - r^{2z} H(r) \omega^2], & F(r) &= r^2 H(r), \\ N^\varphi(r) &= \omega [r^2 - r^{2z} H(r)] [r^2 - r^{2z} H(r) \omega^2]^{-1}, & H(r) &= \left[1 - \left(\frac{r_h}{r}\right)^{\frac{z+D-2}{2}}\right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

As already mentioned, the resulting metric may suffer some pathology essentially due to the fact that the combination $r^2 - r^{2z} H(r) \omega^2$ is not ensured to be positive for any value

of $r > 0$ as it is the case in the isotropic situation $z = 1$. Nevertheless, making abstraction of this problem, one can still compute the entropy and temperature of the solution

$$\mathcal{S} = -\frac{2\pi \text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{\kappa\sqrt{1-\omega^2}} Q(z) r_h^{D-2}, \tag{4.19}$$

$$T = \frac{(z+D-2)\sqrt{1-\omega^2}r_h^z}{8\pi}, \tag{4.20}$$

where $Q(z)$ is defined in (4.7). One of the advantage of the quasilocal formalism [27, 28] is precisely to overcome the difficulty at infinity by introducing a one-parameter and by integrating in the interior region and not at infinity. Since the asymptotic form of the resulting metric (4.17)–(4.18) is not clear, the quasilocal formalism seems to be very-well appropriated to circumvent this problem. In doing so, one can compute the mass and the angular momentum

$$M = -\frac{(D-2+z\omega^2)\text{Vol}(\Sigma_{D-2})}{4\kappa(1-\omega^2)} Q(z) r_h^{z+D-2}, \tag{4.21}$$

$$J = \frac{(z+D-2)\text{Vol}(\Sigma_{D-2})\omega}{4\kappa(1-\omega^2)} Q(z) r_h^{z+D-2}. \tag{4.22}$$

Finally, it is somehow appealing that the Cardy-like formula (2.4) with the angular momentum turning on still reproduces the correct value of the gravitational entropy.

5 Summary and concluding remarks

Here, we have considered rotating (an)isotropic black holes in arbitrary dimension with a planar horizon which are obtained from static configurations through a Lorentz transformation. The aim of this paper is to show that the spinning black hole entropy can be obtained from the microcanonical degeneracy of states according to a Cardy-like formula making no reference to any central charge but instead involving the mass of the ground state. The ground state is in fact identified with a gravitational bulk soliton. Hence, one of our working hypothesis in order to reproduce the semiclassical black hole entropy is the existence of a soliton. From a technical perspective, the soliton, in all the examples we have treated, is obtained from the static black hole by a double analytic continuation followed by a suitable rescaling that permits to absorb the constant of integration. This procedure is quite similar to the one that yields the AdS soliton [19]. In doing so, the resulting solitonic solution turns to be smooth, regular and devoid of any constant of integration fulfilling what the ground state is expected to be. However, there exist black hole solutions for which the double Wick rotation does not apply for different reasons. For example, this can occur for black holes for which the topology of the event horizon presents an anisotropic scaling symmetry. Such examples have been known much before the advent of Lifshitz spacetimes [54]. In this reference, two families of static black holes solutions of Einstein equations in five dimensions with a negative cosmological constant were constructed, and the horizon topologies of these solutions are modeled by the Solv 3–geometry and the Nil 3–geometry. These geometries are two of the eight geometries of the Thurston classification. The Solv (resp. the Nil) solution is asymptotically AdS (resp. Lifshitz with $z = 3/2$)

but both solution enjoys an anisotropy along one of the coordinates of the event horizon responsible of the violation of the hyperscaling property. On one hand, a simple calculation shows that the Cardy-Verlinde formula [9] for the Solv solution does not yield the correct temperature dependence. On the other hand, while the Solv solution fits perfectly our assumptions, some complications have emerged concerning the Nil solution, in particular to construct the corresponding soliton. An interesting task will consist in understanding what would be the soliton configuration for the Nil solution or how to construct it (even numerically). One can go further extending the analysis done in this paper to the many examples of black holes with Thurston horizon topology.

Another aspect that may deserve some attention in the future has to do with the Smarr formulas. These latter are relations expressing the mass as a simple bilinear form involving the other conserved charges and the thermodynamical quantities [55]. Smarr relations can also be viewed as the integral forms of the first law of thermodynamics. For example, in all the cases studied in this paper, the solutions satisfy a Smarr relation given generically by

$$M = \left(\frac{d_{\text{eff}}}{d_{\text{eff}} + z} \right) TS + \Omega J.$$

In the case of asymptotically AdS black holes, extended versions of the first law and of the Smarr formula have been obtained where the cosmological constant is considered as a thermodynamic variable, see e.g. [56, 57]. In this perspective, the mass of the AdS black hole may be understood as the enthalpy of spacetime while the cosmological constant plays the role of a pressure term in the first law. Recently, these ideas have been shown to hold also for Lifshitz black holes [58]. Since Smarr and Cardy formulas are intimately linked, it will be interesting to identify the physical implications on the Cardy-like formulas of viewing the mass as enthalpy.

Finally, we expect that the survey operating in this paper, apart from confirming the validity of the Cardy-like formulas, will be of relevance in order to clarify some issues concerning the field theory side.

Acknowledgments

We thank Eloy Ayón-Beato for useful discussions. This work has been partially supported by grant 1130423 from FONDECYT. MB is supported by “Plan de Mejoramiento Institucional” UCM1310, MINEDUC, Chile.

Open Access. This article is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License ([CC-BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)), which permits any use, distribution and reproduction in any medium, provided the original author(s) and source are credited.

References

- [1] J.D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2333 [[INSPIRE](#)].
- [2] S.W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199 [*Erratum ibid.* **46** (1976) 206] [[INSPIRE](#)].

- [3] J.D. Brown and M. Henneaux, *Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity*, *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 207 [[INSPIRE](#)].
- [4] J.L. Cardy, *Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories*, *Nucl. Phys. B* **270** (1986) 186 [[INSPIRE](#)].
- [5] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *The Black hole in three-dimensional space-time*, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849 [[hep-th/9204099](#)] [[INSPIRE](#)].
- [6] A. Strominger, *Black hole entropy from near horizon microstates*, *JHEP* **02** (1998) 009 [[hep-th/9712251](#)] [[INSPIRE](#)].
- [7] M. Guica, T. Hartman, W. Song and A. Strominger, *The Kerr/CFT Correspondence*, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 124008 [[arXiv:0809.4266](#)] [[INSPIRE](#)].
- [8] T. Azeyanagi, G. Compere, N. Ogawa, Y. Tachikawa and S. Terashima, *Higher-Derivative Corrections to the Asymptotic Virasoro Symmetry of 4d Extremal Black Holes*, *Prog. Theor. Phys.* **122** (2009) 355 [[arXiv:0903.4176](#)] [[INSPIRE](#)].
- [9] E.P. Verlinde, *On the holographic principle in a radiation dominated universe*, [hep-th/0008140](#) [[INSPIRE](#)].
- [10] S. Detournay, L.-A. Douxchamps, G.S. Ng and C. Zwickel, *Warped AdS₃ black holes in higher derivative gravity theories*, *JHEP* **06** (2016) 014 [[arXiv:1602.09089](#)] [[INSPIRE](#)].
- [11] H.A. Gonzalez, D. Tempo and R. Troncoso, *Field theories with anisotropic scaling in 2D, solitons and the microscopic entropy of asymptotically Lifshitz black holes*, *JHEP* **11** (2011) 066 [[arXiv:1107.3647](#)] [[INSPIRE](#)].
- [12] E. Shaghoulian, *A Cardy formula for holographic hyperscaling-violating theories*, *JHEP* **11** (2015) 081 [[arXiv:1504.02094](#)] [[INSPIRE](#)].
- [13] M. Bravo-Gaete, S. Gomez and M. Hassaine, *Towards the Cardy formula for hyperscaling violation black holes*, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 124038 [[arXiv:1505.00702](#)] [[INSPIRE](#)].
- [14] M. Bravo-Gaete, S. Gomez and M. Hassaine, *Cardy formula for charged black holes with anisotropic scaling*, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 124002 [[arXiv:1510.04084](#)] [[INSPIRE](#)].
- [15] S. Kachru, X. Liu and M. Mulligan, *Gravity duals of Lifshitz-like fixed points*, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 106005 [[arXiv:0808.1725](#)] [[INSPIRE](#)].
- [16] F. Correa, C. Martinez and R. Troncoso, *Scalar solitons and the microscopic entropy of hairy black holes in three dimensions*, *JHEP* **01** (2011) 034 [[arXiv:1010.1259](#)] [[INSPIRE](#)].
- [17] F. Correa, C. Martinez and R. Troncoso, *Hairy Black Hole Entropy and the Role of Solitons in Three Dimensions*, *JHEP* **02** (2012) 136 [[arXiv:1112.6198](#)] [[INSPIRE](#)].
- [18] F. Correa, A. Faúndez and C. Martínez, *Rotating hairy black hole and its microscopic entropy in three spacetime dimensions*, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 027502 [[arXiv:1211.4878](#)] [[INSPIRE](#)].
- [19] G.T. Horowitz and R.C. Myers, *The AdS/CFT correspondence and a new positive energy conjecture for general relativity*, *Phys. Rev. D* **59** (1998) 026005 [[hep-th/9808079](#)] [[INSPIRE](#)].
- [20] E. Ayón-Beato, M. Bravo-Gaete, F. Correa, M. Hassaine, M.M. Juárez-Aubry and J. Oliva, *First law and anisotropic Cardy formula for three-dimensional Lifshitz black holes*, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 064006 [[arXiv:1501.01244](#)] [[INSPIRE](#)].

- [21] E. Shaghoulian, *Black hole microstates in AdS*, *Phys. Rev. D* **94** (2016) 104044 [[arXiv:1512.06855](#)] [[INSPIRE](#)].
- [22] L.F. Abbott and S. Deser, *Stability of Gravity with a Cosmological Constant*, *Nucl. Phys. B* **195** (1982) 76 [[INSPIRE](#)].
- [23] L.F. Abbott and S. Deser, *Charge Definition in Nonabelian Gauge Theories*, *Phys. Lett. B* **116** (1982) 259 [[INSPIRE](#)].
- [24] S. Deser and B. Tekin, *Gravitational energy in quadratic curvature gravities*, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 101101 [[hep-th/0205318](#)] [[INSPIRE](#)].
- [25] S. Deser and B. Tekin, *Energy in generic higher curvature gravity theories*, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 084009 [[hep-th/0212292](#)] [[INSPIRE](#)].
- [26] C. Senturk, T.C. Sisman and B. Tekin, *Energy and Angular Momentum in Generic F (Riemann) Theories*, *Phys. Rev. D* **86** (2012) 124030 [[arXiv:1209.2056](#)] [[INSPIRE](#)].
- [27] W. Kim, S. Kulkarni and S.-H. Yi, *Quasilocal Conserved Charges in a Covariant Theory of Gravity*, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 081101 [Erratum *ibid.* **112** (2014) 079902] [[arXiv:1306.2138](#)] [[INSPIRE](#)].
- [28] Y. Gim, W. Kim and S.-H. Yi, *The first law of thermodynamics in Lifshitz black holes revisited*, *JHEP* **07** (2014) 002 [[arXiv:1403.4704](#)] [[INSPIRE](#)].
- [29] J.P.S. Lemos, *Cylindrical black hole in general relativity*, *Phys. Lett. B* **353** (1995) 46 [[gr-qc/9404041](#)] [[INSPIRE](#)].
- [30] A.M. Awad, *Higher dimensional charged rotating solutions in (A)dS space-times*, *Class. Quant. Grav.* **20** (2003) 2827 [[hep-th/0209238](#)] [[INSPIRE](#)].
- [31] C. Martinez, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Charged rotating black hole in three space-time dimensions*, *Phys. Rev. D* **61** (2000) 104013 [[hep-th/9912259](#)] [[INSPIRE](#)].
- [32] E. Ayón-Beato, M. Hassaine and J.A. Méndez-Zavaleta, *(Super-)renormalizably dressed black holes*, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 024048 [[arXiv:1506.02277](#)] [[INSPIRE](#)].
- [33] C. Martinez and J. Zanelli, *Conformally dressed black hole in (2 + 1)-dimensions*, *Phys. Rev. D* **54** (1996) 3830 [[gr-qc/9604021](#)] [[INSPIRE](#)].
- [34] M. Henneaux, C. Martinez, R. Troncoso and J. Zanelli, *Black holes and asymptotics of 2 + 1 gravity coupled to a scalar field*, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 104007 [[hep-th/0201170](#)] [[INSPIRE](#)].
- [35] D. Lovelock, *The Einstein tensor and its generalizations*, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 498 [[INSPIRE](#)].
- [36] M. Hassaine and J. Zanelli, *Chern-Simons (super)gravity*, World Scientific, Singapore (2016).
- [37] J. Crisostomo, R. Troncoso and J. Zanelli, *Black hole scan*, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 084013 [[hep-th/0003271](#)] [[INSPIRE](#)].
- [38] D.G. Boulware and S. Deser, *String Generated Gravity Models*, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 2656 [[INSPIRE](#)].
- [39] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Dimensionally continued black holes*, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 975 [[gr-qc/9307033](#)] [[INSPIRE](#)].
- [40] R.-G. Cai and K.-S. Soh, *Topological black holes in the dimensionally continued gravity*, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 044013 [[gr-qc/9808067](#)] [[INSPIRE](#)].

- [41] R. Aros, R. Troncoso and J. Zanelli, *Black holes with topologically nontrivial AdS asymptotics*, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 084015 [[hep-th/0011097](#)] [[INSPIRE](#)].
- [42] R.-G. Cai, *Gauss-Bonnet black holes in AdS spaces*, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 084014 [[hep-th/0109133](#)] [[INSPIRE](#)].
- [43] R.-G. Cai, *The Cardy-Verlinde formula and AdS black holes*, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 124018 [[hep-th/0102113](#)] [[INSPIRE](#)].
- [44] M. Cadoni and M. Serra, *Hyperscaling violation for scalar black branes in arbitrary dimensions*, *JHEP* **11** (2012) 136 [[arXiv:1209.4484](#)] [[INSPIRE](#)].
- [45] M. Alishahiha, E. O Colgain and H. Yavartanoo, *Charged Black Branes with Hyperscaling Violating Factor*, *JHEP* **11** (2012) 137 [[arXiv:1209.3946](#)] [[INSPIRE](#)].
- [46] P. Bueno, W. Chemissany, P. Meessen, T. Ortín and C.S. Shahbazi, *Lifshitz-like Solutions with Hyperscaling Violation in Ungauged Supergravity*, *JHEP* **01** (2013) 189 [[arXiv:1209.4047](#)] [[INSPIRE](#)].
- [47] M. Hassaine, *New black holes of vacuum Einstein equations with hyperscaling violation and Nil geometry horizons*, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 084054 [[arXiv:1503.01716](#)] [[INSPIRE](#)].
- [48] X. Dong, S. Harrison, S. Kachru, G. Torroba and H. Wang, *Aspects of holography for theories with hyperscaling violation*, *JHEP* **06** (2012) 041 [[arXiv:1201.1905](#)] [[INSPIRE](#)].
- [49] M. Alishahiha and H. Yavartanoo, *On Holography with Hyperscaling Violation*, *JHEP* **11** (2012) 034 [[arXiv:1208.6197](#)] [[INSPIRE](#)].
- [50] E. Perlmutter, *Hyperscaling violation from supergravity*, *JHEP* **06** (2012) 165 [[arXiv:1205.0242](#)] [[INSPIRE](#)].
- [51] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet and M. Hassaine, *Lifshitz Black Hole in Three Dimensions*, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 104029 [[arXiv:0909.1347](#)] [[INSPIRE](#)].
- [52] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet and M. Hassaine, *Analytic Lifshitz black holes in higher dimensions*, *JHEP* **04** (2010) 030 [[arXiv:1001.2361](#)] [[INSPIRE](#)].
- [53] J. Tarrio and S. Vandoren, *Black holes and black branes in Lifshitz spacetimes*, *JHEP* **09** (2011) 017 [[arXiv:1105.6335](#)] [[INSPIRE](#)].
- [54] C. Cadeau and E. Woolgar, *New five-dimensional black holes classified by horizon geometry and a Bianchi VI brane world*, *Class. Quant. Grav.* **18** (2001) 527 [[gr-qc/0011029](#)] [[INSPIRE](#)].
- [55] L. Smarr, *Mass formula for Kerr black holes*, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 71 [*Erratum ibid.* **30** (1973) 521] [[INSPIRE](#)].
- [56] M.M. Caldarelli, G. Cognola and D. Klemm, *Thermodynamics of Kerr-Newman-AdS black holes and conformal field theories*, *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 399 [[hep-th/9908022](#)] [[INSPIRE](#)].
- [57] D. Kastor, S. Ray and J. Traschen, *Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes*, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 195011 [[arXiv:0904.2765](#)] [[INSPIRE](#)].
- [58] W.G. Brenna, R.B. Mann and M. Park, *Mass and Thermodynamic Volume in Lifshitz Spacetimes*, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 044015 [[arXiv:1505.06331](#)] [[INSPIRE](#)].

Capítulo 5

Extensiones Gravitatorias de la Relatividad General

Hasta ahora hemos presentado distintos resultados que se enmarcan dentro de la interacción de la Relatividad General de Einstein (incluyendo un término cosmológico) con distintos campos de materia. Si bien la Relatividad General ha sido una teoría muy fructífera, la falta de una descripción cuántica de la gravedad es motivación suficiente para buscar nuevos escenarios. Dentro de las numerosas posibilidades, las teorías gravitatorias de orden superior en la curvatura han recibido cierta atención. Por un *invariante gravitatorio de orden n* entendemos un escalar construido únicamente con el producto de n tensores de Riemann y sus posibles contracciones con la métrica $g_{\mu\nu}$. Decimos que una teoría gravitatoria es de orden n en la curvatura si su densidad lagrangiana \mathcal{L} está construida únicamente con invariantes gravitatorios, de modo que n sea el máximo entre todos los órdenes de los invariantes que constituyen a \mathcal{L} .

Por mencionar algunos ejemplos importantes en la literatura, a fines de la última década se presenta una teoría cuadrática (de orden 2) en $D = 3$, que actualmente conocemos por *BHT Massive Gravity* o *New Massive Gravity* (en adelante, NMG) [108], descritas por la acción

$$S[g_{\mu\nu}] = \int d^3x \sqrt{-g} \left[R + \frac{1}{m^2} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{3}{8} R^2 \right) \right]. \quad (5.1)$$

Las ecuaciones de movimiento son de cuarto orden, no obstante su traza es una ecuación diferencial de segundo orden. Además, la linealización de NMG sobre el espacio plano reproduce las ecuaciones de Fierz-Pauli para una partícula masiva de *spin* 2 [109]. También han recibido cierta atención las llamadas *$f(R)$ -Theories*, construidas solamente con el escalar de Ricci R y funciones de él (para un review, ver [110]).

Este capítulo está dedicado a la presentación de dos teorías gravitatorias de orden superior que han sido vastamente investigadas en la literatura, y para ello, en la sección 5.1 revisaremos los aspectos fundamentales la *Gravedad de Lovelock*, una teoría que puede ver como una generalización natural de la Relatividad de Einstein. En la siguiente sección 5.2 presentaremos las *Gravedades Cuasitopológicas*: cuál es su origen, y por qué son interesantes desde el contexto de la correspondencia holográfica. Finalmente, se presentan los resultados del artículo [3].

5.1. Gravedad de Lovelock

Propuesta por Lanczos en dimensión cinco [111] y luego generalizada para dimensión arbitraria D en 1970 [27], la teoría de Lovelock (o Lanczos-Lovelock) se puede entender como una generalización natural

de la teoría de Einstein. Para un espaciotiempo de dimension D , la teoría de Lovelock se puede describir a través del lagrangiano

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D}{2} \rfloor} \alpha_k \mathcal{L}_k \quad (5.2)$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x , α_k son constantes de acoplamiento, $\mathcal{L}_0 \equiv 1$ y en general

$$\mathcal{L}_k = \frac{1}{2^k} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_k \beta_k}^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_k \nu_k} \prod_{i=1}^k R^{\alpha_i \beta_i}_{\mu_i \nu_i}, \quad (5.3)$$

donde $\delta_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_n}$ es una notación para la Delta de Kronecker generalizada:

$$\delta_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_n} = \det \begin{vmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \delta_{j_2}^{i_1} & \dots & \delta_{j_n}^{i_1} \\ \delta_{j_1}^{i_2} & \delta_{j_2}^{i_2} & \dots & \delta_{j_n}^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_n} & \delta_{j_2}^{i_n} & \dots & \delta_{j_n}^{i_n} \end{vmatrix}. \quad (5.4)$$

Los primeros términos de la familia de Lovelock son:

$$\mathcal{L}_0 \equiv 1 \quad (5.5)$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\beta}^{\mu} \delta_{\alpha}^{\nu} \right) R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(R^{\mu\nu}_{\mu\nu} - R^{\nu\mu}_{\mu\nu} \right) = R, \quad (5.6)$$

$$\mathcal{L}_2 = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = & R^3 - 12R_a^b R_b^a R + 16R_a^b R_b^c R_c^a + 24R_{abcd}R^{ac}R^{bd} + 3R_{abcd}R^{abcd}R \\ & - 24R_{abcd}R^{abc}R^{de} - 8R_a^c R_b^d R_c^e R_e^f R_f^a R^b + 4R_{ab}^{cd} R_{cd}^{ef} R_{ef}^{ab}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

En su trabajo, Lovelock muestra que las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a (5.2) son de la forma $\mathcal{E}^{\mu\nu} = 0$, donde $\mathcal{E}^{\mu\nu}$ es un (2,0)-tensor que satisface las siguientes propiedades:

- i. $\mathcal{E}^{\mu\nu}$ es un tensor simétrico, $\mathcal{E}^{\mu\nu} = \mathcal{E}^{\nu\mu}$.
- ii. $\mathcal{E}^{\mu\nu}$ es una función de $g^{\mu\nu}$ y de sus dos primeras derivadas.
- iii. El tensor $\mathcal{E}^{\mu\nu}$ tiene divergencia nula, es decir, satisface $\nabla_{\nu} \mathcal{E}^{\mu\nu} = 0$.
- iv. En $D = 4$, $\mathcal{E}^{\mu\nu}$ está únicamente determinado por $\alpha_0 g^{\mu\nu} + \alpha_1 G^{\mu\nu}$, que son exactamente las ecuaciones de movimiento de la teoría de Einstein con una constante cosmológica.

Además, tres observaciones que surgen de la construcción de Lovelock son las siguientes:

- v. Para cada dimensión D , existe una cantidad finita de términos no nulos dentro de la familia \mathcal{L}_k . Esto se puede apreciar a partir de la definición de \mathcal{L}_k , ya que si D satisface la relación $D < n$, entonces el determinante de la delta de Kronecker generalizada (5.4) se anula, pues estaremos calculando el determinante de una matriz que tiene al menos dos filas (o columnas) idénticas. Para el caso específico de la construcción de Lovelock, (5.3) tenemos que todos los términos \mathcal{L}_k tales que $2k > D$ son nulos.

- vi. En el caso de dimensión par, $D = 2m$, el término \mathcal{L}_m presente en el lagrangiano de Lovelock resulta ser la densidad de Euler χ_{2m} . Esta observación trae como consecuencia que para $D = 2m$, en la acción

$$S = \int d^{2m}x \sqrt{-g} \sum_{k=0}^m \alpha_k \mathcal{L}_k$$

el término \mathcal{L}_m es en realidad un término de frontera, y por lo tanto, no afectará en las ecuaciones de movimiento. Es gracias a esta característica que usualmente la literatura se refiere a los términos \mathcal{L}_k como la continuación dimensional de la densidad de Euler.

vii.

Teorema 1. ([27, 112]) La teoría de Lovelock es la teoría puramente gravitatoria más general que satisface las siguientes hipótesis:

- a) Está construida únicamente usando (combinaciones lineales de) términos invariantes bajo el grupo de Lorentz.
- b) No incluye términos de torsión ni productos exteriores provenientes del dual de Hodge.
- c) Las ecuaciones de movimiento son ecuaciones que dependen de la métrica y a lo más de sus dos primeras derivadas.

Adicionalmente, en dimensiones impares la teoría de Lovelock admite extensiones localmente supersimétricas, llamadas *Teorías de Chern-Simons*. En estas teorías, la supersimetría es una simetría *off-shell* de la acción [113].

Como mencionamos, la teoría de Lovelock ha sido muy explorada en la literatura. Por ejemplo, algunas características generales de la teoría de Lovelock están en [114–117]. Como mencionamos, en cinco dimensiones se puede incluir el término cuadrático, llamado comúnmente como término de Gauss-Bonnet. Algunas de sus soluciones, y propiedades relativas a la holografía están en [118–126]. Soluciones generales pueden ser revisadas en los artículos [96, 127–132], y para otras soluciones dentro de la familia de Lovelock que no involucran a la Relatividad General, se pueden revisar los artículos [133–135].

5.2. Gravedades Cuasitopológicas

Como ya hemos mencionado, la teoría de Lovelock es una construcción completamente general: las ecuaciones de movimiento que se obtienen son siempre de segundo orden, independiente de cuál sea la variedad de base que nos interese estudiar. Una pregunta interesante es estudiar el siguiente problema: si fijamos la variedad de base y deseamos construir una teoría puramente gravitatoria que satisfaga las mismas hipótesis que el teorema anterior, ¿es la teoría de Lovelock la única solución?. En dimensión 4, la respuesta es afirmativa, y la única teoría corresponde a la de Einstein-Hilbert con una constante cosmológica. Sin embargo, dentro del contexto holográfico, encontrar nuevos escenarios supone la existencia de nuevas clases de teorías duales. En [117] por ejemplo, se observa que desde el punto de vista de la correspondencia $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$, el dual de una teoría que no sea la de Einstein-Gauss-Bonnet podría no ser supersimétrica. De los resultados de Lovelock desprendemos que, si queremos ampliar el espectro de teorías gravitatorias en el marco de la correspondencia holográfica, debemos hacerlo sobre espaciotiempos de dimensión superior a cuatro.

Motivados por la aparición de NMG, en 2010 Oliva y Ray [28] presentan una teoría cúbica en 5 dimensiones que, en analogía con [108], tiene como propiedad que la traza de las ecuaciones de movimiento son de segundo orden. Más aún, en dicho trabajo se realiza una construcción general en D dimensiones, con la particularidad que en $D = 3$, la teoría construida coincide con la parte cuadrática de NMG.

En forma adicional, y de especial interés para nuestro trabajo, obtienen que al restringir esta teoría a espaciotiempos estáticos y con simetría esférica, las ecuaciones de movimiento son de segundo orden. En efecto, el lagrangiano de esta teoría está descrito por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{OR} = & -\frac{7}{6}R^{ab}{}_{cd}R^{ce}{}_{bf}R^{df}{}_{ae} - R_{ab}{}^{cd}R_{cd}{}^{be}R^a{}_e - \frac{1}{2}R_{ab}{}^{cd}R^a{}_cR^b{}_d + \frac{1}{3}R^a{}_bR^b{}_cR^c{}_a \\ & - \frac{1}{2}RR^a{}_bR^b{}_a + \frac{1}{12}R^3, \end{aligned} \quad (5.9)$$

y las ecuaciones de movimiento que se obtienen de la variación de la acción

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \mathcal{L}^{OR}$$

respecto de la métrica g_{ab} son de la forma $E_{ab} = 0$, donde:

$$\begin{aligned} E_{ab} = & -\frac{7}{6} \left[3R_{ahd}{}^g R_b{}^{prd} R_{pgr}{}^h - 3\nabla_p \nabla_q (R^p{}_g{}^q{}_h R_a{}^g{}^h{}_b - R^p{}_{hbg} R_a{}^{gh}{}_h) - \frac{1}{2} g_{ab} R^{mn}{}_{cd} R^{ce}{}_{nf} R^{df}{}_{me} \right] \\ & - \left[R_{acbd} R^{cspq} R_{pqs}{}^d - R_a{}^{qcd} R_{cdb}{}^h R_{qh}{}^h + R_b{}^{dqc} R_{adc}{}^h R_{qh}{}^h - \nabla_p \nabla_q (R_{ah} R_b{}^{phq} + R_{ah} R_b{}^{qhp} \right. \\ & + R_{bh} R_a{}^{phq} + R^q{}_h R_a{}^h{}_b{}^p + R^p{}_h R_a{}^q{}_b{}^h + \frac{1}{2} (g^{pq} R_a{}^{hcd} R_{bhcd} + g_{ab} R^{prcd} R^q{}_{rcd} - g_a{}^p R_b{}^{rcd} R^q{}_{rcd} \\ & - g_b{}^p R_a{}^{rcd} R^q{}_{rcd})) - \frac{1}{2} g_{ab} R_{mn}{}^{cd} R^{ne}{}_{cd} R^m{}_e \left. \right] - \frac{1}{2} \left[R_{ac} R_b{}^{fcd} R_{fd} + 2R_{acbd} R^{cfdg} R_{fg} \right. \\ & + \nabla_p \nabla_q (R_{ab} R^{pq} - R_a{}^p R_b{}^q + g^{pq} R_{acbd} R^{cd} + g_{ab} R^{pcqd} R_{cd} - g_a{}^p R^q{}_{cbd} R^{cd} - g_b{}^p R^q{}_{cad} R^{cd}) \\ & - \frac{1}{2} g_{ab} R_{mn}{}^{cd} R^m{}_c R^n{}_d \left. \right] + \frac{1}{3} \left[3R_{acbd} R^{ec} R_e{}^d + \frac{3}{2} \nabla_p \nabla_q (g^{pq} R_a{}^c R_{bc} + g_{ab} R^{ep} R_e{}^q - g_b{}^p R^{qc} R_{ac} \right. \\ & - g_a{}^p R^{qc} R_{bc} - \frac{1}{2} g_{ab} R^m{}_n R^n{}_c R^c{}_m \left. \right] - \frac{1}{2} \left[R_{ab} R^{cd} R_{cd} + 2R R^{cd} R_{acbd} + \nabla_p \nabla_q (g_{ab} g^{pq} R^{cd} R_{cd} \right. \\ & + g^{pq} R R_{ab} - g_a{}^p g_b{}^q R^{cd} R_{cd} + g_{ab} R R^{pq} - g_b{}^p R R_a{}^q - g_a{}^p R R_b{}^q) - \frac{1}{2} g_{ab} R R^m{}_n R^n{}_m \left. \right] \\ & + \frac{1}{12} \left[3R^2 R_{ab} + 3\nabla_p \nabla_q (g_{ab} g^{pq} R^2 - g_a{}^p g_b{}^q R^2) - \frac{1}{2} g_{ab} R^3 \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Podemos ver que en general, las ecuaciones de movimiento anteriormente descritas son ecuaciones diferenciales de cuarto orden. Sin embargo, denotemos por $\Sigma_{3,\gamma}$ al espacio euclídeo 3-dimensional de curvatura constante (donde γ es la curvatura normalizada a $\gamma \in \{0, \pm 1\}$) y por $d\Sigma_{3,\gamma}^2$ a su elemento de línea, que corresponde a un plano ($\gamma = 0$) una 3-esfera ($\gamma = 1$) o a un hiperboloide ($\gamma = -1$):

$$d\Sigma_{3,\gamma}^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i^2}{1 + \frac{\gamma}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}. \quad (5.11)$$

Ahora, consideremos la métrica:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + r^2 d\Sigma_{3,\gamma}^2, \quad (5.12)$$

que representa la métrica estática más general compatible con las isometrías de $\Sigma_{3,\gamma}$. Al evaluar las ecuaciones de movimiento $E_a{}^b = 0$ (5.10) sobre esta métrica obtenemos:

$$E_t{}^t = \frac{1}{2r^6} (g(r) - \gamma)^2 (2g(r) - 3rg'(r) - 2\gamma), \quad (5.13)$$

$$E_r{}^r = \frac{1}{2f(r)r^6} (g(r) - \gamma) (2f(r)g(r) - 3rf'(r)g(r) - 2\gamma f(r)), \quad (5.14)$$

$$E_i^j = \frac{\gamma - g(r)}{f(r)r^6} [r^2 g(r)(\gamma - g(r))f'(r)^2 + rf(r)f'(r)(5rg(r)g'(r) + 4\gamma g(r) - 4g(r)^2 - \gamma r g'(r)) + 4rf(r)^2(\gamma - g(r))g'(r) - 2r^2 f(r)g(r)(\gamma - g(r))f''(r) + 4f(r)^2(\gamma - g(r))^2] \delta_i^j, \quad (5.15)$$

donde los índices i, j están definidos sobre $\Sigma_{3,\gamma}$. Queda en evidencia que las ecuaciones son de segundo orden. La solución no trivial de este sistema de ecuaciones se desprende de (5.13). Tras resolver la ecuación diferencial para $g(r)$, obtenemos $g(r) = Cr^{\frac{2}{3}} + \gamma$. Al reemplazar en la ecuación (5.14), encontramos que $f(r) = C_2 g(r)$, condición que además resulta compatible en el resto de las ecuaciones (5,15). Además, cuando $C_2 > 0$ podemos reescalar la coordenada temporal usando $t \rightarrow \sqrt{C_2}t$, obteniendo la solución descrita en [28].

De estos resultados, podemos destacar las siguientes propiedades:

1. Para cualquier espaciotiempo, la traza de las ecuaciones de movimiento es proporcional al lagrangiano,

$$E_a^a = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{OR}$$

2. El lagrangiano \mathcal{L}^{OR} pertenece a la familia de lagrangianos construidos para $D = 2k - 1$ y $k \geq 3$:

$$\tilde{\mathcal{L}}_k = \frac{1}{2^k} \left(\frac{1}{D - 2k + 1} \right) \delta_{c_1 d_1 \dots c_k d_k}^{a_1 b_1 \dots a_k b_k} \left(C_{a_1 b_1}^{c_1 d_1} \dots C_{a_k b_k}^{c_k d_k} - R_{a_1 b_1}^{c_1 d_1} \dots R_{a_k b_k}^{c_k d_k} - c_k C_{a_1 b_1}^{a_k b_k} C_{a_2 b_2}^{a_1 b_1} \dots C_{a_k b_k}^{a_{k-1} b_{k-1}} \right), \quad (5.16)$$

donde C_{abcd} es el tensor de Weyl:

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{2}{D-2} (g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a}) + \frac{2}{(D-1)(D-2)} g_{a[c} R_{d]b} R \quad (5.17)$$

y las constantes c_k están definidas por

$$c_k = \frac{(D-4)!}{(D-2k+1)!} \frac{[k(k-2)D(D-3) + k(k+1)(D-3) + (D-2k)(D-2k-1)]}{[(D-3)^{k-1}(D-2)^{k-1} + 2^{k-1} - 2(3-D)^{k-1}]} . \quad (5.18)$$

Algunos trabajos donde se ocupa este tensor pueden ser revisados en las referencias [136–140].

3. Para espaciotiempos con simetría esférica, la solución más general es estática. Este tipo de resultados se conoce usualmente en la literatura como Teorema de Birkhoff [141].

4. La acción

$$S = \int d^5 x \sqrt{-g} [c_0 \mathcal{L}_0 + c_1 \mathcal{L}_1 + c_2 \mathcal{L}_2 + c_3 \mathcal{L}^{OR}],$$

donde \mathcal{L}_i ($i = 0, 1, 2$) corresponde al i -ésimo término de la teoría de Lovelock, y los c_j ($j = 0, 1, 2, 3$) son constantes de acoplamiento, admite soluciones de tipo Agujero Negro con decaimiento asintóticamente AdS.

5. En $D = 5$, el lagrangiano dado por (5.9) es la única combinación cúbica para la cual todas las componentes de las ecuaciones de movimiento, sobre espaciotiempos estáticos y con simetría esférica, son de segundo orden [142]. Respecto de esta propiedad es importante mencionar que la unicidad no hace alusión a la forma en la que se describe el lagrangiano: dos teorías cúbicas en $D = 5$ son equivalentes si la diferencia entre ellas es proporcional a la densidad de Euler en 6 dimensiones χ_6 .

Simultánea e independientemente, Myers y Robinson [29] estudiaron el mismo problema. En este

trabajo proponen el lagrangiano descrito por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_5 = & R_{ab}{}^{cd} R_{cd}{}^{ef} R_{ef}{}^{ab} + \frac{1}{14} (21R_{abcd}R^{abcd}R - 120R_{abcd}R^{abc}{}_e R^{de} + 144R_{abcd}R^{ac}R^{bd} \\ & + 128R_a{}^b R_b{}^c R_c{}^a - 108R_a{}^b R_b{}^a R + 11R^3), \end{aligned} \quad (5.19)$$

que, como mencionamos en el punto 4., resulta ser una combinación lineal del lagrangiano de Oliva y Ray, y la densidad de Euler en χ_6 , a saber

$$\mathcal{Z}_5 = \frac{24}{7}\mathcal{L}^{QT} + \frac{1}{2}\chi_6. \quad (5.20)$$

A las propiedades enumeradas anteriormente, a partir del trabajo de Myers y Robinson podemos agregar:

5. El lagrangiano (5.19) se puede extender a dimensión arbitraria $D \geq 5$ modificando adecuadamente los coeficientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_D = & R_{ab}{}^{cd} R_{cd}{}^{ef} R_{ef}{}^{ab} + \frac{1}{(2D-3)(D-4)} (-12(D^2 - 5D + 5)R_{abcd}R^{abc}{}_e R^{de} \\ & + \frac{3(D^2 - 4D + 2)}{2}RR_{abcd}R^{abcd} + 12(D-2)(D-3)R_{abcd}R^{ac}R^{bd} \\ & + 8(D-1)(D-3)R_a{}^b R_b{}^c R_c{}^a - 6(D-2)^2RR_a{}^b R_b{}^a + \frac{D^2 - 4D + 6}{2}R^3) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sin embargo, para $D = 6$ la acción

$$S = \int d^6x \sqrt{-g} \mathcal{Z}_6$$

se anula.

6. Las ecuaciones de movimiento linealizadas para gravitones propagándose sobre AdS_5 son las mismas ecuaciones que las generadas por GR, y en consecuencia, son de segundo orden.

En 2011, Dehghani *et. al* [30] construyen la teoría cuasitopológica de grado cuatro en la curvatura, obteniendo resultados similares a los ya expuestos.

Las teorías cuasitopológicas han permitido ampliar el espectro de teorías en el contexto de la correspondencia AdS/CFT. Propiedades holográficas han sido estudiadas en [143–145], concluyendo que la teoría conforme dual no puede ser sumersimétrica. Propiedades de superconductores holográficos fueron estudiadas en [146–148]. Para soluciones que presentan interacciones entre teorías cuasitopológicas y campos de materia, ver referencias [149–154].

Tanto en [29] como en [30] se hace mención a la posibilidad que las teorías quasitopológicas existan para un orden de curvatura arbitrario. El artículo [3] nos muestra que, al menos para orden 5, esta conjetura es efectiva.

5.3. Quintic Quasitopological Gravity

Para construir la teoría cuasitopológica de orden 5 en la curvatura, utilizamos las mismas técnicas ocupadas en las versiones cúbica y cuártica. Comenzando por el listado de los 85 invariantes que componen el término \mathcal{L}_5 de la familia de Lovelock [155], construimos una combinación lineal arbitraria de ellos, buscando las condiciones bajo las cuales las ecuaciones de movimiento (sobre variedades con simetría esférica) sean de segundo orden. Gracias a los trabajos [156] y [157], sabemos que para teorías gravitatorias, sus ecuaciones de movimiento son equivalentes a las que resultan de evaluar directamente

el lagrangiano sobre la métrica (5.12). De esta forma, obtenemos un sistema de 120 ecuaciones y 85 incógnitas, cuya solución da origen a la *Quintic Quasitopological Gravity*. En [3] se muestran también el resto de las propiedades que definen a las teorías cuasitopológicas: ecuaciones de segundo orden sobre espaciotiempos esféricamente simétricos, ser una teoría libre de fantasmas sobre AdS, y además satisface el Teorema de Birkhoff, es decir, la solución más general es estática. Esta última propiedad es común a la teoría de Lovelock [158–160], y a algunas extensiones [120–122, 161–163].

A diferencia de los casos cúbico y cuártico, para probar que la teoría no tiene fantasmas utilizaremos las técnicas propuestas en [164], [165]. En estas referencias, se estudian las ecuaciones de movimiento linealizadas de cualquier teoría puramente gravitatoria, con densidad lagrangiana \mathcal{L} , sobre espaciotiempos maximalmente simétricos (en particular, sobre el espacio AdS). Para ello, los autores escriben la estructura más general de las ecuaciones linealizadas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\mu\nu}^L = & [e - 2\Lambda(a(D-1) + c) + (2a+c)\bar{\square}]G_{\mu\nu}^L + (a+2b+c)[\bar{g}_{\mu\nu}\bar{\square} - \bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu]R^L \\ & - \Lambda(a(D-3) - 2b(D-1) - c)\bar{g}_{\mu\nu}R^L = \frac{1}{4}T_{\mu\nu}^L, \end{aligned} \quad (5.22)$$

con a, b, c, e parámetros que dependen de la teoría que se desea estudiar, y donde los tensores de Einstein y Ricci linealizados, junto con el escalar de Ricci linealizado toman la forma:

$$G_{\mu\nu}^L = R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2}\bar{g}R^L - (D-1)\Lambda h_{\mu\nu}, \quad (5.23)$$

$$R_{\mu\nu}^L = \bar{\nabla}_{(\mu}\bar{\nabla}_{\sigma}h^{\sigma}_{\nu)} - \frac{1}{2}\bar{\square}h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu h + D\Lambda h_{\mu\nu} - \Lambda h\bar{g}_{\mu\nu}, \quad (5.24)$$

$$R^L = \bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}^\nu h_{\mu\nu} - \bar{\square}h - (D-1)\lambda h. \quad (5.25)$$

Siendo $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ el tensor de Riemann del espacio maximalmente simétrico, esto es,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = 2\Lambda g_{\mu[\sigma}g_{\rho]\nu}, \quad (5.26)$$

se define un nuevo tensor $\hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$, dado por

$$\hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} + 2\alpha k_{\mu[\sigma}k_{\rho]\nu} \quad (5.27)$$

donde $k_{\mu\nu}$ es un (0,2)-tensor simétrico, con traza $\chi < D$, que además satisface

$$k_\mu{}^\alpha k_\alpha{}^\nu = k_\mu{}^\nu.$$

Esta “deformación” del tensor de Riemann se utiliza también para modificar el tensor y el escalar de Ricci, $\hat{R}_{\mu\nu}$ y \hat{R} .

La observación clave es que los valores de a, b, c y e se pueden obtener tras evaluar el lagrangiano de la teoría en este tensor de Riemann deformado $\hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$, puesto que ello conlleva a una expresión algebraica genérica que dependerá de α y χ , que en general tendrá la forma

$$\mathcal{L}(\Lambda, \alpha, \chi) = \mathcal{L}(\Lambda) + (2e\chi(\chi-1))\alpha + 2\chi(\chi-1)(a + b\chi(\chi-1) + c(\chi-1))\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3), \quad (5.28)$$

de donde se pueden leer en forma única los valores de los parámetros:

$$e = \frac{1}{2\chi(\chi-1)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}, \quad a = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1}{4\chi(\chi-1)} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0}, \quad (5.29)$$

$$c = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{1}{\chi-1} \left(\frac{1}{4\chi(\chi-1)} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0} - a \right), \quad (5.30)$$

$$b = \frac{1}{\chi(\chi-1)} \left(\frac{1}{4\chi(\chi-1)} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0} - a - c(\chi-1) \right) \quad (5.31)$$

Quintic quasi-topological gravity

Adolfo Cisterna,^{a,b} Luis Guajardo,^c Mokhtar Hassaine^c and Julio Oliva^d

^a*Vicerrectoría académica, Universidad Central de Chile,
Toesca 1783 Santiago, Chile*

^b*Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Austral de Chile,
Casilla 567, Valdivia, Chile*

^c*Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca,
Casilla 747, Talca, Chile*

^d*Departamento de Física, Universidad de Concepción,
Casilla, 160-C, Concepción, Chile*

E-mail: adolfo.cisterna@ucentral.cl, luis.guajardo.r@gmail.com,
hassaine@inst-mat.otalca.cl, julioolivazapata@gmail.com

ABSTRACT: We construct a quintic quasi-topological gravity in five dimensions, i.e. a theory with a Lagrangian containing \mathcal{R}^5 terms and whose field equations are of second order on spherically (hyperbolic or planar) symmetric spacetimes. These theories have recently received attention since when formulated on asymptotically AdS spacetimes might provide for gravity duals of a broad class of CFTs. For simplicity we focus on five dimensions. We show that this theory fulfils a Birkhoff's Theorem as it is the case in Lovelock gravity and therefore, for generic values of the couplings, there is no s -wave propagating mode. We prove that the spherically symmetric solution is determined by a quintic algebraic polynomial equation which resembles Wheeler's polynomial of Lovelock gravity. For the black hole solutions we compute the temperature, mass and entropy and show that the first law of black holes thermodynamics is fulfilled. Besides of being of fourth order in general, we show that the field equations, when linearized around AdS are of second order, and therefore the theory does not propagate ghosts around this background. Besides the class of theories originally introduced in [arXiv:1003.4773](https://arxiv.org/abs/1003.4773), the general geometric structure of these Lagrangians remains an open problem.

KEYWORDS: Black Holes, Classical Theories of Gravity

ARXIV EPRINT: [1702.04676](https://arxiv.org/abs/1702.04676)

Contents

1	Introduction	1
2	The theory	3
3	Static solutions	5
4	Birkhoff's theorem	6
5	Black hole thermodynamics	7
6	No-ghosts on AdS	9
7	Simple solutions for special values of the couplings	10
	7.1 Quasi-topological gravity with a unique vacuum	10
	7.2 Pure quasi-topological gravity	11
8	Conclusions and final remarks	11
A	Coefficients of the quintic quasi-topological gravity	13

1 Introduction

The geometric classical description of the gravitational interaction naturally leads to General Relativity as the unique, diffeomorphism invariant theory with second order field equations in four dimensions. In spite of the successes the theory has had, the lack of a proper quantum description of gravitational phenomena led to the exploration of alternative scenarios which have received vast attention during the last decades. If one requires some level of predictability, such alternative scenarios might be restricted in some manner. As before, requirements such as diffeomorphism invariance and second order field equations are usually considered cornerstones in this process that naturally leads to Einstein-Hilbert action in three and four dimensions and to Lovelock theories in arbitrary dimension D [1]. When formulated on asymptotically AdS spacetimes, using the tools of AdS/CFT correspondence [2] one can treat these theories as gravity duals of some Conformal Field Theory living at the boundary. As in the low energy limit of string theory, besides the Einstein-Hilbert action for gravity, higher curvature corrections might appear in a perturbative treatment, which can differ in general from those in the Lovelock family. Nevertheless one can hope that some of the physics of these higher curvature corrections could be correctly captured by their Lovelock counterpart. These kind of explorations led for example to understand that finite contributions from quadratic terms might induce violations of the η/s

KSS bound [3] (see [4] and [5]). Lovelock theories provide one with a setup where certain control at a computational level can be attained. More precisely, in Lovelock theories one can find exact analytic static black holes which provide for finite temperature duals with interesting thermal properties and phase diagram structure. Within Lovelock family in five dimensions, General Relativity is supplemented by a single quadratic term (which is the dimensional continuation of the four-dimensional Euler density for Euclidean compact manifolds without boundary) and besides Newton's constant, the theory has an extra dimensionful coupling. In the context of the AdS₅/CFT₄ correspondence departing from this family would allow the dual CFT to be non-supersymmetric [6], at the cost of losing some of the analytic computational control. A natural question therefore arises: is it possible to define a sensible gravity theory in five dimensions beyond the Einstein-Gauss-Bonnet theory? The so-called quasi-topological gravities provide for such an example. In reference [7] a new cubic gravity theory in five dimensions was introduced. The cubic combination reads

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = & -\frac{7}{6}R^{ab}{}_{cd}R^{ce}{}_{bf}R^{df}{}_{ae} - R_{ab}{}^{cd}R_{cd}{}^{be}R^a{}_e - \frac{1}{2}R_{ab}{}^{cd}R^a{}_cR^b{}_d \\ & + \frac{1}{3}R^a{}_bR^b{}_cR^c{}_a - \frac{1}{2}RR^a{}_bR^b{}_a + \frac{1}{12}R^3, \end{aligned} \tag{1.1}$$

and can be singled out as the unique cubic combination in five dimensions whose traced field equations lead to a second order constraint and that also has second order field equation on general spherically (planar or hyperbolic) symmetric spacetimes [8].¹ It was also realized in [7] that this theory belongs to a general family of Lagrangians of order k in the curvature, that can be constructed in dimensions $D = 2k - 1$ for $k \geq 3$, and have the simple form

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_k = & \frac{1}{2^k} \left(\frac{1}{D - 2k + 1} \right) \delta^{a_1 b_1 \dots a_k b_k} \left(C_{a_1 b_1}^{c_1 d_1} \dots C_{a_k b_k}^{c_k d_k} - R_{a_1 b_1}^{c_1 d_1} \dots R_{a_k b_k}^{c_k d_k} \right) \\ & - c_k C_{a_1 b_1}^{a_k b_k} C_{a_2 b_2}^{a_1 b_1} \dots C_{a_k b_k}^{a_{k-1} b_{k-1}}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Here $C_a{}^b{}_{cd}$ is the Weyl tensor and

$$c_k = \frac{(D - 4)!}{(D - 2k + 1)!} \frac{[k(k - 2)D(D - 3) + k(k + 1)(D - 3) + (D - 2k)(D - 2k - 1)]}{[(D - 3)^{k-1}(D - 2)^{k-1} + 2^{k-1} - 2(3 - D)^{k-1}]} \tag{1.3}$$

The Lagrangian (1.1) is obtained by setting $D = 5$ and $k = 3$ in (1.2) after expanding the Weyl tensor in terms of Riemann tensor and its traces. It's also interesting to note that after expanding the Lagrangian (1.2) in the case $k = 2$, and then setting $D = 3$, leads to the quadratic part of the New Massive Gravity Lagrangian [10].

The $\tilde{\mathcal{L}}_{k \geq 3}$ expression in (1.2) allows to directly verify that the linearized field equations around any conformally flat background ((A)dS in particular) are of second order. On the other hand, the relative factor c_k in (1.2) is such that on spacetimes that are conformal to spherically (hyperbolic or planar) symmetric spacetimes, the higher derivative contributions to the field equations coming from the variations of the Weyl tensors, cancel each other. This is possible since for such family of spacetimes, all the component of the Weyl

¹The quasi-topological combination found in [9] \mathcal{Z}' , is related to \mathcal{L}_3 by the relation $\mathcal{L}_3 = \frac{7}{24}\mathcal{Z}' + \frac{7}{48}\mathcal{E}_6$, where \mathcal{E}_6 stands for the six-dimensional Euler that vanishes identically in five dimensions.

tensor C^{ab}_{cd} are proportional to a single function X [11], and therefore any scalar constructed as a complete contraction of k Weyl tensors will be proportional to X^k (see [12] and [13] for related further developments). These results allow to construct a new theory, quartic in the Riemann, in $D = 7$.

Motivated by broadening the family of four-dimensional CFTs with relatively simple gravity duals, in reference [14] the authors successfully look for a quartic theory with second order field equations on spherical symmetry. Such theory was dubbed Quartic Quasi-topological gravity and when supplemented with terms of lower order in the Riemann tensor, leads to second order linearized field equations around AdS spacetime. A property that is shared by its cubic counterpart. It's important to notice that Quartic Quasi-topological gravity in five dimensions does not belong to the family defined in equation (1.2), nevertheless on spherically symmetric spacetimes, the field equations are simple and reduce to a generalized Wheeler-like polynomial equation for the lapse function [15] (see also [16]). The authors of [14] also conjecture the existence of quasi-topological gravities of arbitrarily high degree in the curvature. The purpose of the present paper is to show that for Lagrangians that are quintic in the curvature, \mathcal{R}^5 , this is indeed the case.

The paper is organized as follows: in section II we show that there is at least one particular combination of quintic algebraic invariants in five dimension which leads to second order field equations on spherically symmetric spacetimes. In section III we present the quintic algebraic Wheeler's polynomial that determines the black hole solutions of the theory, we characterize the maximally symmetric solutions and show that for generic values of the couplings, the asymptotic behavior of the solutions coincides with the one of GR. Section IV is devoted to the proof of Birkhoff's theorem in this setup which shows that for generic values of the couplings of a non-homogeneous curvature combination, the theory does not propagate s -waves in spite of being in general a higher derivative theory. Due to the Abel-Rufini theorem the obtained Wheeler's-like polynomial cannot be solved by radicals, nevertheless, assuming the existence of an event horizon, we are able to compute the temperature, entropy and mass of the black hole solutions in section V. Section VI contains the proof that the theory is ghosts-free around AdS. In section VII we analyze some particular cases of the values of the couplings that allow for an explicit solution of the quintic polynomial and at the same time lead to interesting black hole solutions. Section VIII contains further remarks and conclusions.

2 The theory

Here we consider the following gravity theory

$$I[g_{\mu\nu}] = \int \sqrt{-g} d^5x \left[\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + \sum_{k=2}^5 a_k \mathcal{L}_k \right], \tag{2.1}$$

where \mathcal{L}_2 stands for the Gauss-Bonnet combination

$$\mathcal{L}_2 := R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}, \tag{2.2}$$

the cubic \mathcal{L}_3 term is the cubic quasi-topological combination in (1.1) and \mathcal{L}_4 stands for the quartic quasi-topological term that can be written as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & \frac{1}{73 \times 2^5 \times 3^2} \left[7080 R^{pqbs} R_p^a R_b^u R_a^v R_w R_{qvsw} - 234 R^{pqbs} R_{pq}^{au} R_{au}^{vw} R_{bsvw} - 1237 (R^{pqbs} R_{pqbs})^2 \right. \\ & + 1216 R^{pq} R^{bsau} R_{bs}^v R_{auvq} - 6912 R^{pq} R^{bs} R_p^a R_q^u R_{abus} - 7152 R^{pq} R^{bs} R_{pb}^{au} R_{auqs} \\ & + 308 R^{pq} R_{pq}^{bsau} R_{bsau} + 298 R^2 R^{pqbs} R_{pqbs} + 12864 R^{pq} R^{bs} R_b^a R_{psqa} - 115 R^4 \\ & \left. - 912 R R^{pq} R^{bs} R_{pbqs} + 4112 R^{pq} R_p^b R_q^s R_{bs} - 4256 R R^{pq} R_p^b R_{qb} + 1156 R^2 R^{pq} R_{pq} \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

The new quintic quasi-topological combination is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & A_1 R R_b^a R_c^b R_d^c R_a^d + A_2 R R_b^a R_a^b R_{ef}^{cd} R_{cd}^{ef} + A_3 R R_c^a R_d^b R_{ef}^{cd} R_{ab}^{ef} \quad (2.4) \\ & + A_4 R_b^a R_a^b R_d^c R_e^d R_c^e + A_5 R_b^a R_c^b R_c^c R_{fg}^{de} R_{de}^{fg} + A_6 R_b^a R_d^b R_f^c R_{ag}^{de} R_{ce}^{fg} \\ & + A_7 R_b^a R_d^b R_f^c R_{cg}^{de} R_{ae}^{fg} + A_8 R_b^a R_c^b R_{ae}^{cd} R_{gh}^{ef} R_{df}^{gh} + A_9 R_b^a R_c^b R_{ef}^{cd} R_{gh}^{ef} R_{ad}^{gh} \\ & + A_{10} R_b^a R_c^b R_{eg}^{cd} R_{ah}^{ef} R_{df}^{gh} + A_{11} R_c^a R_d^b R_{ab}^{cd} R_{gh}^{ef} R_{ef}^{gh} + A_{12} R_c^a R_d^b R_{ae}^{cd} R_{gh}^{ef} R_{bf}^{gh} \\ & + A_{13} R_c^a R_d^b R_{ef}^{cd} R_{gh}^{ef} R_{ab}^{gh} + A_{14} R_c^a R_d^b R_{eg}^{cd} R_{ah}^{ef} R_{bf}^{gh} + A_{15} R_c^a R_e^b R_{af}^{cd} R_{gh}^{ef} R_{bd}^{gh} \\ & + A_{16} R_b^a R_{ad}^{bc} R_{fh}^{de} R_{ci}^{fg} R_{eg}^{hi} + A_{17} R_b^a R_{de}^{bc} R_{cf}^{de} R_{hi}^{fg} R_{ag}^{hi} + A_{18} R_b^a R_{df}^{bc} R_{ac}^{de} R_{hi}^{fg} R_{eg}^{hi} \\ & + A_{19} R_b^a R_{df}^{bc} R_{ah}^{de} R_{ei}^{fg} R_{cg}^{hi} + A_{20} R_b^a R_{df}^{bc} R_{gh}^{de} R_{ei}^{fg} R_{ac}^{hi} + A_{21} R_{cd}^{ab} R_{eg}^{cd} R_{ai}^{ef} R_{fj}^{gh} R_{bh}^{ij} \\ & + A_{22} R_{ce}^{ab} R_{af}^{cd} R_{gi}^{ef} R_{bj}^{gh} R_{dh}^{ij} + A_{23} R_{ce}^{ab} R_{ag}^{cd} R_{bi}^{ef} R_{fj}^{gh} R_{dh}^{ij} + A_{24} R_{ce}^{ab} R_{fg}^{cd} R_{hi}^{ef} R_{aj}^{gh} R_{bd}^{ij}, \end{aligned}$$

where the (not illuminating at all) A_k coefficients, are defined in the appendix. The dimensionful couplings a_k have mass dimension $5 - 2k$.

The quasi-topological combinations seem to be very cumbersome but the field equations, on spherically symmetric spacetimes reduce to simple expressions.

Clearly, the quasi-topological gravities are defined up to the addition of the corresponding Euler densities that in the cubic, quartic and quintic cases, identically vanish in five dimensions. A different set of identities that can be used to provide a different expression for these Lagrangians make use of the cubic and quartic Lovelock tensor $\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(3)}$ and $\mathcal{G}_{\mu\nu}^{(4)}$. These tensors identically vanish in dimension five and can be used to construct new scalar identities by contracting them with symmetric curvature combinations, as well as with curvature scalars. Beyond these trivial sources of non-uniqueness for the explicit form of the quasi-topological Lagrangians, there is a more subtle one that leads to theories that are intrinsically different. Since the quartic and quintic theories are defined by requiring second order field equations on spherically symmetric spacetimes, a combination that identically vanishes for this class of spacetimes can be added. The differences between the theories so defined will become manifest only when they are explored beyond spherical symmetry. An example of this is provided by the addition of a general combination of the independent, complete contractions of k Weyl tensor $Tr_{(p)}(C^k)$, where $Tr_{(p)}$ stands for a particular way of pairing the indices of the different Weyl tensors. When evaluated on spacetimes that are conformal to spherically symmetric ones, the different traces $Tr_{(p)}$ turn out to be proportional [11]. Therefore a combination of these traces, fixed by a single constraint, can be added to the quasi-topological terms to provide new theories which on spherical symmetry coincide (see the discussion above equation (88) in [7]). As mentioned in [8], since there are

only two possible cubic complete contractions of Weyl tensors, $Tr_{(1)}(C^3)$ and $Tr_{(2)}(C^3)$, cubic quasi-topological gravity is unique. Quartic quasi-topological gravity is also argued to be unique in the original reference [14]. Whether or not the Quintic Quasi-topological theory here presented is unique, goes beyond the scope of this work and it would require at least to properly classify all the non-trivial, independent traces of the form $Tr_{(p)}(C^5)$. In ten dimensions, these are the terms that define the c -contributions of the conformal anomaly (see e.g. [17] and [18]).

Hereafter we set $16\pi G = 1$.

3 Static solutions

Wheeler’s polynomial for a static metric of the form

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + r^2 d\Sigma_\gamma^2, \tag{3.1}$$

with $f(r) = g(r)$, reads

$$(f - \gamma)^5 \frac{a_5}{r^6} - (f - \gamma)^4 \frac{a_4}{r^4} - 2(f - \gamma)^3 \frac{a_3}{r^2} - 12(f - \gamma)^2 a_2 + 6r^2(f - \gamma) + r^4 \Lambda = -\mu. \tag{3.2}$$

Where $d\Sigma_\gamma$ denotes the line element of a Euclidean, three-dimensional manifold of normalized constant curvature $\gamma = \pm 1$ or 0 , and μ is an integration constant, that will determine the mass of the solution. This is a quintic algebraic equation that due to Abel-Ruffini theorem, cannot be solved in general by radicals. We will show in the next section that for generic values of the couplings the condition $f(r) = g(r)$ is actually an output of the field equations and not a restriction put by hand.

Let’s assume that the maximally symmetric solution has a dressed constant curvature

$$R^{\mu\nu}_{\beta\sigma} = \frac{\lambda}{6} \left(\delta_\beta^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\nu \delta_\beta^\mu \right), \tag{3.3}$$

whose metric can be represented by setting

$$f(r) = g(r) = -\frac{\lambda}{6} r^2 + \gamma. \tag{3.4}$$

on the metric (3.1). The dressed curvature is fixed by the following polynomial

$$P[\lambda] := a_5 \lambda^5 + 6a_4 \lambda^4 - 72a_3 \lambda^3 + 2592a_2 \lambda^2 + 7776(\lambda - \Lambda) = 0. \tag{3.5}$$

As usual, depending on the values of the couplings $(a_5, a_4, a_3, a_2, \Lambda)$ one can have from one to five different vacua, and one can identify the G.R. branch, as the one for which $\lambda \rightarrow \Lambda$ as a_2, a_3, a_4 and a_5 go to zero.

It’s possible to show that for generic values of the couplings, the asymptotic behavior allowed by Wheeler’s polynomial (3.2), coincides with that of General Relativity. In fact assuming

$$f(r) = g(r) = -\frac{\lambda}{6} r^2 + \gamma + j(r), \tag{3.6}$$

with $j(r)$ having a Laurent expansion at infinity that does not modify the leading term of the metric, i.e.

$$j(r) = c_1 r + c_0 + \frac{c_2}{r} + \frac{c_3}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}), \quad (3.7)$$

one can expand (3.2) at infinity and solve it order by order. This leads to the following set of conditions

$$P[\lambda] r^4 = 0, \quad c_1 \frac{dP[\lambda]}{d\lambda} r^3 = 0, \quad (3.8)$$

where $P[\lambda]$ is defined in (3.5). Once $P[\lambda]$ is solved, which fixes the value of the dressed cosmological constant λ , requiring at the same time $\frac{dP[\lambda]}{d\lambda}$ to vanish, would imply a relation between the couplings, therefore for generic values of the latter, (3.8) imply that c_1 has to vanish. Considering this on the next relevant order of the asymptotic expansion of Wheeler's polynomial one obtains

$$c_0 \frac{dP[\lambda]}{d\lambda} r^2 = 0, \quad (3.9)$$

which again implies that generically $c_0 = 0$. Then one obtains $c_2 \frac{dP[\lambda]}{d\lambda} r = 0$, which forces to set $c_2 = 0$, and finally one obtains

$$c_3 \frac{dP[\lambda]}{d\lambda} + 1296\mu = 0. \quad (3.10)$$

As mentioned before, this implies that the asymptotic behavior of the full solution matches the one of General Relativity since

$$f(r) = g(r) = -\frac{\lambda}{6} r^2 + \gamma - \frac{\mu}{1296 \frac{dP[\lambda]}{d\lambda}} \frac{1}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}). \quad (3.11)$$

This shows that on spherically symmetric spacetimes, the only way of relaxing the asymptotic conditions of quasi-topological gravity (with respect to those of G.R.), would be to consider the critical cases in which the polynomial $P[\lambda]$ has roots with multiplicity larger than one. In section VI we consider some particular regions of the space of couplings that allow for relaxed asymptotic behavior.

4 Birkhoff's theorem

It's well known that the field equations of a gravitational theory on spherically symmetric spacetimes, are correctly reproduced from the variation of a reduced action [19, 20], obtained from the evaluation of the Lagrangian on the metric

$$ds^2 = -a(t,r) b^2(t,r) dt^2 + 2f(t,r) b(t,r) dt dr + \frac{dr^2}{a(t,r)} + r^2 d\Sigma_\gamma^2, \quad (4.1)$$

where $d\Sigma_\gamma$ denotes the line element of a Euclidean three-dimensional manifold of constant curvature $\gamma = \pm 1$ or 0. Evaluating the action (2.1) on (4.1) one obtains a reduced action which is a functional of $I[a, b, f]$. It's convenient to introduce $h(t, r)$ such that

$$a(t, r) = \gamma + h(t, r). \quad (4.2)$$

The variation of the reduced action with respect to a , b and f , and a posteriori gauge fixing $f = 0$, respectively lead to the field equations

$$0 = (-24r^6 h(t, r) a_2 - 6h(t, r)^2 r^4 a_3 - 4h(t, r)^3 r^2 a_4 + 5h(t, r)^4 a_5 + 6r^8) \frac{\partial b(t, r)}{\partial r} \quad (4.3)$$

$$0 = h(t, r)^5 r^{-5} a_5 - h(t, r)^4 r^{-3} a_4 - 2h(t, r)^3 r^{-1} a_3 - 12h(t, r)^2 r a_2 + r^5 \Lambda + 6r^3 h(t, r) + \mu(t) r \quad (4.4)$$

$$0 = (-24r^6 h(t, r) a_2 - 6h(t, r)^2 r^4 a_3 - 4h(t, r)^3 r^2 a_4 + 5h(t, r)^4 a_5 + 6r^8) \frac{\partial h(t, r)}{\partial t} \quad (4.5)$$

The function $f(t, r)$ appears as a Lagrange multiplier on the reduced action and provides one with the (t, r) component of the field equations. Here $\mu(t)$ is an integration function. For generic values of the couplings, provided (4.4) is fulfilled, one can show that the pre-factors of the derivatives in equations (4.3) and (4.5) are non-vanishing and therefore $b(t, r) = b(t)$ and $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$. The latter implies $\mu(t) = \mu$. As usual the function $b(t)$ can be absorbed by a time reparametrization. This proves the Birkhoff's theorem for the non-homogenous combination, i.e., for generic values of the couplings, the spherically (planar or hyperbolic) symmetric solution is static and is determined by a quintic polynomial equation. These results are analogous to the Birkhoff's theorem in Lovelock gravity (see [21] and [22]). It would be interesting to explore whether the generalized Birkhoff's theorem of Chern-Simons [23] and Lovelock theory [24–33] can be extended for the quasi-topological theories, for general horizon geometries.

5 Black hole thermodynamics

Assuming that there is a non-degenerate horizon, that is, assuming that the polynomial equation (3.2) has a solution $f(r)$ with a single zero located at $r = r_h$, we now analyze the thermodynamical properties of the solution through the Euclidean method, where the Euclidean time τ is imaginary, periodic of period β and it is related to the temperature via $\beta = T^{-1}$. The Euclidean action I_{Euc} is related with the free energy F by

$$I_{\text{Euc}} = \beta F = \beta (M - TS), \quad (5.1)$$

where M is the mass and S is the entropy. On the other hand, in order to display the boundary term B that will ensure the finiteness of the Euclidean action, it is enough to consider the following class of Euclidean metric

$$ds^2 = N^2(r) f(r) d\tau^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Sigma_\gamma^2.$$

With the Euclidean time $\tau \in [0, \beta]$, the radial coordinate $r \in [r_h, \infty[$ and $Vol(\Sigma_\gamma)$ standing for the volume of the three-dimensional Euclidean manifold Σ_γ , the reduced action principle reads

$$I_{\text{Euc}} = \beta Vol(\Sigma_\gamma) \int N(r) \mathcal{H}(r) dr + B, \quad (5.2)$$

where the reduced Hamiltonian is given by

$$\mathcal{H} = \left(\frac{5(f-\gamma)^4 a_5}{2r^6} - \frac{2(f-\gamma)^3 a_4}{r^4} - \frac{3(f-\gamma)^2 a_3}{r^2} - 12(f-\gamma)a_2 + 3r^2 \right) f' - \frac{3(f-\gamma)^5 a_5}{r^7} + \frac{2(f-\gamma)^4 a_4}{r^5} + \frac{2(f-\gamma)^3 a_3}{r^3} + 6r(f-\gamma) + 2\Lambda r^3. \quad (5.3)$$

The boundary term is determined requiring that the reduced action (5.2) has an extremum, that is, $\delta I_{\text{Euc}} = 0$ within the class of fields considered here [34]. This last condition implies that

$$\delta B = -\beta \text{Vol}(\Sigma_\gamma) N \left(\frac{5(f-\gamma)^4 a_5}{2r^6} - \frac{2(f-\gamma)^3 a_4}{r^4} - \frac{3(f-\gamma)^2 a_3}{r^2} - 12(f-\gamma)a_2 + 3r^2 \right) \delta f,$$

where the variation is taken between the horizon and infinity.

Varying the reduced action with respect to the fields N and f gives the following equations:

$$\mathcal{H}(r) = 0 \quad (5.4a)$$

$$\left(-\frac{5(f-\gamma)^4 a_5}{2r^6} + \frac{2(f-\gamma)^3 a_4}{r^4} + \frac{3(f-\gamma)^2 a_3}{r^2} + 12(f-\gamma)a_2 - 3r^2 \right) N'(r) = 0 \quad (5.4b)$$

From the first equation we recover (3.2). In the second equation, since the couplings a_2, a_3, a_4, a_5 are generic, one must have $N'(r) = 0$, and then, without loss of generality, we can set $N(r) \equiv 1$.

The temperature is fixed requiring regularity of the metric at the horizon yielding in this case to

$$\beta f'(r)|_{r_h} = 4\pi,$$

and using (3.2) we have

$$T = \frac{1}{2\pi r_h} \left(\frac{-3a_5\gamma^5 - 2a_4\gamma^4 r_h^2 + 2a_3\gamma^3 r_h^4 + 6\gamma r_h^8 - 2\Lambda r_h^{10}}{5a_5\gamma^4 + 4a_4\gamma^3 r_h^2 - 6a_3\gamma^2 r_h^4 + 24a_2\gamma r_h^6 + 6r_h^8} \right). \quad (5.5)$$

Now we are in position to compute the boundary term $B = B(\infty) - B(r_h)$. At the horizon we have $f(r_h) = 0$ and $\delta f|_{r_h} = -f'(r_h) \delta r_h$. In this situation the variation reads

$$\delta B|_{r_h} = 4\pi \text{Vol}(\Sigma_\gamma) \left(\frac{5\gamma^4 a_5}{2r_h^6} + \frac{2\gamma^3 a_4}{r_h^4} - \frac{3\gamma^2 a_3}{r_h^2} + 12\gamma a_2 + 3r_h^2 \right) \delta r_h,$$

which can be trivially integrated as

$$B(r_h) = \text{Vol}(\Sigma_\gamma) \left(-\frac{2\pi\gamma^4 a_5}{r_h^5} - \frac{8\pi\gamma^3 a_4}{3r_h^3} + \frac{12\pi\gamma^2 a_3}{r_h^2} + 48\pi\gamma a_2 r_h + 4\pi r_h^3 \right). \quad (5.6)$$

On the other hand, we can use again (3.2) to see that the variation at infinity is simply

$$\delta B|_\infty = \frac{\beta \text{Vol}(\Sigma_\gamma)}{2} \delta\mu,$$

so that the contribution at the infinity is given by

$$\begin{aligned}
 B(\infty) &= \frac{\beta \text{Vol}(\Sigma_\gamma)}{2} \mu \\
 &= -\frac{\beta \text{Vol}(\Sigma_\gamma)}{2} \left(-\frac{\gamma^5 a_5}{r_h^6} - \frac{\gamma^4 a_4}{r_h^4} + \frac{2\gamma a_3}{r_h^2} - 12\gamma^2 a_2 - 6\gamma r_h^2 + \Lambda r_h^4 \right). \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

Finally, the comparison between the boundary term B and (5.1), allows us to identify the entropy and the mass of the system as

$$\mathcal{S} = \text{Vol}(\Sigma_\gamma) \left(4\pi r_h^3 + 48\pi\gamma a_2 r_h + \frac{12\pi\gamma^2 a_3}{r_h^2} - \frac{8\pi\gamma^3 a_4}{3r_h^3} - \frac{2\pi\gamma^4 a_5}{r_h^5} \right). \quad (5.8)$$

$$M = \frac{\text{Vol}(\Sigma_\gamma)}{2} \left(\frac{\gamma^5 a_5}{r_h^6} + \frac{\gamma^4 a_4}{r_h^4} - \frac{2\gamma a_3}{r_h^2} + 12\gamma^2 a_2 + 6\gamma r_h^2 - \Lambda r_h^4 \right) \quad (5.9)$$

It's now trivial to show that the first law $dM = TdS$ is fulfilled.

As a final comment, we want to stress that the expression for the mass (5.9) coincides with the one obtained through the quasilocal generalization of the ADT formalism [35–39] as presented in refs. [40, 41].

6 No-ghosts on AdS

Linearizing fourth-order gravity theories around maximally symmetric backgrounds in general leads to ghost degrees of freedom. Some exceptions that non-trivially avoid this problem are New Massive Gravity as well as quasi-topological gravities. The former exploits the fact that General Relativity does not propagate local bulk degrees of freedom in $2+1$ -dimensions, and the linearized equations around flat space lead to the massive Fierz-Pauli equation [10]. The mechanism that exorcizes the ghost on AdS in quasi-topological gravities is different. It was shown in [9] and [14] that around maximally symmetric backgrounds, cubic and quartic quasi-topological gravities lead to the same propagator than G.R. with an effective Newton's constant that depends on the values of the couplings. Requiring the positivity of this effective gravity coupling provides an important restriction on the values that the couplings can take. Now we focus on the linearization of Quintic Quasi-topological gravity, given by the action (2.1), around a maximally symmetric solution with a dressed curvature $\lambda/6$, restricted by the polynomial $P[\lambda] = 0$ in (3.5).

Recently, the authors of [42] and [43] introduced a simple method for linearizing higher-derivative theories around maximally symmetric backgrounds. Their method relies on the evaluation of the Lagrangian on a deformed curvature that depends on two auxiliary parameters. Considering derivatives of the effective action with respect to the mentioned parameters, one can obtain the linearized field equations. The potentially dangerous terms contain second derivatives of the linearized Einstein tensor as well as of the linearized Ricci scalar. Such terms will be present for generic combinations of the curvature invariants. Nevertheless, for Quintic Quasi-topological gravity (2.1) one has that the linearized equa-

tions around a constant curvature background of dressed curvature $\lambda/6$ fixed by (3.5), read²

$$\frac{dP[\lambda]}{d\lambda} G_{\mu\nu}^L = 0, \tag{6.1}$$

that implies

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{3} a_2 \lambda - \frac{1}{36} a_3 \lambda^2 + \frac{1}{324} a_4 \lambda^3 + \frac{5}{7776} a_5 \lambda^4 \right) G_{\mu\nu}^L = 0, \tag{6.2}$$

where the linearized Einstein tensor is defined by

$$G_{\mu\nu}^L = \bar{\nabla}_{(\mu} \bar{\nabla}_{\sigma} h^{\sigma}_{\nu)} - \frac{1}{2} \bar{\square} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_{\mu} \bar{\nabla}_{\nu} h + 5\Lambda h_{\mu\nu} - \Lambda h \bar{g}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \left(\bar{\nabla}^{\alpha} \bar{\nabla}^{\beta} h_{\alpha\beta} - \bar{\square} h - 4\Lambda h \right) - 4\Lambda h_{\mu\nu}.$$

The first term in the parenthesis of (6.2) comes from the Einstein-Hilbert term. The positivity of this effective Newton’s constant has to be used to restrict the values of the couplings.

Note also that if we linearize around a maximally symmetric background that has a curvature that is a root of $P[\lambda] = 0$ with multiplicity greater or equal to 2, the linearized field equations would identically vanish. This feature is also well known in Lovelock theories when vacua coincide (see e.g. [44]).

7 Simple solutions for special values of the couplings

7.1 Quasi-topological gravity with a unique vacuum

As in Lovelock theory, one can see that if the couplings are such that all the roots of the polynomial $P[\lambda]$ in (3.5) coincide, Wheeler’s polynomial can be solved in a simple manner [45, 46]. For quasi-topological gravity, such degenerate case is obtained by setting the coefficients as

$$\Lambda = -\frac{6}{5l^2}, \quad a_2 = l^2, \quad a_3 = -6l^4, \quad a_4 = 6l^6, \quad a_5 = \frac{6}{5}l^8, \tag{7.1}$$

where l is an arbitrary length scale. In this case the metric can be found explicitly and yields

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} + \gamma - \mu r^{6/5} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{l^2} + \gamma - \mu r^{6/5}} + r^2 d\Sigma_{\gamma}^2, \tag{7.2}$$

where μ is an integration constant. This spacetime is asymptotically locally (A)dS, which can be seen from the asymptotic form of the Riemann tensor at infinity

$$R^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{l^2} \delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} + p^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \mathcal{O} \left(r^{-4/5} \right), \tag{7.3}$$

where $p^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ is a tensor that has constant entries on the coordinates used for the line element (7.2).

²Note that for simplicity, we have scaled the curvature of the background w.r.t. that of [42] as $\lambda \rightarrow \lambda/6$.

Note also that the solution (7.2) can be obtained as a kind of dimensional continuation of the black hole solution of Lovelock theory with a unique vacuum. Indeed in such case the lapse function reads

$$f(r) = \frac{r^2}{l^2} + \gamma - \frac{\mu}{r^{\frac{D-2k-1}{k}}}, \tag{7.4}$$

where D is the spacetime dimension and k is the maximum power in the curvature that appears in the Lagrangian. Lovelock gravity of order k contributes to the field equations provided $k \leq [\frac{D-1}{2}]$, where $[\cdot]$ stands for the integer part. Nevertheless, continuing the solution (7.4) to $D = 5$ and $k = 5$, correctly reproduces the line element (7.2). For cubic quasi-topological gravity, this property was already pointed out in [7].

7.2 Pure quasi-topological gravity

Another simple explicit solution arises when considering the quintic term plus a cosmological term in the action. In analogy to what happens with Lovelock gravity, we call this case the pure quasi-topological case. In the context of Lovelock theory, this case has received attention since it's the simplest case that admits a unique constant curvature solution that also propagates a graviton [47–49]. The theory therefore reads

$$I_{PQG} = \int \sqrt{-g} d^5x [-2\Lambda + a_5 \mathcal{L}_5], \tag{7.5}$$

and the black holes solution reduces to

$$ds^2 = - \left(\gamma - \left(\frac{(\Lambda r^4 + \mu) r^6}{a_5} \right)^{1/5} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\gamma - \left(\frac{(\Lambda r^4 + \mu) r^6}{a_5} \right)^{1/5}} + r^2 d\Sigma_\gamma^2. \tag{7.6}$$

It's interesting enough to note that even in the absence of an Einstein-Hilbert term, the asymptotic behavior of the lapse function emulates that of GR, since at infinity

$$f(r) = - \left(\frac{\Lambda}{a_5} \right)^{1/5} r^2 + \gamma - \frac{\tilde{\mu}}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-6}). \tag{7.7}$$

The limit $\Lambda \rightarrow 0$ can be taken in this solution which provides an asymptotically locally flat black hole only for the hyperbolic case $\gamma = -1$.

8 Conclusions and final remarks

We have presented a new quasi-topological theory in five dimensions, that is quintic in the Riemann tensor. The theory is ghost-free around AdS and the linearized equations around a constant curvature background reduce to the linearized Einstein equations with an effective Newton's constant. The theory is defined by five, dimensionful coupling constants, and the positivity of the effective Newton's constant of the fluctuations on AdS has to be imposed as a restriction on the space of couplings. The theory also admits black hole solutions which can be integrated exactly up to the solution of a quintic algebraic equation, that due to Abel-Rufini theorem, cannot be solved in terms of radicals. Requiring the existence

of an event horizon, we have been able to compute the temperature, mass and entropy of the black hole solutions. These black holes provide for finite temperature duals of a CFT living at the boundary of AdS spacetime.

It would be interesting to construct \mathcal{R}^5 quasi-topological gravities in arbitrary dimensions. From what we have learned from the cubic [7] and quartic cases [14], it is natural to conjecture that this theory might exist for all dimensions lower than ten, and from dimension 11 it might reduce to Lovelock theory plus a combination of invariants whose contribution cancels when evaluated on spherically symmetric spacetimes.

Cubic and quartic quasi-topological gravities have been explored in many different directions. Holographic and unitarity studies including η/s and central charges of the dual CFTs were done in [50–52]. The properties of holographic superconductors were explored in [53–55]. Exact solution containing matter fields were constructed in [56–60] including also scalars conformally coupled to the quasi-topological densities [61]. The thermodynamics in the extended phase space for these theories was studied in [62] and [63]. It would be interesting to see if the results found in those references is affected by the presence of the quintic quasi-topological term, or whether the results are generic for this family of theories.

As mentioned above, besides the clear structure provided by the family of theories introduced in [7], of order k in dimension $D = 2k - 1$, the general form of quasi-topological gravities of arbitrary high order in five dimensions, is not clear. For the quartic case for example, one might be tempted to consider combinations of the invariants:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \delta_{b_1 \dots b_8}^{a_1 \dots a_8} C_{a_1 a_2}^{b_1 b_2} \dots C_{a_7 a_8}^{b_7 b_8}, & B_2 &= \delta_{b_1 \dots b_8}^{a_1 \dots a_8} R_{a_1 a_2}^{b_1 b_2} C_{a_3 a_4}^{b_3 b_4} \dots C_{a_7 a_8}^{b_7 b_8}, \\
 B_3 &= \delta_{b_1 \dots b_8}^{a_1 \dots a_8} R_{a_1 a_2}^{b_1 b_2} R_{a_3 a_4}^{b_3 b_4} C_{a_5 a_6}^{b_5 b_6} C_{a_7 a_8}^{b_7 b_8}, & B_4 &= \delta_{b_1 \dots b_8}^{a_1 \dots a_8} R_{a_1 a_2}^{b_1 b_2} R_{a_3 a_4}^{b_3 b_4} R_{a_5 a_6}^{b_5 b_6} C_{a_7 a_8}^{b_7 b_8}, \\
 B_5 &= \delta_{b_1 \dots b_8}^{a_1 \dots a_8} R_{a_1 a_2}^{b_1 b_2} R_{a_3 a_4}^{b_3 b_4} R_{a_5 a_6}^{b_5 b_6} R_{a_7 a_8}^{b_7 b_8}.
 \end{aligned}$$

Substituting the Weyl tensor in terms of the Riemann tensor and its traces, one can see that the combination

$$\mathcal{B} = \frac{1}{(D - 5)} \sum_{i=1}^5 \xi_i B_i, \tag{8.1}$$

is well behaved for a general metric in $D = 5$ if and only if

$$\begin{aligned}
 \xi_3 &= -6\xi_1 - 3\xi_2, \\
 \xi_4 &= 26\xi_1 + 15\xi_2, \\
 \xi_5 &= -21\xi_1 - 13\xi_2.
 \end{aligned}$$

Then, in order to remove the higher derivative contributions to the field equations one would have to engineer additional terms that on spherical symmetry contribute as those in the combinations that appear in \mathcal{B} . Besides the independent terms $Tr_{(p)}(C^4)$, one might also consider $RTr_{(1)}(C^3)$ and $RTr_{(2)}(C^3)$.

Acknowledgments

We thank Gaston Giribet, Octavio Fierro and Sourya Ray for enlightening discussions and collaboration on similar topics. This work is partially supported by FONDECYT grants

1130423, 1141073 and 3150157. A.C work is partially supported by project UCEN I+D-2016, CIP2016. This project is also partially funded by Proyectos CONICYT-Research Council UK-RCUK-DPI20140053. A.C. and J. O. would like to thank the International Center for Theoretical Physics (ICTP), Trieste, Italy, where part of this work was carried out. J.O. thanks also the support of ICTP Associates Program.

A Coefficients of the quintic quasi-topological gravity

To find the Quintic Quasi-topological combination, we have considered a general linear combination all the 85, quintic, curvature invariants that appear in the expansion of the ten-dimensional Euler density reported in equation (7) of reference [64]. We evaluated such general combination on a spherically (hyperbolic or planar) symmetric spacetime and then we required the field equations coming from this reduced Lagrangian to be of second order. This provides a system of equations for the coefficients of the linear combination, which has the coefficients given below as a simple, possible solution. Since we are interested in the properties of the theory on a spherically symmetric background, it's enough to evaluate the Lagrangian on the metric ansatz (3.1) (or (4.1) to include time dependence) [19, 20]. The coefficients that define the new Quintic Quasi-topological gravity in equation (2.4) are:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{9497}{17767320}, & A_2 &= -\frac{759299}{71069280}, & A_3 &= \frac{124967}{5922440}, & A_4 &= \frac{759299}{23689760}, \\
 A_5 &= \frac{197761}{11844880}, & A_6 &= \frac{1362599}{23689760}, & A_7 &= -\frac{5006573}{11844880}, & A_8 &= -\frac{9290347}{71069280}, \\
 A_9 &= \frac{3400579}{11844880}, & A_{10} &= -\frac{6726521}{11844880}, & A_{11} &= \frac{363777}{23689760}, & A_{12} &= \frac{6348187}{47379520}, \\
 A_{13} &= -\frac{9487667}{71069280}, & A_{14} &= -\frac{6454201}{8883660}, & A_{15} &= -\frac{34697591}{142138560}, & A_{16} &= -\frac{5643853}{71069280}, \\
 A_{17} &= -\frac{29094011}{71069280}, & A_{18} &= -\frac{48458099}{71069280}, & A_{19} &= \frac{1547591}{740305}, & A_{20} &= \frac{78763919}{71069280}, \\
 A_{21} &= -\frac{10718341}{17767320}, & A_{22} &= \frac{9629717}{17767320}, & A_{23} &= \frac{1113473}{17767320}, & A_{24} &= -\frac{16111757}{17767320}.
 \end{aligned}$$

Open Access. This article is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License ([CC-BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)), which permits any use, distribution and reproduction in any medium, provided the original author(s) and source are credited.

References

- [1] D. Lovelock, *The Einstein tensor and its generalizations*, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 498 [[INSPIRE](#)].
- [2] J.M. Maldacena, *The large- N limit of superconformal field theories and supergravity*, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113 [[hep-th/9711200](#)] [[INSPIRE](#)].
- [3] P. Kovtun, D.T. Son and A.O. Starinets, *Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics*, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 111601 [[hep-th/0405231](#)] [[INSPIRE](#)].

- [4] M. Brigante, H. Liu, R.C. Myers, S. Shenker and S. Yaida, *Viscosity bound violation in higher derivative gravity*, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 126006 [[arXiv:0712.0805](#)] [[INSPIRE](#)].
- [5] M. Brigante, H. Liu, R.C. Myers, S. Shenker and S. Yaida, *The viscosity bound and causality violation*, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 191601 [[arXiv:0802.3318](#)] [[INSPIRE](#)].
- [6] D.M. Hofman and J. Maldacena, *Conformal collider physics: energy and charge correlations*, *JHEP* **05** (2008) 012 [[arXiv:0803.1467](#)] [[INSPIRE](#)].
- [7] J. Oliva and S. Ray, *A new cubic theory of gravity in five dimensions: black hole, Birkhoff's theorem and C-function*, *Class. Quant. Grav.* **27** (2010) 225002 [[arXiv:1003.4773](#)] [[INSPIRE](#)].
- [8] J. Oliva and S. Ray, *Classification of six derivative Lagrangians of gravity and static spherically symmetric solutions*, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 124030 [[arXiv:1004.0737](#)] [[INSPIRE](#)].
- [9] R.C. Myers and B. Robinson, *Black holes in quasi-topological gravity*, *JHEP* **08** (2010) 067 [[arXiv:1003.5357](#)] [[INSPIRE](#)].
- [10] E.A. Bergshoeff, O. Hohm and P.K. Townsend, *Massive gravity in three dimensions*, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 201301 [[arXiv:0901.1766](#)] [[INSPIRE](#)].
- [11] S. Deser and A.V. Ryzhov, *Curvature invariants of static spherically symmetric geometries*, *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) 3315 [[gr-qc/0505039](#)] [[INSPIRE](#)].
- [12] J. Oliva and S. Ray, *Birkhoff's theorem in higher derivative theories of gravity*, *Class. Quant. Grav.* **28** (2011) 175007 [[arXiv:1104.1205](#)] [[INSPIRE](#)].
- [13] J. Oliva and S. Ray, *Birkhoff's theorem in higher derivative theories of gravity II*, *Phys. Rev. D* **86** (2012) 084014 [[arXiv:1201.5601](#)] [[INSPIRE](#)].
- [14] M.H. Dehghani, A. Bazrafshan, R.B. Mann, M.R. Mehdizadeh, M. Ghanaatian and M.H. Vahidinia, *Black holes in quartic quasitopological gravity*, *Phys. Rev. D* **85** (2012) 104009 [[arXiv:1109.4708](#)] [[INSPIRE](#)].
- [15] J.T. Wheeler, *Symmetric solutions to the maximally Gauss-Bonnet extended Einstein equations*, *Nucl. Phys. B* **273** (1986) 732 [[INSPIRE](#)].
- [16] X.O. Camanho and J.D. Edelstein, *A Lovelock black hole bestiary*, *Class. Quant. Grav.* **30** (2013) 035009 [[arXiv:1103.3669](#)] [[INSPIRE](#)].
- [17] S. Deser and A. Schwimmer, *Geometric classification of conformal anomalies in arbitrary dimensions*, *Phys. Lett. B* **309** (1993) 279 [[hep-th/9302047](#)] [[INSPIRE](#)].
- [18] N. Boulanger, *Algebraic classification of Weyl anomalies in arbitrary dimensions*, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 261302 [[arXiv:0706.0340](#)] [[INSPIRE](#)].
- [19] R.S. Palais, *The principle of symmetric criticality*, *Commun. Math. Phys.* **69** (1979) 19 [[INSPIRE](#)].
- [20] S. Deser and J. Franklin, *Schwarzschild and Birkhoff à la Weyl*, *Am. J. Phys.* **73** (2005) 261 [[gr-qc/0408067](#)] [[INSPIRE](#)].
- [21] R. Zegers, *Birkhoff's theorem in Lovelock gravity*, *J. Math. Phys.* **46** (2005) 072502 [[gr-qc/0505016](#)] [[INSPIRE](#)].
- [22] S. Deser and J. Franklin, *Birkhoff for Lovelock redux*, *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) L103 [[gr-qc/0506014](#)] [[INSPIRE](#)].

- [23] J. Oliva, *All the solutions of the form $M_2 \times W \sum_{d-2}$ for Lovelock gravity in vacuum in the Chern-Simons case*, *J. Math. Phys.* **54** (2013) 042501 [[arXiv:1210.4123](#)] [[INSPIRE](#)].
- [24] G. Dotti, J. Oliva and R. Troncoso, *Static solutions with nontrivial boundaries for the Einstein-Gauss-Bonnet theory in vacuum*, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 024002 [[arXiv:1004.5287](#)] [[INSPIRE](#)].
- [25] G. Dotti, J. Oliva and R. Troncoso, *Vacuum solutions with nontrivial boundaries for the Einstein-Gauss-Bonnet theory*, *Int. J. Mod. Phys. A* **24** (2009) 1690 [[arXiv:0809.4378](#)] [[INSPIRE](#)].
- [26] G. Dotti, J. Oliva and R. Troncoso, *Exact solutions for the Einstein-Gauss-Bonnet theory in five dimensions: black holes, wormholes and spacetime horns*, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 064038 [[arXiv:0706.1830](#)] [[INSPIRE](#)].
- [27] G. Dotti and R.J. Gleiser, *Obstructions on the horizon geometry from string theory corrections to Einstein gravity*, *Phys. Lett. B* **627** (2005) 174 [[hep-th/0508118](#)] [[INSPIRE](#)].
- [28] C. Bogdanos, C. Charmousis, B. Gouteraux and R. Zegers, *Einstein-Gauss-Bonnet metrics: black holes, black strings and a staticity theorem*, *JHEP* **10** (2009) 037 [[arXiv:0906.4953](#)] [[INSPIRE](#)].
- [29] H. Maeda, *Gauss-Bonnet black holes with non-constant curvature horizons*, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 124007 [[arXiv:1004.0917](#)] [[INSPIRE](#)].
- [30] N. Farhangkhah and M.H. Dehghani, *Lovelock black holes with nonmaximally symmetric horizons*, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 044014 [[arXiv:1409.1410](#)] [[INSPIRE](#)].
- [31] S. Ohashi and M. Nozawa, *Lovelock black holes with a nonconstant curvature horizon*, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 064020 [[arXiv:1507.04496](#)] [[INSPIRE](#)].
- [32] N. Dadhich and J.M. Pons, *Static pure Lovelock black hole solutions with horizon topology $S^{(n)} \times S^{(n)}$* , *JHEP* **05** (2015) 067 [[arXiv:1503.00974](#)] [[INSPIRE](#)].
- [33] S. Ray, *Birkhoff's theorem in Lovelock gravity for general base manifolds*, *Class. Quant. Grav.* **32** (2015) 195022 [[arXiv:1505.03830](#)] [[INSPIRE](#)].
- [34] T. Regge and C. Teitelboim, *Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity*, *Annals Phys.* **88** (1974) 286 [[INSPIRE](#)].
- [35] L.F. Abbott and S. Deser, *Stability of gravity with a cosmological constant*, *Nucl. Phys. B* **195** (1982) 76 [[INSPIRE](#)].
- [36] L.F. Abbott and S. Deser, *Charge definition in non-Abelian gauge theories*, *Phys. Lett. B* **116** (1982) 259 [[INSPIRE](#)].
- [37] S. Deser and B. Tekin, *Gravitational energy in quadratic curvature gravities*, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 101101 [[hep-th/0205318](#)] [[INSPIRE](#)].
- [38] S. Deser and B. Tekin, *Energy in generic higher curvature gravity theories*, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 084009 [[hep-th/0212292](#)] [[INSPIRE](#)].
- [39] C. Senturk, T.C. Sisman and B. Tekin, *Energy and angular momentum in generic F (Riemann) theories*, *Phys. Rev. D* **86** (2012) 124030 [[arXiv:1209.2056](#)] [[INSPIRE](#)].
- [40] W. Kim, S. Kulkarni and S.-H. Yi, *Quasilocal conserved charges in a covariant theory of gravity*, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 081101 [*Erratum ibid.* **112** (2014) 079902] [[arXiv:1306.2138](#)] [[INSPIRE](#)].

- [41] Y. Gim, W. Kim and S.-H. Yi, *The first law of thermodynamics in Lifshitz black holes revisited*, *JHEP* **07** (2014) 002 [[arXiv:1403.4704](#)] [[INSPIRE](#)].
- [42] P. Bueno and P.A. Cano, *Einsteinian cubic gravity*, *Phys. Rev. D* **94** (2016) 104005 [[arXiv:1607.06463](#)] [[INSPIRE](#)].
- [43] P. Bueno, P.A. Cano, V.S. Min and M.R. Visser, *Aspects of general higher-order gravities*, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 044010 [[arXiv:1610.08519](#)] [[INSPIRE](#)].
- [44] Z.-Y. Fan, B. Chen and H. Lü, *Criticality in Einstein-Gauss-Bonnet gravity: gravity without graviton*, *Eur. Phys. J. C* **76** (2016) 542 [[arXiv:1606.02728](#)] [[INSPIRE](#)].
- [45] J. Crisostomo, R. Troncoso and J. Zanelli, *Black hole scan*, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 084013 [[hep-th/0003271](#)] [[INSPIRE](#)].
- [46] R. Aros, R. Troncoso and J. Zanelli, *Black holes with topologically nontrivial AdS asymptotics*, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 084015 [[hep-th/0011097](#)] [[INSPIRE](#)].
- [47] R.-G. Cai and N. Ohta, *Black holes in pure Lovelock gravities*, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 064001 [[hep-th/0604088](#)] [[INSPIRE](#)].
- [48] N. Dadhich, R. Durka, N. Merino and O. Mišković, *Dynamical structure of pure Lovelock gravity*, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 064009 [[arXiv:1511.02541](#)] [[INSPIRE](#)].
- [49] P.K. Concha, R. Durka, C. Inostroza, N. Merino and E.K. Rodríguez, *Pure Lovelock gravity and Chern-Simons theory*, *Phys. Rev. D* **94** (2016) 024055 [[arXiv:1603.09424](#)] [[INSPIRE](#)].
- [50] R.C. Myers, M.F. Paulos and A. Sinha, *Holographic studies of quasi-topological gravity*, *JHEP* **08** (2010) 035 [[arXiv:1004.2055](#)] [[INSPIRE](#)].
- [51] M.H. Dehghani and M.H. Vahidinia, *Quartic quasi-topological gravity, black holes and holography*, *JHEP* **10** (2013) 210 [[arXiv:1307.0330](#)] [[INSPIRE](#)].
- [52] T.C. Sisman, I. Gullu and B. Tekin, *All unitary cubic curvature gravities in D dimensions*, *Class. Quant. Grav.* **28** (2011) 195004 [[arXiv:1103.2307](#)] [[INSPIRE](#)].
- [53] M. Siani, *Holographic superconductors and higher curvature corrections*, *JHEP* **12** (2010) 035 [[arXiv:1010.0700](#)] [[INSPIRE](#)].
- [54] X.-M. Kuang, W.-J. Li and Y. Ling, *Holographic superconductors in quasi-topological gravity*, *JHEP* **12** (2010) 069 [[arXiv:1008.4066](#)] [[INSPIRE](#)].
- [55] X.-M. Kuang, W.-J. Li and Y. Ling, *Holographic p-wave superconductors in quasi-topological gravity*, *Class. Quant. Grav.* **29** (2012) 085015 [[arXiv:1106.0784](#)] [[INSPIRE](#)].
- [56] W.G. Brenna, M.H. Dehghani and R.B. Mann, *Quasi-topological Lifshitz black holes*, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 024012 [[arXiv:1101.3476](#)] [[INSPIRE](#)].
- [57] M.H. Dehghani and M.H. Vahidinia, *Surface terms of quasitopological gravity and thermodynamics of charged rotating black branes*, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 084044 [[arXiv:1108.4235](#)] [[INSPIRE](#)].
- [58] W.G. Brenna and R.B. Mann, *Quasi-topological Reissner-Nordström black holes*, *Phys. Rev. D* **86** (2012) 064035 [[arXiv:1206.4738](#)] [[INSPIRE](#)].
- [59] M.A. Ganjali, *Hyperscaling-violating Lifshitz solutions in cubic gravity*, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 024002 [[arXiv:1508.05614](#)] [[INSPIRE](#)].

- [60] M. Ghanaatian, A. Bazrafshan, S. Taghipoor and R. Tawoosi, *Magnetic brane of cubic quasi-topological gravity in the presence of Maxwell and Born-Infeld electromagnetic field*, [arXiv:1609.06571](#) [INSPIRE].
- [61] M. Chernicoff, O. Fierro, G. Giribet and J. Oliva, *Black holes in quasi-topological gravity and conformal couplings*, *JHEP* **02** (2017) 010 [[arXiv:1612.00389](#)] [INSPIRE].
- [62] A. Sheykhi, M.H. Dehghani and R. Dehghani, *Horizon thermodynamics and gravitational field equations in quasi-topological gravity*, *Gen. Rel. Grav.* **46** (2014) 1679 [[arXiv:1404.0260](#)] [INSPIRE].
- [63] R.A. Hennigar, W.G. Brenna and R.B. Mann, *$P - v$ criticality in quasitopological gravity*, *JHEP* **07** (2015) 077 [[arXiv:1505.05517](#)] [INSPIRE].
- [64] C.C. Briggs, *A general expression for the quintic Lovelock tensor*, [gr-qc/9607033](#) [INSPIRE].

Capítulo 6

Conclusión

A lo largo de estas páginas hemos presentado distintas aplicaciones de la correspondencia AdS/CFT [4]. Esta equivalencia nos entrega una nueva forma de entender la relación entre la gravedad y la cuántica, mirándolas a escalas distintas, de modo tal que las teorías cuánticas viven en la frontera de su teoría gravitatoria equivalente.

La idea de esta relación entre gravedad y cuántica se extendió rápidamente a campos de la Física experimental, como por ejemplo la Física de Materia Condensada. Un parámetro muy importante en estas teorías cuánticas es la temperatura. Hemos visto en el capítulo 2 que existen algunos materiales que a bajas temperaturas exhiben un cambio de sus propiedades conductoras, dando origen a lo que llamamos *superconductividad*. Es entonces imprescindible, siguiendo el espíritu de la correspondencia, que la teoría de gravedad equivalente pueda ser analizada en términos de la temperatura, para poder leer correctamente en un lado la información proveniente del otro. Bajo esta mirada, los *agujeros negros* adquieren un valor agregado respecto de otro tipo de soluciones de las ecuaciones de Einstein, ya que gracias a los trabajos de Bardeen, Bekenstein, Carter y Hawking [5–8], sabemos que se comportan como sistemas termodinámicos, con una temperatura (*Temperatura de Hawking*), entropía (*Entropía de Bekenstein-Hawking*) y parámetros termodinámicos que los caracterizan (*Conjetura de no-pelo*).

En el capítulo 3 se presentan las ideas fundamentales que están detrás del artículo [1], en el que consideramos la Relatividad General en cuatro dimensiones sobre un horizonte plano, interactuando con una fuente particular de materia, la cual consiste en una parte electromagnética, un campo escalar no mínimamente acoplado a la curvatura, y dos campos axiónicos que están distribuidos sobre las coordenadas espaciales. Son varias las aristas que motivaron el estudio de este tipo de teorías. Primero, el agujero negro de Reissner-Nordström tiene una conductividad perfecta, en el sentido que $\sigma_{DC} = +\infty$. Sin embargo, si bien sobre horizontes planos no se conoce una solución donde la gravedad de Einstein interactúa únicamente con una fuente electromagnética, sí se conocen soluciones con conductividad holográfica finita, a partir de teorías que involucran un campo electromagnético y campos axiónicos como fuentes de materia adicional. [15]. La conductividad termoeléctrica se puede obtener evaluando ciertas expresiones genéricas en el horizonte de eventos del agujero negro [31, 32]. Finalmente, en [14] se construye una extensión particular, en la que se considera un campo escalar acoplado conformemente a la curvatura escalar.

En el análisis de las ecuaciones de movimiento de [1], hemos obtenido dos clases de soluciones de agujero negro distintas. Una de ellas tiene la particularidad que el rango de valores permitidos para el parámetro no minimal ξ es discreto, y además es *extremal*, en el sentido que la Temperatura de Hawking es idénticamente cero. La otra es una extensión de la solución encontrada en [14]. Logramos visualizar el rol que juega el parámetro ξ , tanto en la termodinámica como en la conductividad de nuestras soluciones. Sobre este último punto, cabe mencionar que nuestros resultados amiten la posibilidad de

imitar comportamientos de conductores perfectos, en el sentido que $\sigma_{DC} = +\infty$. La conductividad de la solución extremal sigue un patrón similar al Efecto Hall. Sería interesante extender los resultados de este artículo para corroborar si nuestra teoría imita el comportamiento de un superconductor, en el sentido que modele un diamagneto perfecto, siguiendo las ideas del Efecto Meissner [71].

En el capítulo 4 presentamos las ideas centrales de lo que, *a posteriori*, se puede entender como la realización de la correspondencia AdS/CFT en $D = 3$ dimensiones. Estas ideas son la base de lo que se trabaja en el artículo [2]. Como vimos, Cardy mostró que la entropía de una teoría conforme, cuyas simetrías estén descritas por el álgebra de Virasoro, puede ser calculada sólo con conocer el valor de su carga central c . Por otro lado, Brown y Henneaux mostraron que, bajo ciertas condiciones de frontera (4.29) las simetrías asintóticas de AdS₃ forman un álgebra de Lie isomorfa a dos copias del álgebra de Witt, y que el álgebra de Poisson de las cargas globales asociadas corresponde a una extensión central particular (4.39). Posteriormente, se descubre la solución BTZ, la cual es asintóticamente AdS₃, y por tanto el álgebra de Poisson sus cargas globales forman dos copias del álgebra de Virasoro, con la carga central de Brown y Henneaux. El círculo se cierra cuando Strominger logra empalmar la entropía de Cardy con la entropía de Bekenstein-Hawking para esta solución.

A pesar que las ideas de la correspondencia holográfica sirvieron para extender la fórmula de Cardy a diversos escenarios, existen soluciones donde ésta no reproduce la entropía de Bekenstein-Hawking. En particular, la solución con pelo estudiada en [25, 26], donde se observa que la fórmula de Cardy puede ser reescrita considerando el *estado fundamental* (estado de menor energía) en lugar de usar la carga central. Bajo esta mirada, usar la carga central de Brown y Henneaux está asociado a la realización de AdS₃ como estado fundamental del agujero negro BTZ. En este trabajo se construye una solución de tipo solitón, que comparte con AdS₃ tres características fundamentales: es una solución suave, regular y desprovista de constantes de integración, por lo que se propone como estado fundamental de la solución con pelo, para jugar el rol análogo a AdS₃ respecto de BTZ. Usando la energía asociada a esta solución solitónica como estado fundamental, los autores reproducen correctamente la formulación de Cardy. Siguiendo esta idea, en [2] extendimos esta propuesta, a través de una formulación *à la* Cardy para agujeros negros sobre horizontes planos, que estén descritos termodinámicamente por su masa, carga eléctrica y momento angular, cuya entropía se relacione con la temperatura a través de una ley de potencias, y cuya solución solitónica asociada cumpla con las tres propiedades descritas anteriormente. Para la construcción de las respectivas soluciones solitónicas usamos la Doble Rotación de Wick [85] (doble continuación analítica), pero sabemos que ésta no siempre se puede aplicar. Por ejemplo, existen soluciones en 5 dimensiones cuyas variedades de base son no tradicionales [89, 166]. Sería interesante deducir una formulación general de la entropía en términos de una solución que actúe como estado fundamental, y que incluya otro tipo de cargas asociadas, como por ejemplo, las cargas axiónicas que mencionamos en [1, 14].

Otra arista con la que se puede avanzar en esta investigación tiene relación con las fórmulas de Smarr [167]. La fórmula de Smarr expresa la masa de un sistema en términos de las otras cargas conservadas y cantidades termodinámicas. En todos los casos estudiados en [2], las soluciones siguen una ley de Smarr dada por

$$\mathcal{M} = \frac{d_{\text{eff}}}{d_{\text{eff}} + z} TS + \Omega J,$$

pero sabemos de generalizaciones donde se considera la masa del agujero negro como la entalpía del espaciotiempo, y a la constante cosmológica como una variable termodinámica asociada a la presión [168–172]. Siguiendo lo anterior, sería interesante estudiar el efecto que tiene la consideración de la constante cosmológica como una variable termodinámica en nuestra fórmula tipo Cardy.

Finalmente, en el capítulo 5 presentamos una nueva teoría gravitatoria [3] que pertenece a una clase llamada *teorías cuasitopológicas*, introducidas inicialmente en [28]. Esta clase de teorías difiere de la familia de Lovelock pues por un lado restringe la métrica de base a aquellas con simetría esférica, plana

o hiperbólica, pero a su vez, admite extensiones gravitatorias de órdenes superiores a los de la familia de Lovelock. A pesar de estas diferencias, comparten muchas propiedades: estaticidad de la solución más general, son teorías libres de fantasmas y admiten soluciones de agujero negro asintóticamente AdS.

Las teorías cuasitopológicas son recientes en la literatura, y eso nos permite generar muchas preguntas. Por ahora, que las teorías cuasitopológicas existan para órdenes arbitrarios de la curvatura es sólo una conjetura, y una demostración formal de la conjetura sería una tarea interesante. Pero además, ¿existe alguna forma de entender los coeficientes que acompañan a los distintos invariantes en estas teorías?. La teoría cúbica provee de una fórmula cerrada para los coeficientes en términos del tensor de Weyl (5.18), pero ésta no funciona bien para los casos de orden cuatro o cinco. Este problema dista mucho de ser trivial, porque sabemos que podemos acoplar el término \mathcal{L}_5 de la familia de Lovelock sin alterar las ecuaciones de movimiento. Pero además, pueden existir combinaciones particulares que se anulan precisamente en los casos de simetría esférica, plana o hiperbólica. Por lo tanto, además del término \mathcal{L}_5 de la familia de Lovelock, cualquier múltiplo de estas combinaciones particulares podrían ser agregados linealmente sin afectar la solución. En el caso particular de [3], sería interesante, por ejemplo, construir extensiones de esta teoría acoplada con fuentes de materia, así como también estudiar aplicaciones holográficas de esta teoría.

Bibliografía

- [1] A. Cisterna, L. Guajardo, and M. Hassaine, “Axionic charged black branes with arbitrary scalar nonminimal coupling,” 2019.
- [2] M. Bravo Gaete, L. Guajardo, and M. Hassaine, “A Cardy-like formula for rotating black holes with planar horizon,” *JHEP*, vol. 04, p. 092, 2017.
- [3] A. Cisterna, L. Guajardo, M. Hassaine, and J. Oliva, “Quintic quasi-topological gravity,” *JHEP*, vol. 04, p. 066, 2017.
- [4] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 38, pp. 1113–1133, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].
- [5] S. W. Hawking, “Black holes in general relativity,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 25, pp. 152–166, 1972.
- [6] J. D. Bekenstein, “Black holes and the second law,” *Lett. Nuovo Cim.*, vol. 4, pp. 737–740, 1972.
- [7] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, “The Four laws of black hole mechanics,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 31, pp. 161–170, 1973.
- [8] S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 43, pp. 199–220, 1975. [167(1975)].
- [9] S. A. Hartnoll, “Lectures on holographic methods for condensed matter physics,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 26, p. 224002, 2009.
- [10] N. M. Bocharova, K. A. Bronnikov, and V. N. Melnikov, “On one exact solution of the set of Einstein and massless scalar field equations,” *Vestn. Mosk. Univ. Ser. III Fiz. Astron.*, no. 6, pp. 706–709, 1970.
- [11] J. D. Bekenstein, “Exact solutions of Einstein conformal scalar equations,” *Annals Phys.*, vol. 82, pp. 535–547, 1974.
- [12] C. Martinez, R. Troncoso, and J. Zanelli, “De Sitter black hole with a conformally coupled scalar field in four-dimensions,” *Phys. Rev.*, vol. D67, p. 024008, 2003.
- [13] C. Martinez, J. P. Staforelli, and R. Troncoso, “Topological black holes dressed with a conformally coupled scalar field and electric charge,” *Phys. Rev.*, vol. D74, p. 044028, 2006.
- [14] A. Cisterna, C. Erices, X.-M. Kuang, and M. Rinaldi, “Axionic black branes with conformal coupling,” *Phys. Rev.*, vol. D97, no. 12, p. 124052, 2018.
- [15] T. Andrade and B. Withers, “A simple holographic model of momentum relaxation,” *JHEP*, vol. 05, p. 101, 2014.

- [16] J. D. Brown and M. Henneaux, “Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 104, pp. 207–226, 1986.
- [17] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, “The Black hole in three-dimensional space-time,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 69, pp. 1849–1851, 1992.
- [18] A. Strominger, “Black hole entropy from near horizon microstates,” *JHEP*, vol. 02, p. 009, 1998.
- [19] E. P. Verlinde, “On the holographic principle in a radiation dominated universe,” 2000.
- [20] H. A. Gonzalez, D. Tempo, and R. Troncoso, “Field theories with anisotropic scaling in 2D, solitons and the microscopic entropy of asymptotically Lifshitz black holes,” *JHEP*, vol. 11, p. 066, 2011.
- [21] E. Shaghoulian, “A Cardy formula for holographic hyperscaling-violating theories,” *JHEP*, vol. 11, p. 081, 2015.
- [22] M. Bravo-Gaete, S. Gomez, and M. Hassaine, “Towards the Cardy formula for hyperscaling violation black holes,” *Phys. Rev.*, vol. D91, no. 12, p. 124038, 2015.
- [23] M. Bravo-Gaete, S. Gomez, and M. Hassaine, “Cardy formula for charged black holes with anisotropic scaling,” *Phys. Rev.*, vol. D92, no. 12, p. 124002, 2015.
- [24] R.-G. Cai, “The Cardy-Verlinde formula and AdS black holes,” *Phys. Rev.*, vol. D63, p. 124018, 2001.
- [25] M. Henneaux, C. Martinez, R. Troncoso, and J. Zanelli, “Black holes and asymptotics of 2+1 gravity coupled to a scalar field,” *Phys. Rev.*, vol. D65, p. 104007, 2002.
- [26] F. Correa, C. Martinez, and R. Troncoso, “Scalar solitons and the microscopic entropy of hairy black holes in three dimensions,” *JHEP*, vol. 01, p. 034, 2011.
- [27] D. Lovelock, “The Einstein tensor and its generalizations,” *J. Math. Phys.*, vol. 12, pp. 498–501, 1971.
- [28] J. Oliva and S. Ray, “A new cubic theory of gravity in five dimensions: Black hole, Birkhoff’s theorem and C-function,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 27, p. 225002, 2010.
- [29] R. C. Myers and B. Robinson, “Black Holes in Quasi-topological Gravity,” *JHEP*, vol. 08, p. 067, 2010.
- [30] M. H. Dehghani, A. Bazrafshan, R. B. Mann, M. R. Mehdizadeh, M. Ghanaatian, and M. H. Vahidinia, “Black Holes in Quartic Quasitopological Gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D85, p. 104009, 2012.
- [31] A. Donos and J. P. Gauntlett, “Holographic Q-lattices,” *JHEP*, vol. 04, p. 040, 2014.
- [32] A. Donos and J. P. Gauntlett, “Thermoelectric DC conductivities from black hole horizons,” *JHEP*, vol. 11, p. 081, 2014.
- [33] R. M. Wald, *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984.
- [34] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. 2004.
- [35] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. 2003.

- [36] G. T. Horowitz, ed., *Black holes in higher dimensions*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr., 2012.
- [37] S. Carlip, “Black Hole Thermodynamics,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. D23, p. 1430023, 2014.
- [38] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, “Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D15, pp. 2752–2756, 1977.
- [39] T. Regge and C. Teitelboim, “Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity,” *Annals Phys.*, vol. 88, p. 286, 1974.
- [40] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal Field Theory*. Graduate Texts in Contemporary Physics, New York: Springer-Verlag, 1997.
- [41] D. Tong, “Lectures on holographic conductivity,” *Presented at Cracow School of Theoretical Physics*, p. 1, 2013.
- [42] M. Guica, T. Hartman, W. Song, and A. Strominger, “The Kerr/CFT Correspondence,” *Phys. Rev.*, vol. D80, p. 124008, 2009.
- [43] T. Azeyanagi, G. Compere, N. Ogawa, Y. Tachikawa, and S. Terashima, “Higher-Derivative Corrections to the Asymptotic Virasoro Symmetry of 4d Extremal Black Holes,” *Prog. Theor. Phys.*, vol. 122, pp. 355–384, 2009.
- [44] S. Kachru, X. Liu, and M. Mulligan, “Gravity duals of Lifshitz-like fixed points,” *Phys. Rev.*, vol. D78, p. 106005, 2008.
- [45] D. Tong, “Lectures on the Quantum Hall Effect,” 2016.
- [46] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *et al.*, “The feynman lectures on physics, vol. 2,” 1964.
- [47] R. Fitzpatrick, *Maxwells Equations and the Principles of Electromagnetism*. Laxmi Publications, Ltd., 2010.
- [48] J. F. Annett, *Superconductivity, superfluids and condensates*, vol. 5. Oxford University Press, 2004.
- [49] P. A. Tipler, *Física moderna*. Reverté, 1994.
- [50] R. Casalbuoni, “Lecture Notes on Superconductivity: Condensed Matter and QCD,” 2018.
- [51] S. A. Hartnoll and P. Kovtun, “Hall conductivity from dyonic black holes,” *Phys. Rev.*, vol. D76, p. 066001, 2007.
- [52] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog, and G. T. Horowitz, “Building a Holographic Superconductor,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 031601, 2008.
- [53] A. Anabalón and A. Cisterna, “Asymptotically (anti) de Sitter Black Holes and Wormholes with a Self Interacting Scalar Field in Four Dimensions,” *Phys. Rev.*, vol. D85, p. 084035, 2012.
- [54] E. Ayon-Beato, M. Hassaine, and J. A. Méndez-Zavaleta, “(Super-)renormalizably dressed black holes,” *Phys. Rev.*, vol. D92, no. 2, p. 024048, 2015. [Addendum: *Phys. Rev.* D96, no. 4, 049905(2017)].
- [55] C. Erices and C. Martínez, “Rotating hairy black holes in arbitrary dimensions,” *Phys. Rev.*, vol. D97, no. 2, p. 024034, 2018.
- [56] M. Bravo Gaete and M. Hassaine, “Topological black holes for Einstein-Gauss-Bonnet gravity with a nonminimal scalar field,” *Phys. Rev.*, vol. D88, p. 104011, 2013.

- [57] M. Bravo Gaete and M. Hassaine, “Planar AdS black holes in Lovelock gravity with a nonminimal scalar field,” *JHEP*, vol. 11, p. 177, 2013.
- [58] F. Correa and M. Hassaine, “Thermodynamics of Lovelock black holes with a nonminimal scalar field,” *JHEP*, vol. 02, p. 014, 2014.
- [59] Y. Bardoux, M. M. Caldarelli, and C. Charmousis, “Shaping black holes with free fields,” *JHEP*, vol. 05, p. 054, 2012.
- [60] Y. Bardoux, M. M. Caldarelli, and C. Charmousis, “Conformally coupled scalar black holes admit a flat horizon due to axionic charge,” *JHEP*, vol. 09, p. 008, 2012.
- [61] M. M. Caldarelli, C. Charmousis, and M. Hassaine, “AdS black holes with arbitrary scalar coupling,” *JHEP*, vol. 10, p. 015, 2013.
- [62] Y. Ling and X. Zheng, “Holographic superconductor with momentum relaxation and Weyl correction,” *Nucl. Phys.*, vol. B917, pp. 1–18, 2017.
- [63] Y. Ling, P. Liu, J.-P. Wu, and Z. Zhou, “Holographic Metal-Insulator Transition in Higher Derivative Gravity,” *Phys. Lett.*, vol. B766, pp. 41–48, 2017.
- [64] J. Erdmenger, D. Fernandez, P. Goulart, and P. Witkowski, “Conductivities from attractors,” *JHEP*, vol. 03, p. 147, 2017.
- [65] A. Cisterna, M. Hassaine, J. Oliva, and M. Rinaldi, “Static and rotating solutions for Vector-Galileon theories,” *Phys. Rev.*, vol. D94, no. 10, p. 104039, 2016.
- [66] P. Wang, H. Wu, and H. Yang, “Holographic DC Conductivity for Backreacted Nonlinear Electrodynamics with Momentum Dissipation,” *Eur. Phys. J.*, vol. C79, no. 1, p. 6, 2019.
- [67] N. Bhatnagar and S. Siwach, “DC conductivity with external magnetic field in hyperscaling violating geometry,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. A33, no. 04, p. 1850028, 2018.
- [68] K. Goldstein, N. Iizuka, S. Kachru, S. Prakash, S. P. Trivedi, and A. Westphal, “Holography of Dyonically Dilaton Black Branes,” *JHEP*, vol. 10, p. 027, 2010.
- [69] A. Mokhtari, S. A. Hosseini Mansoori, and K. Bitaghsir Fadafan, “Diffusivities bounds in the presence of Weyl corrections,” *Phys. Lett.*, vol. B785, pp. 591–604, 2018.
- [70] A. E. Mayo and J. D. Bekenstein, “No hair for spherical black holes: Charged and nonminimally coupled scalar field with selfinteraction,” *Phys. Rev.*, vol. D54, pp. 5059–5069, 1996.
- [71] A. Chamblin, R. Emparan, and G. W. Gibbons, “Superconducting p-branes and extremal black holes,” *Phys. Rev.*, vol. D58, p. 084009, 1998.
- [72] D. Tong, “String Theory,” 2009.
- [73] P. H. Ginsparg, “APPLIED CONFORMAL FIELD THEORY,” in *Les Houches Summer School in Theoretical Physics: Fields, Strings, Critical Phenomena Les Houches, France, June 28-August 5, 1988*, pp. 1–168, 1988.
- [74] J. L. Cardy, “Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories,” *Nucl. Phys.*, vol. B270, pp. 186–204, 1986.
- [75] H. W. J. Bloete, J. L. Cardy, and M. P. Nightingale, “Conformal Invariance, the Central Charge, and Universal Finite Size Amplitudes at Criticality,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 56, pp. 742–745, 1986.

- [76] S. Carlip, “What we don’t know about BTZ black hole entropy,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 15, pp. 3609–3625, 1998.
- [77] S. Carlip, “Logarithmic corrections to black hole entropy from the Cardy formula,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 17, pp. 4175–4186, 2000.
- [78] M. Henneaux and C. Teitelboim, “Asymptotically anti-De Sitter Spaces,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 98, pp. 391–424, 1985.
- [79] E. Shaghoulian, “Black hole microstates in AdS,” *Phys. Rev.*, vol. D94, no. 10, p. 104044, 2016.
- [80] S. Detournay, L.-A. Douchamps, G. S. Ng, and C. Zwickel, “Warped AdS₃ black holes in higher derivative gravity theories,” *JHEP*, vol. 06, p. 014, 2016.
- [81] E. Ayon-Beato, M. Bravo-Gaete, F. Correa, M. Hassaine, M. M. Juárez-Aubry, and J. Oliva, “First law and anisotropic Cardy formula for three-dimensional Lifshitz black holes,” *Phys. Rev.*, vol. D91, no. 6, p. 064006, 2015. [Addendum: *Phys. Rev.*D96,no.4,049903(2017)].
- [82] S. Carlip, “Entropy from conformal field theory at Killing horizons,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 16, pp. 3327–3348, 1999.
- [83] F. Correa, C. Martinez, and R. Troncoso, “Hairy Black Hole Entropy and the Role of Solitons in Three Dimensions,” *JHEP*, vol. 02, p. 136, 2012.
- [84] F. Correa, A. Faúndez, and C. Martínez, “Rotating hairy black hole and its microscopic entropy in three spacetime dimensions,” *Phys. Rev.*, vol. D87, no. 2, p. 027502, 2013.
- [85] G. T. Horowitz and R. C. Myers, “The AdS / CFT correspondence and a new positive energy conjecture for general relativity,” *Phys. Rev.*, vol. D59, p. 026005, 1998.
- [86] M. Cadoni and M. Serra, “Hyperscaling violation for scalar black branes in arbitrary dimensions,” *JHEP*, vol. 11, p. 136, 2012.
- [87] M. Alishahiha, E. O Colgain, and H. Yavartanoo, “Charged Black Branes with Hyperscaling Violating Factor,” *JHEP*, vol. 11, p. 137, 2012.
- [88] P. Bueno, W. Chemissany, P. Meessen, T. Ortin, and C. S. Shahbazi, “Lifshitz-like Solutions with Hyperscaling Violation in Ungauged Supergravity,” *JHEP*, vol. 01, p. 189, 2013.
- [89] M. Hassaine, “New black holes of vacuum Einstein equations with hyperscaling violation and Nil geometry horizons,” *Phys. Rev.*, vol. D91, no. 8, p. 084054, 2015.
- [90] X. Dong, S. Harrison, S. Kachru, G. Torroba, and H. Wang, “Aspects of holography for theories with hyperscaling violation,” *JHEP*, vol. 06, p. 041, 2012.
- [91] M. Alishahiha and H. Yavartanoo, “On Holography with Hyperscaling Violation,” *JHEP*, vol. 11, p. 034, 2012.
- [92] J. P. S. Lemos, “Cylindrical black hole in general relativity,” *Phys. Lett.*, vol. B353, pp. 46–51, 1995.
- [93] A. M. Awad, “Higher dimensional charged rotating solutions in (A)dS space-times,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 20, pp. 2827–2834, 2003.
- [94] C. Martinez, C. Teitelboim, and J. Zanelli, “Charged rotating black hole in three space-time dimensions,” *Phys. Rev.*, vol. D61, p. 104013, 2000.

- [95] C. Martinez and J. Zanelli, “Conformally dressed black hole in (2+1)-dimensions,” *Phys. Rev.*, vol. D54, pp. 3830–3833, 1996.
- [96] J. Crisostomo, R. Troncoso, and J. Zanelli, “Black hole scan,” *Phys. Rev.*, vol. D62, p. 084013, 2000.
- [97] E. Perlmutter, “Hyperscaling violation from supergravity,” *JHEP*, vol. 06, p. 165, 2012.
- [98] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet, and M. Hassaine, “Lifshitz Black Hole in Three Dimensions,” *Phys. Rev.*, vol. D80, p. 104029, 2009.
- [99] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet, and M. Hassaine, “Analytic Lifshitz black holes in higher dimensions,” *JHEP*, vol. 04, p. 030, 2010.
- [100] J. Tarrío and S. Vandoren, “Black holes and black branes in Lifshitz spacetimes,” *JHEP*, vol. 09, p. 017, 2011.
- [101] L. F. Abbott and S. Deser, “Stability of Gravity with a Cosmological Constant,” *Nucl. Phys.*, vol. B195, pp. 76–96, 1982.
- [102] L. F. Abbott and S. Deser, “Charge Definition in Nonabelian Gauge Theories,” *Phys. Lett.*, vol. 116B, pp. 259–263, 1982.
- [103] S. Deser and B. Tekin, “Gravitational energy in quadratic curvature gravities,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 101101, 2002.
- [104] S. Deser and B. Tekin, “Energy in generic higher curvature gravity theories,” *Phys. Rev.*, vol. D67, p. 084009, 2003.
- [105] C. Senturk, T. C. Sisman, and B. Tekin, “Energy and Angular Momentum in Generic F(Riemann) Theories,” *Phys. Rev.*, vol. D86, p. 124030, 2012.
- [106] W. Kim, S. Kulkarni, and S.-H. Yi, “Quasilocal Conserved Charges in a Covariant Theory of Gravity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, no. 8, p. 081101, 2013. [Erratum: *Phys. Rev. Lett.*112,no.7,079902(2014)].
- [107] Y. Gim, W. Kim, and S.-H. Yi, “The first law of thermodynamics in Lifshitz black holes revisited,” *JHEP*, vol. 07, p. 002, 2014.
- [108] E. A. Bergshoeff, O. Hohm, and P. K. Townsend, “Massive Gravity in Three Dimensions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, p. 201301, 2009.
- [109] S. Deser, “Ghost-free, finite, fourth order D=3 (alas) gravity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, p. 101302, 2009.
- [110] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “f(R) Theories Of Gravity,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 82, pp. 451–497, 2010.
- [111] C. Lanczos, “A Remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor in four dimensions,” *Annals Math.*, vol. 39, pp. 842–850, 1938.
- [112] B. Zumino, “Gravity Theories in More Than Four-Dimensions,” *Phys. Rept.*, vol. 137, p. 109, 1986.
- [113] M. Hassaine and J. Zanelli, *Chern-Simons (super) gravity*, vol. 2. World Scientific, 2016.

- [114] J. T. Wheeler, “Symmetric Solutions to the Maximally Gauss-Bonnet Extended Einstein Equations,” *Nucl. Phys.*, vol. B273, pp. 732–748, 1986.
- [115] X. O. Camanho and J. D. Edelstein, “A Lovelock black hole bestiary,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 30, p. 035009, 2013.
- [116] Z.-Y. Fan, B. Chen, and H. Lu, “Criticality in Einstein-Gauss-Bonnet gravity : gravity without graviton,” *Eur. Phys. J.*, vol. C76, no. 10, p. 542, 2016.
- [117] D. M. Hofman and J. Maldacena, “Conformal collider physics: Energy and charge correlations,” *JHEP*, vol. 05, p. 012, 2008.
- [118] D. G. Boulware and S. Deser, “String Generated Gravity Models,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, p. 2656, 1985.
- [119] R.-G. Cai, “Gauss-Bonnet black holes in AdS spaces,” *Phys. Rev.*, vol. D65, p. 084014, 2002.
- [120] G. Dotti, J. Oliva, and R. Troncoso, “Exact solutions for the Einstein-Gauss-Bonnet theory in five dimensions: Black holes, wormholes and spacetime horns,” *Phys. Rev.*, vol. D76, p. 064038, 2007.
- [121] G. Dotti, J. Oliva, and R. Troncoso, “Vacuum solutions with nontrivial boundaries for the Einstein-Gauss-Bonnet theory,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. A24, pp. 1690–1694, 2009.
- [122] G. Dotti, J. Oliva, and R. Troncoso, “Static solutions with nontrivial boundaries for the Einstein-Gauss-Bonnet theory in vacuum,” *Phys. Rev.*, vol. D82, p. 024002, 2010.
- [123] H. Maeda, “Gauss-Bonnet black holes with non-constant curvature horizons,” *Phys. Rev.*, vol. D81, p. 124007, 2010.
- [124] P. Kovtun, D. T. Son, and A. O. Starinets, “Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, p. 111601, 2005.
- [125] M. Brigante, H. Liu, R. C. Myers, S. Shenker, and S. Yaida, “Viscosity Bound Violation in Higher Derivative Gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D77, p. 126006, 2008.
- [126] M. Brigante, H. Liu, R. C. Myers, S. Shenker, and S. Yaida, “The Viscosity Bound and Causality Violation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 191601, 2008.
- [127] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, “Dimensionally continued black holes,” *Phys. Rev.*, vol. D49, pp. 975–986, 1994.
- [128] R.-G. Cai and K.-S. Soh, “Topological black holes in the dimensionally continued gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D59, p. 044013, 1999.
- [129] R. Aros, R. Troncoso, and J. Zanelli, “Black holes with topologically nontrivial AdS asymptotics,” *Phys. Rev.*, vol. D63, p. 084015, 2001.
- [130] N. Farhangkhah and M. H. Dehghani, “Lovelock black holes with nonmaximally symmetric horizons,” *Phys. Rev.*, vol. D90, no. 4, p. 044014, 2014.
- [131] S. Ohashi and M. Nozawa, “Lovelock black holes with a nonconstant curvature horizon,” *Phys. Rev.*, vol. D92, p. 064020, 2015.
- [132] N. Dadhich and J. M. Pons, “Static pure Lovelock black hole solutions with horizon topology $S^{(n)} \times S^{(n)}$,” *JHEP*, vol. 05, p. 067, 2015.

- [133] R.-G. Cai and N. Ohta, “Black Holes in Pure Lovelock Gravities,” *Phys. Rev.*, vol. D74, p. 064001, 2006.
- [134] N. Dadhich, R. Durka, N. Merino, and O. Miskovic, “Dynamical structure of Pure Lovelock gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 6, p. 064009, 2016.
- [135] P. K. Concha, R. Durka, C. Inostroza, N. Merino, and E. K. Rodríguez, “Pure Lovelock gravity and Chern-Simons theory,” *Phys. Rev.*, vol. D94, no. 2, p. 024055, 2016.
- [136] S. Deser and A. V. Ryzhov, “Curvature invariants of static spherically symmetric geometries,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 22, pp. 3315–3324, 2005.
- [137] J. Oliva and S. Ray, “Birkhoff’s Theorem in Higher Derivative Theories of Gravity,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 28, p. 175007, 2011.
- [138] J. Oliva and S. Ray, “Birkhoff’s Theorem in Higher Derivative Theories of Gravity II,” *Phys. Rev.*, vol. D86, p. 084014, 2012.
- [139] S. Deser and A. Schwimmer, “Geometric classification of conformal anomalies in arbitrary dimensions,” *Phys. Lett.*, vol. B309, pp. 279–284, 1993.
- [140] N. Boulanger, “Algebraic Classification of Weyl Anomalies in Arbitrary Dimensions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 261302, 2007.
- [141] G. D. Birkhoff and R. E. Langer, *Relativity and modern physics*, vol. 1. Harvard University Press Cambridge, 1923.
- [142] J. Oliva and S. Ray, “Classification of Six Derivative Lagrangians of Gravity and Static Spherically Symmetric Solutions,” *Phys. Rev.*, vol. D82, p. 124030, 2010.
- [143] R. C. Myers, M. F. Paulos, and A. Sinha, “Holographic studies of quasi-topological gravity,” *JHEP*, vol. 08, p. 035, 2010.
- [144] M. H. Dehghani and M. H. Vahidinia, “Quartic Quasi-topological Gravity, Black Holes and Holography,” *JHEP*, vol. 10, p. 210, 2013.
- [145] T. C. Sisman, I. Gullu, and B. Tekin, “All unitary cubic curvature gravities in D dimensions,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 28, p. 195004, 2011.
- [146] M. Siani, “Holographic Superconductors and Higher Curvature Corrections,” *JHEP*, vol. 12, p. 035, 2010.
- [147] X.-M. Kuang, W.-J. Li, and Y. Ling, “Holographic Superconductors in Quasi-topological Gravity,” *JHEP*, vol. 12, p. 069, 2010.
- [148] X.-M. Kuang, W.-J. Li, and Y. Ling, “Holographic p-wave Superconductors in Quasi-topological Gravity,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 29, p. 085015, 2012.
- [149] W. G. Brenna, M. H. Dehghani, and R. B. Mann, “Quasi-Topological Lifshitz Black Holes,” *Phys. Rev.*, vol. D84, p. 024012, 2011.
- [150] M. H. Dehghani and M. H. Vahidinia, “Surface Terms of Quasitopological Gravity and Thermodynamics of Charged Rotating Black Branes,” *Phys. Rev.*, vol. D84, p. 084044, 2011.
- [151] W. G. Brenna and R. B. Mann, “Quasi-topological Reissner-Nordstrom Black Holes,” *Phys. Rev.*, vol. D86, p. 064035, 2012.

- [152] M. A. Ganjali, “Hyperscaling-violating Lifshitz Solutions in Cubic Gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 2, p. 024002, 2016.
- [153] M. Ghanaatian, A. Bazrafshan, S. Taghipoor, and R. Tawoosi, “Magnetic Brane of Cubic Quasi-Topological Gravity in the Presence of Maxwell and Born-Infeld Electromagnetic Field,” *Can. J. Phys.*, vol. 96, no. 11, pp. 1209–1215, 2018.
- [154] M. Chernicoff, O. Fierro, G. Giribet, and J. Oliva, “Black holes in quasi-topological gravity and conformal couplings,” *JHEP*, vol. 02, p. 010, 2017.
- [155] C. C. Briggs, “A General expression for the quintic Lovelock tensor,” 1996.
- [156] R. S. Palais, “The principle of symmetric criticality,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 69, no. 1, pp. 19–30, 1979.
- [157] S. Deser and J. Franklin, “Schwarzschild and Birkhoff a la Weyl,” *Am. J. Phys.*, vol. 73, pp. 261–264, 2005.
- [158] R. Zegers, “Birkhoff’s theorem in Lovelock gravity,” *J. Math. Phys.*, vol. 46, p. 072502, 2005.
- [159] S. Deser and J. Franklin, “Birkhoff for Lovelock redux,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 22, pp. L103–L106, 2005.
- [160] S. Ray, “Birkhoff’s theorem in Lovelock gravity for general base manifolds,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 32, no. 19, p. 195022, 2015.
- [161] J. Oliva, “All the solutions of the form $M2(\text{warped}) \times \Sigma(d - 2)$ for Lovelock gravity in vacuum in the Chern-Simons case,” *J. Math. Phys.*, vol. 54, p. 042501, 2013.
- [162] G. Dotti and R. J. Gleiser, “Obstructions on the horizon geometry from string theory corrections to Einstein gravity,” *Phys. Lett.*, vol. B627, pp. 174–179, 2005.
- [163] C. Bogdanos, C. Charmousis, B. Gouteraux, and R. Zegers, “Einstein-Gauss-Bonnet metrics: Black holes, black strings and a staticity theorem,” *JHEP*, vol. 10, p. 037, 2009.
- [164] P. Bueno and P. A. Cano, “Einsteinian cubic gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D94, no. 10, p. 104005, 2016.
- [165] P. Bueno, P. A. Cano, V. S. Min, and M. R. Visser, “Aspects of general higher-order gravities,” *Phys. Rev.*, vol. D95, no. 4, p. 044010, 2017.
- [166] C. Cadeau and E. Woolgar, “New five-dimensional black holes classified by horizon geometry, and a Bianchi VI brane world,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 18, pp. 527–542, 2001.
- [167] L. Smarr, “Mass formula for Kerr black holes,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 30, pp. 71–73, 1973. [Erratum: *Phys. Rev. Lett.* 30, 521 (1973)].
- [168] M. M. Caldarelli, G. Cognola, and D. Klemm, “Thermodynamics of Kerr-Newman-AdS black holes and conformal field theories,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 17, pp. 399–420, 2000.
- [169] D. Kastor, S. Ray, and J. Traschen, “Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 26, p. 195011, 2009.
- [170] W. G. Brenna, R. B. Mann, and M. Park, “Mass and Thermodynamic Volume in Lifshitz Space-times,” *Phys. Rev.*, vol. D92, no. 4, p. 044015, 2015.

- [171] A. Sheykhi, M. H. Dehghani, and R. Dehghani, “Horizon Thermodynamics and Gravitational Field Equations in Quasi-Topological Gravity,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 46, p. 1679, 2014.
- [172] R. A. Hennigar, W. G. Brenna, and R. B. Mann, “ $P - v$ criticality in quasitopological gravity,” *JHEP*, vol. 07, p. 077, 2015.