



UNIVERSIDAD DE TALCA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL DE MINAS

CO-SIMULACIÓN GEOESTADÍSTICA POR BANDAS ROTANTES
ENTRE LA INTENSIDAD VOLUMÉTRICA DE FRACTURAS (P32) Y
FRECUENCIA DE FRACTURAS (FF) PARA DATOS DE SONDAJE.

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS

FERNANDO ANTONIO MANCILLA PEÑA

PROFESOR GUÍA:

D.Sc AMIN HEKMATNEJAD

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

D.Sc MANUEL REYES JARA

D.Sc MOHAMMAD MALEKI

CURICÓ – CHILE

2020

CONSTANCIA

La Dirección del Sistema de Bibliotecas a través de su encargado Biblioteca Campus Curicó certifica que el autor del siguiente trabajo de titulación ha firmado su autorización para la reproducción en forma total o parcial e ilimitada del mismo.



Two circular official stamps and handwritten signatures in blue ink. The left stamp is from the 'DIRECCIÓN SISTEMA DE BIBLIOTECAS' of the 'UNIVERSIDAD DE TALCA'. The right stamp is from the 'SISTEMA DE BIBLIOTECAS CAMPUS CURICO' of the 'UNIVERSIDAD DE TALCA'.

Curicó, 2022

Resumen

La caracterización de las discontinuidades presentes en el macizo rocoso corresponde a una componente importante en la evaluación geotécnica de una operación minera, debido a la baja resistencia de las fracturas en comparación con la roca intacta. La intensidad de fracturas es un factor que mide el grado de fracturamiento presente en el macizo, esta variable es medible tanto en operaciones de rajo abierto como subterráneas a partir de sondajes, scanline, o mapeo de galerías, y está relacionada con las principales problemáticas geomecánicas que afectan el diseño minero, la estabilidad, necesidades de soporte, fragmentación, entre otras.

En la siguiente memoria se realiza una co-simulación por bandas rotantes para una base de datos de intensidad de fracturas, caracterizada por la frecuencia de fracturas (FF), y la intensidad volumétrica de fracturas (P32), correspondiente a datos hidrogeológicos de una mina a rajo abierto ubicada en el norte de Chile. Se realizó un modelo variográfico completo, luego este se validó por técnicas de validación cruzada, y se generaron cien realizaciones de co-simulación geoestadística, además de un modelo de cokriging para la comparación de resultados. Las realizaciones obtenidas de la simulación pueden ser utilizadas como una distribución probabilística para la variable simulada en cada bloque, en base a esto se pueden utilizar algunas aplicaciones probabilísticas que ayudan a definir las zonas geotécnicas en base al grado de fracturamiento en el macizo.

Se generó un modelo insesgado, con una validación cruzada correcta por la metodología de *leave one out*, se demostró la mayor presencia de datos atípicos, y menor suavizamiento en comparación con un modelo de cokriging. Al utilizar técnicas de simulación para estimar parámetros geotécnicos como la intensidad de fracturas es posible crear una imagen de la heterogeneidad presente en un macizo rocoso, de manera de generar un modelo geotécnico que considere la incertidumbre en el grado de fracturamiento y por ende con menor un riesgo económico y operacional.

Palabras clave: frecuencia de fracturas, intensidad volumétrica, bandas rotantes, simulación geoestadística.

Abstract

The characterization of the discontinuities present in a rock mass is an important component in the geotechnical evaluation of a mining operation, due to the lowest fracture strength compared with intact rock. Fracture intensity is a factor that measures the degree of fracturing in a mass rock, this variable is measurable in open pit and underground operations from boreholes, scanlines or tracemaps, and is related to the main geomechanic problems that affects the mining design, stability, support needs and fragmentation, among others.

In the following case a co-simulation by turning bands is performed for a database of fracture intensity, characterized by the corrected fracture frequency (FF), and the volumetric fracture intensity (P32), corresponding to data from an open pit mine located in the northern of Chile. A complete variographic model was made, then it was validated by cross-validation techniques, one hundred realisations were generated, and a cokrige model to contrast the results. The obtained realisations can be used as the distribution of values for each block and thus make probabilistic applications that helps to define the main geotechnical zones based in the degree of fracturing in the rock mass.

An unbiased model was generated, with a correct cross-validation carried out by the methodology of leaving one out, the simulation mean results shows more atypical data and less smoothing effect compared with cokriging results. By using simulation techniques to estimate geotechnical parameters such as fracture intensity, it is possible to create an image of the heterogeneity in a rock mass and model its uncertainty, with applications in the current geotechnical characterization as fault zones, to manage the concentration of stresses, and estimate the productivity of the extraction points, in order to generate an economic model that considers uncertainty, and therefore, with lower associated risk.

Keywords: fracture frequency, volumetric intensity, turning bands, geostatistical simulation

*No te quedes inmóvil al borde del camino
No congeles el júbilo, no quieras con desgana
No te salves, ahora ni nunca, no te salves
No te llenes de calma*

*No reserves del mundo solo un rincón tranquilo
No dejes caer los párpados pesados como juicios
No te quedes sin labios, no te duermas sin sueño
No te pienses sin sangre, no te juzgues sin tiempo*

Mario Benedetti

Agradecimientos

A mis amigos, y a todos los que me acompañaron en este largo camino para convertirme en profesional.

A mis compañeros del hogar de estudiantes por siempre hacerme sentir como en casa, a los auxiliares y guardias de la universidad por su ayuda en lo extraacadémico, y su gran amabilidad.

A mi profesor guía Amin Hekmatnejad por entregarme parte de su conocimiento, por su paciencia, consejo y ejemplo, y a mi amigo Álvaro Opazo por los partidos de ping pong, las conversaciones y su apoyo en la búsqueda del conocimiento.

En especial a mi padre, Miguel Mancilla (QEPD) por enseñarme a siempre confiar en mí y aspirar a ser más, y por sobre todo a mi madre Marta Peña que siempre me ha dado su cariño y confianza, aún en los momentos más difíciles y que tengo la suerte de que esté conmigo en este momento tan especial de mi vida.

Tabla de contenido

Resumen	1
Abstract.....	2
Agradecimientos.....	4
CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN.....	14
1.1 Motivación	14
1.2 Descripción del problema	15
1.3 Solución propuesta	16
1.4 Objetivos y alcances.....	17
1.4.1 Objetivo general	17
1.4.2 Objetivos específicos.....	17
1.4.3 Alcances.....	17
1.6 Metodologías y herramientas utilizadas	18
1.7 Resultados esperados.....	18
1.8 Organización del documento.....	19
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO.....	20
2.1 Geotecnia y geomecánica	20
2.1.1 Discontinuidades.....	20
Tipos de discontinuidades.....	21
2.2 Sistemas de clasificación de macizo rocoso.....	22
2.2.1 Rock quality design.....	22
2.2.2 Rock mass rating	24
2.2.3 Índice Q de Barton	25
2.2.4 Spacing (Sf)	26
2.2.5 Frecuencia de fracturas (FF).....	27

2.2.6 Intensidad de fracturas.....	29
2.2.7 Redes de fracturas discretas (DFN)	30
2.3 Estimación de P32	32
2.3.1 Metodología de Dershowitz, 1991.....	32
2.3.2 Metodología de Zhang & Einstein, 2000	33
2.3.3 Metodología de Wang, 2006	35
2.3.4 Cálculo de P32 de forma directa.	37
2.4 Conceptos de geoestadística	38
2.4.1 Variable regionalizada.....	38
2.4.2 Soporte	38
2.4.3 Análisis exploratorio de datos	39
2.5 Modelamiento variográfico.....	39
2.5.1 Variograma experimental.....	40
2.5.2 Variograma modelado.....	42
2.5.3 Variograma cruzado	45
2.6 Estimación por Kriging.....	46
2.6.1 Kriging de media conocida (Kriging simple).....	48
2.6.2 Kriging de media desconocida (Kriging ordinario).....	49
2.6.3 Co-kriging.....	50
2.7 Simulación geoestadística.	51
2.7.1 Anamorfosis gaussiana.....	52
2.7.2 Simulación secuencial.....	53
2.7.3 Métodos de simulación condicional	54
2.7.4 Método de Bandas rotantes	55
2.8 Estado del arte: Geoestadística aplicada en geomecánica.....	58

CAPÍTULO 3: METODOLOGIA: COSIMULACIÓN POR BANDAS ROTANTES....	61
3.1 Composición de FF y P32.....	61
3.2 Análisis exploratorio de los datos	64
3.3 Anamorfosis gaussiana	69
3.4 Modelamiento variográfico.....	71
3.5 Selección de parámetros de simulación	73
3.6 Validación cruzada.....	75
CAPITULO 4: RESULTADOS.....	77
4.1 Resultados de la primera realización.....	78
4.2 Resultados del promedio de cien realizaciones.....	80
4.3 Resultados del mínimo y máximo de cien realizaciones	82
4.3 Resultados del modelo de cokriging	84
CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	86
5.1 CONCLUSIONES.....	86
5.2 RECOMENDACIONES	87
CAPÍTULO 6: BIBLIOGRAFÍA	88
CAPÍTULO 7: ANEXOS	94

Índice de Ilustraciones

Ilustración 1: Tipos de falla, (Priest, 1993).	21
Ilustración 2: Distintos testigos para valores de RQD de 0 y 100%. (Palmstrom, 2012).	23
Ilustración 3: Direccionalidad del RQD, comparación con el índice, J_v de Palmstrom, (Palmstrom, 2012).	23
Ilustración 4: Direccionalidad de FF, en azul se observa un sondaje vertical con $FF=9$ [1/m], y en naranja un sondaje inclinado con $FF=2$ [1/m]. (Erazo, 2008).	28
Ilustración 5: Formación de bloques a partir de un modelo DFN. Elmo et al, 2014.	31
Ilustración 6: Clasificación de fracturas, según extremos observables, (Zhang & Einstein, 2000).	34
Ilustración 7 Triángulo formado por normal de fractura (n), polo medio de Fisher (m), y línea de mapeo (s), (Wang, 2006).	36
Ilustración 8: Tolerancia en la longitud del vector h y en la orientación, (Emery, 2007)	41
Ilustración 9: Alcance (range), y meseta (sill) en un variograma esférico, (Bardossy, 1997).	42
Ilustración 10: a) Variograma modelado caso con, y sin efecto pepita b) Variogramas experimentales, (Chilés & Delfiner, 2012).	43
Ilustración 11: a) Variable regionalizada con comportamiento esférico b) Variograma teórico esférico, (Emery, 2007).	44
Ilustración 12: a) Variable regionalizada con comportamiento exponencial b) variograma teórico exponencial, (Emery, 2007).	44
Ilustración 13: a) Variable con comportamiento gaussiano b) variograma teórico gaussiano, (Emery, 2007).	45
Ilustración 14: Vecindad móvil elíptica para 3 datos por cuadrante, (Emery, 2007).	47
Ilustración 15: Anamorfosis gaussiana, (Emery, 2007)	52
Ilustración 16: Efecto de la vecindad móvil en la simulación gaussiana secuencial, (Emery, 2007).	54

Ilustración 17: Imagen esquemática de las bandas rotantes (i) correspondientes a una región P. (MANTOGLOU & WILSON, 1982).	56
Ilustración 18: Ángulo δ entre línea de sondaje y normal a fractura. Elaboración propia.	62
Ilustración 19 a) Vista Norte-Este de compósitos, para FF. b) Vista Norte-Cota de compósitos, para FF. c) Vista Este-Cota de compósitos, para FF. Elaboración propia.	64
Ilustración 20:a) Vista Norte-Este de compósitos, para P32. b) Vista Norte-Cota de compósitos, para P32. c) Vista Este-Cota de compósitos, para P32. Elaboración propia.	65
Ilustración 21: a) Vista 3D de compósitos, para a) FF. b) P32. Elaboración propia.	65
Ilustración 22: a) Histograma de compósitos para FF b) Histograma de compósitos para P32. Elaboración propia.	67
Ilustración 23: a) Media condicional de compósitos por Cota, para FF. b) Media condicional de compósitos por cota para FF. Elaboración propia.	67
Ilustración 24: Nube de dispersión entre FF y P32. Elaboración propia.....	68
Ilustración 25: Histograma de valores gaussianos para FF y P32. Elaboración propia.	69
Ilustración 26: a) Histograma ncores para FF, b) Histograma ncores para P32. Elaboración propia.	69
Ilustración 27: Modelamiento de colas para histograma de ncores de a) FF, b) P32. Elaboración propia.	70
Ilustración 28: Variogramas directos y cruzados para FF y P32 Elaboración propia.	72
Ilustración 29: Diagrama de exactitud para a) FF, b) P32. Elaboración propia.....	76
Ilustración 30: Diagrama de precisión para a) FF, b) P32. Elaboración propia.....	76
Ilustración 31: Histograma primera realización, para FF y P32. Elaboración propia.	78
Ilustración 32:: Vista cortes 3D de primera realización , para a) FF, b) P2. Elaboración propia.	79

Ilustración 33: Histograma del promedio de cien realizaciones, para FF y P32. Elaboración propia.....	80
Ilustración 34: Vista cortes 3D del promedio de 100 realizaciones, para a) FF, b) P2. Elaboración propia.....	81
Ilustración 35: Vista cortes 3D del mínimo de 100 realizaciones, para a) FF, b) P2. Elaboración propia.....	82
Ilustración 36: Vista cortes 3D del máximo de 100 realizaciones, para a) FF, b) P2. Elaboración propia.....	83
Ilustración 37: Histograma del cokriging, para FF y P32. Elaboración propia.....	84
Ilustración 38: Vista cortes 3D de cokriging para, a) FF, b) P32. Elaboración propia.....	85
Ilustración 39: Código Matlab para compositación de FF y P32. Elaboración propia.....	94
Ilustración 40: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para la primera realización de FF. Elaboración propia.....	95
Ilustración 41: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para la primera realización de FF. Elaboración propia.....	96
Ilustración 42: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para la primera realización de FF. Elaboración propia.....	97
Ilustración 43: Cortes Este-Cota de Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para la primera realización de FF. Elaboración propia.....	98
Ilustración 44: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para la primera realización de P32. Elaboración propia.....	99
Ilustración 45: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para la primera realización de P32. Elaboración propia.....	100
Ilustración 46: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para la primera realización de P32. Elaboración propia.....	101
Ilustración 47: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para la primera realización de P32. Elaboración propia.....	102
Ilustración 48: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el promedio de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.....	103

Ilustración 49: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para el promedio de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.....	104
Ilustración 50: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el promedio de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.....	105
Ilustración 51: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el promedio de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.....	106
Ilustración 52: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el promedio de 100 realizaciones de P32. Elaboración propia.....	107
Ilustración 53: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para el promedio de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.....	108
Ilustración 54: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el promedio de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.	109
Ilustración 55: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el promedio de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.	110
Ilustración 56: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el mínimo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.....	111
Ilustración 57: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para el mínimo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.....	112
Ilustración 58: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el mínimo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.	113
Ilustración 59: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el mínimo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.	114
Ilustración 60: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el mínimo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.....	115
Ilustración 61: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para el mínimo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.....	116
Ilustración 62: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el mínimo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.....	117
Ilustración 63: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el mínimo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.	118

Ilustración 64: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el máximo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.....	119
Ilustración 65: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para el máximo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.....	120
Ilustración 66: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el máximo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia	121
Ilustración 67: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el máximo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.	122
Ilustración 68: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el máximo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.....	123
Ilustración 69: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para el máximo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.....	124
Ilustración 70: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el máximo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.....	125
Ilustración 71: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el máximo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.	126
Ilustración 72: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el cokriging de FF. Elaboración propia.....	127
Ilustración 73: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m el cokriging de FF. Elaboración propia.....	128
Ilustración 74: Cortes Este-Cota para Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el cokriging FF de. Elaboración propia.....	129
Ilustración 75: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el cokriging de FF. Elaboración propia.....	130
Ilustración 76: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para la varianza de cokriging de FF. Elaboración propia.....	131
Ilustración 77: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para la varianza de cokriging de FF. Elaboración propia.....	132
Ilustración 78: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para la varianza de cokriging de FF. Elaboración propia.....	133

Ilustración 79: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para la varianza de cokriging de FF. Elaboración propia.....	134
Ilustración 80: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el cokriging de P32. Elaboración propia.....	135
Ilustración 81: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para el cokriging de P32. Elaboración propia.....	136
Ilustración 82: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el cokriging de P32. Elaboración propia.....	137
Ilustración 83: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el cokriging de P32. Elaboración propia.....	138
Ilustración 84: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para varianza de cokriging de P32. Elaboración propia.....	139
Ilustración 85: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para la varianza de cokriging de P32. Elaboración propia.....	140
Ilustración 86: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para la varianza de cokriging de P32. Elaboración propia.....	141
Ilustración 87: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para la varianza de cokriging de P32. Elaboración propia.....	142

Índice de tablas

Tabla 1: Medidas de intensidad de fracturas, (Palleske, 2014)	29
Tabla 2: Valor de $1/C_{13}$ para una distribución Fischer de parámetros k y p , (Wang, 2006).....	36
Tabla 3: Estadísticas básicas de los compósitos. Elaboración propia.....	66
Tabla 4: Parámetros utilizados en variograma experimental. Elaboración propia..	71
Tabla 5: Parámetros para creación de Grilla. Elaboración propia.....	74
Tabla 6: Estadísticas primera realización de co-simulación. Elaboración propia.....	78
Tabla 7: Estadísticas del promedio de cien realizaciones. Elaboración propia.....	80
Tabla 8: Estadísticas de cokriging para FF y P32. Elaboración propia.....	84

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación

La caracterización del fracturamiento presente en la matriz de roca es un asunto de vital importancia en una operación minera. La mayor parte de los problemas geomecánicos presentes en la minería tanto de superficie como subterránea tienen su origen en las discontinuidades presentes y sus características. Algunos ejemplos de esto son:

- La presencia de fracturas en la roca tiene un efecto de “debilitamiento” debido a que las discontinuidades tienen una resistencia a la tracción y resistencia al corte despreciables, y en la mayoría de los casos significativamente menor que la roca que las rodea (PRIEST, 1993).
- La predicción de la fragmentación es una de las más grandes preocupaciones para una operación de caving, y una incorrecta evaluación de esta puede potencialmente resultar en la pérdida de valor del proyecto y su seguridad. Mediante modelos de redes de fracturas (DFN), y utilizando la intensidad volumétrica (P32), se puede tener una idea del carácter estructural del macizo y hacer un enlace directo con su fragmentación (Munkhchuluun, 2017).
- La intensidad de fracturas se puede utilizar como una relación mejorada entre las estructuras mapeadas y la resistencia del macizo rocoso en comparación con los sistemas empíricos de clasificación de macizo rocoso por sí solos (Elmo et al, 2014).
- En la mina el Teniente, la mayor parte de los casos observados de daño en la roca por estallido de roca en túneles y equipos son el resultado de cuñas controladas estructuralmente, por lo tanto, durante el desarrollo de túneles es crítico obtener una descripción detallada de las estructuras

presentes en la roca, y seguido, caracterizar y entender las estructuras de roca que rodean la excavación (Brzovic & Leon, 2017).

- La intensidad de fracturas es un parámetro de gran importancia en la evaluación del grado de fracturamiento en la operación, además se utiliza para desarrollar modelos de redes de fracturas (DFN) , que corresponde a una metodología que permite describir el sistema de fracturas del macizo rocoso de forma estadística construyendo una serie de fracturas como objetos discretos basados en las observaciones de campo (Rogers, Elmo, Webb, & Catalan, 2015).

Debido a lo anterior, es importante cuantificar el fracturamiento presente en la roca antes de la puesta en marcha de la operación minera, para así poder predecir posibles problemáticas asociadas a esta y mitigar sus efectos tanto económicos, operacionales y de seguridad minera.

1.2 Descripción del problema

La naturaleza de las discontinuidades es tridimensional, pero sus características deben ser inferidas a partir de muestreo unidimensional (sondajes, o scanline) o bidimensional (mapeo de galerías), debido a la dificultad de obtener datos tridimensionales por su elevado costo. Es por esto por lo que además de medir las variables in situ es necesario generar un modelo espacial que extrapole los valores medidos a un soporte de bloques.

Para la caracterización geomecánica del yacimiento son ampliamente utilizados los sistemas de clasificación de macizo rocoso como el RQD, RMR, o Q de Barton . Estos esquemas son modelos empíricos basados en zonificación y promedios, por lo que una amplia región del macizo (zona geotécnica) queda caracterizada por un solo valor correspondiente al promedio de los valores mapeados in situ.

La utilización de valores promedio es una aproximación riesgosa, ya que, las principales problemáticas geomecánicas en el yacimiento están relacionadas con los valores extremos (mínimo y máximo) de estas variables, y además existen variables para las cuales el promedio no es representativo (variables no aditivas, escala-dependientes).

En síntesis, es importante medir el fracturamiento in situ de la operación, y además, es necesario conocer el comportamiento espacial de la intensidad de fracturas, así como la ubicación de los valores extremos, ya que, una zona altamente fracturada puede tener un efecto favorable o desfavorable para la operación dependiendo de su ubicación. Por ejemplo, en una operación de caving, mayor cantidad de fracturas en el nivel de hundimiento aseguran una mejor fragmentación, pero en el caso de un pilar de roca la estabilidad disminuye considerablemente al encontrarse este fracturado.

1.3 Solución propuesta

En la presente memoria se aplicará un modelo de Co-simulación gaussiana mediante el algoritmo de bandas rotantes entre la frecuencia de fracturas y la intensidad volumétrica de modo de estimar ambas variables en un soporte de bloques.

Se decidió utilizar una metodología multivariable, para aprovechar mejor los datos de fracturamiento levantados en terreno, y utilizar la relación entre ambas variables en la estimación, además al usar un algoritmo de simulación se puede modelar de mejor manera la variabilidad de los datos, ya que, cada valor estimado corresponde a una realización de una variable gaussiana correspondiente con la variable original. Además, se genera un modelo geoestadístico a una variable geotécnica, que generalmente se estima a partir de zonificación y promedio.

1.4 Objetivos y alcances

1.4.1 Objetivo general

- Estimar el comportamiento espacial del fracturamiento presente en un yacimiento de cielo abierto, mediante herramientas geoestadísticas.

1.4.2 Objetivos específicos

- Caracterizar la variabilidad espacial presente en la base de datos.
- Utilizar herramientas de modelamiento multivariable.
- Validar el modelo de estimación de forma cuantitativa.
- Proyectar aplicaciones del modelo desarrollado a la estimación de variables geotécnicas.

1.4.3 Alcances

Se considera realizar todo el análisis estadístico y variográfico de las variables, saneamiento de datos (si corresponde), simulación, validación y posterior análisis de los resultados. En esta memoria los datos se consideran correctamente mapeados (sin error de medición), y no se centra en razones computacionales de la elección de algoritmos alternativos al método de bandas rotantes.

1.6 Metodologías y herramientas utilizadas

El trabajo realizado en esta memoria utiliza en la mayoría de sus tareas el software Xlib desarrollado por el profesor Xavier Emery de la Universidad de Chile, este programa trabaja con subrutinas en base a archivos de parámetros editables y permite realizar cada una de las tareas correspondientes a un estudio geoestadístico desde el análisis exploratorio, hasta utilizar un algoritmo de simulación o cokriging. Se eligió este software debido a que corresponde a un a optimización del código del programa GSLIB, que permite menor tiempo de cálculo para todas sus rutinas y subrutinas.

1.7 Resultados esperados

Se busca lograr un modelo insesgado de estimación de intensidad de fracturamiento a partir de datos de sondaje, para esto se debe lograr un modelo variográfico correctamente modelado, aplicar un algoritmo de simulación y validarlo por técnicas de validación cruzada. Así las simulaciones deben tener afinidad con los datos reales, también se espera demostrar que la estimación por algoritmos de simulación entrega una estimación menos suavizada que el kriging, por lo que deberían existir datos atípicos más cercanos a los reales y que la grilla de estimación muestre una mayor variabilidad.

1.8 Organización del documento

En el capítulo dos se hace una revisión bibliográfica sobre la estimación de la intensidad de fracturamiento, la geoestadística y sus aplicaciones, y un estado del Arte sobre la aplicación de geoestadística a parámetros geomecánicos.

El capítulo tres abarca el análisis variográfico realizado para generar el modelo geoestadístico de las variables, el análisis exploratorio, transformación gaussiana, desagrupamiento, variograma experimental, modelamiento variográfico y validación cruzada, también se presenta la grilla utilizada y los parámetros de región de búsqueda.

En el capítulo cuatro se entregan los resultados, correspondientes a cortes de la grilla de co-simulación y cokriging, la comparación de las figuras y las estadísticas de la estimación con los datos reales.

En el capítulo cinco se entregan las conclusiones y recomendaciones relacionadas al estudio realizado, se trata de reflexionar sobre los problemas resueltos, posibles mejoras y trabajo futuro.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1 Geotecnia y geomecánica

El concepto de mecánica de rocas es a menudo utilizado en la práctica minera para referirse a la aplicación de la ingeniería mecánica al diseño de estructuras de roca necesarios en la actividad minera. La mecánica de rocas a su vez forma parte del concepto de geomecánica que además agrupa todos los materiales geológicos, incluyendo suelos.

Según la sociedad australiana de geomecánica, se define geomecánica como “La aplicación de la ingeniería y los principios geológicos, al comportamiento del sub-suelo y el agua subterránea y el uso de estos principios en ingeniería civil, minería, explotación marina y medioambiente en su amplio sentido”

El término geotecnia es cercano a un sinónimo de geomecánica, sin embargo, la geomecánica corresponde a una herramienta matemática que sintetiza la mecánica de suelos y rocas, hidrogeología y sismología. Geotecnia corresponde a la rama de la ingeniería relacionada con el estudio de dichas propiedades de los materiales de la tierra.

2.1.1 Discontinuidades

Las discontinuidades corresponden a cualquier separación en una matriz de roca, debido a cero o baja resistencia a la tracción, son ellas las que diferencian mayormente a un macizo rocoso de otros materiales de ingeniería. Por esto es necesaria una buena caracterización del fracturamiento para determinar las propiedades de las rocas.

Tipos de discontinuidades

Existen tipos principales para agrupar las discontinuidades que están bien definidos (PRIEST, 1993), dentro de los cuales se encuentran:

- a) Fallas (*faults*): Las fallas son discontinuidades con un desplazamiento de corte identificable. Se puede reconocer la separación de la roca en dos caras opuestas del plano de falla, el sentido de este desplazamiento sirve para clasificar estas fallas.

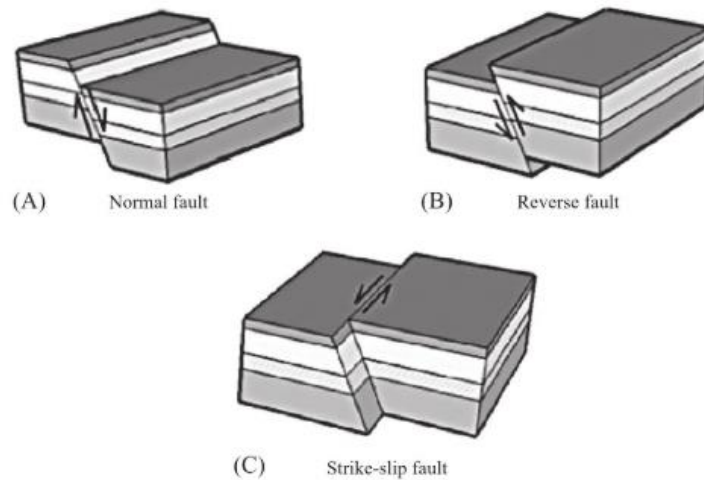


Ilustración 1: Tipos de falla, (Priest, 1993).

- b) Planos de estratificación (*bedding planes*): Los planos de estratificación dividen las rocas sedimentarias en estratos. Estos representan la interrupción en el curso de la depositación del macizo rocoso, generalmente tienen una alta persistencia, además sedimento de vientos o agua muy cargada pueden generar planos de estratificación cruzados o discordantes. Existen planos de debilidad según el sentido de depositación de las partículas en la roca que es paralelo a los planos de estratificación.
- c) Diaclasas (*joints*): Las diaclasas son las discontinuidades más comunes, y generalmente las más significativas geotécnicamente (Zhang, 2016). Son quiebres en los cuales no existe un desplazamiento significativo. Un grupo

de diaclasas paralelas o sub-paralelas generan un set (*joint set*), y varios sets que se interceptan generan un sistema de diaclasas (*joint system*).

2.2 Sistemas de clasificación de macizo rocoso

Durante las etapas de factibilidad y diseño preliminar donde poca información detallada de características como los esfuerzos presentes en el macizo rocoso y características hidrogeológica, el uso de un esquema de clasificación de macizo rocoso puede tener un beneficio considerable (Hoek, 2007).

Uno o más sistemas de clasificación de macizo rocoso pueden ser utilizados para generar una idea de la composición y características del macizo rocoso, así como, una estimación inicial de requerimientos de soporte y las propiedades de esfuerzo y deformación.

Existen diversos tipos de sistemas de clasificación de macizo rocoso, en este caso se consideran las más utilizadas en la actualidad que corresponden a el rock quality design (RQD) (Deere, 1963), el rock mass rating (RMR) (Bieniawski, 1973), y el índice Q de Barton (Barton et al 1974), además de medidas de fracturamiento como el Spacing (Sf), frecuencia de fracturas (FF), e intensidad de fracturamiento.

2.2.1 Rock quality design

El índice RQD o "*rock quality designation*" fue desarrollado por Deere (Deere, 1963), es una medida del grado de fracturamiento en un macizo rocoso a partir de testigos de sondaje.

Este parámetro fue definido como el porcentaje de trozos de tamaño mayor de 100 mm en relación con el largo total del testigo, el uso más importante del RQD es en métodos de clasificación de macizo rocoso como, el RMR y el Q de Barton.

Existen ciertas limitaciones para este parámetro, por ejemplo, un RQD de 0 sólo significa que las distancias entre trozos de sondaje son menores a 10cm, mientras que un RQD de 100 solo nos indica que el spacing es de 11 cm o más. Por último, no entrega ninguna información de los trozos menores a 10 cm que fueron descartados (Palmstrom, 2005).

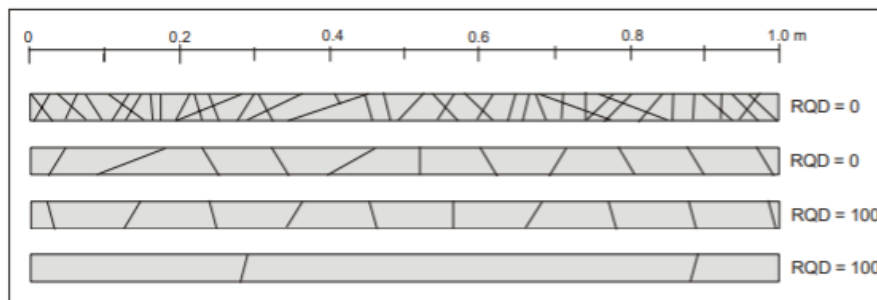


Ilustración 2: Distintos testigos para valores de RQD de 0 y 100%. (Palmstrom, 2012).

De forma similar a otros parámetros medidos en una dimensión RQD es direccional, y debido a su definición es más sensible a la dirección de la línea o pozo de sondaje que el spacing o FF. Por ejemplo, el RQD puede tener valores extremos de 0 o 100 para la misma cantidad de bloques, solo debido a su direccionalidad.

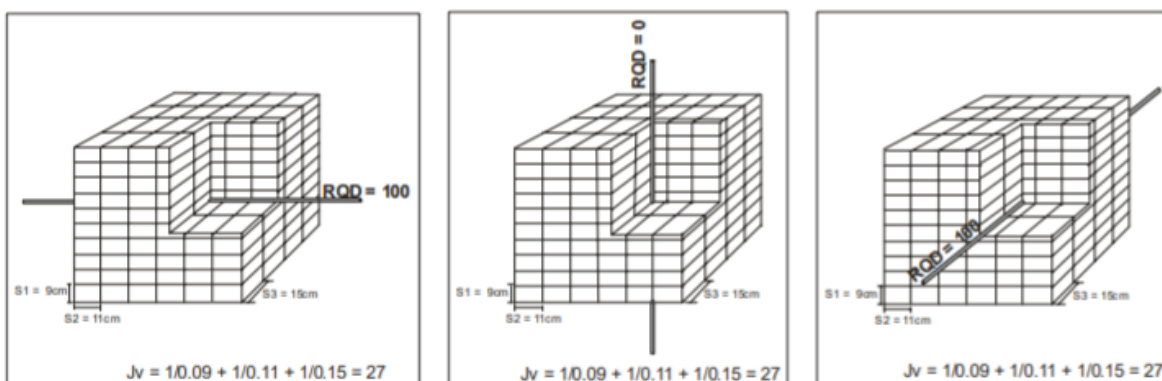


Ilustración 3: Direccionalidad del RQD, comparación con el índice, J_v de Palmstrom, (Palmstrom, 2012).

2.2.2 Rock mass rating

Bieniawski (Bieniawski, 1973) propuso un sistema de clasificación llamado “rock mass rating”, es uno de los sistemas de clasificación más usados para la clasificación de macizo rocoso. Con el tiempo este sistema ha sido refinado, y se examinaron más casos, lo que generó cambios significativos y distintas versiones. Las versiones más utilizadas son las del año 1976 y 1989. Se requiere de seis parámetros para clasificar un macizo usando el sistema RMR:

1. Resistencia a la compresión simple (UCS).
2. Rock quality designation (RQD).
3. Espaciamiento de discontinuidades (spacing).
4. Condición de discontinuidades.
5. Condiciones de agua subterránea.
6. Orientación de discontinuidades.

Para aplicar este sistema de clasificación el macizo es dividido en regiones estructurales, y cada región es clasificada por separado. En general los bordes de las regiones estructurales están definidos por una estructura mayor como una falla, o un cambio en el tipo de roca (Hoek, 2007), y en algunos casos cambios significativos en el spacing, u otra característica dentro de una misma región hacen necesario una subdivisión en regiones más pequeñas.

2.2.3 Índice Q de Barton

Barton, basado en la evaluación de una gran cantidad de casos de excavaciones subterráneas, del instituto noruego de geotecnia propuso un índice de calidad de túneles (Q) (Barton et al, 1974) para determinar las características del macizo rocoso y sus requerimientos de soporte, este valor está en una escala logarítmica entre 0,001 y un máximo de 1000, y es definido por:

$$Q = \frac{RQD}{J_n} \times \frac{J_r}{J_a} \times \frac{J_w}{SRF} \quad (2.1)$$

Donde: RQD es el rock quality design.

J_n es el nro. de sets de discontinuidades.

J_r es el nro. de rugosidad de las discontinuidades.

J_a es el nro. de alteración de las discontinuidades.

J_w es el factor de reducción de agua de las discontinuidades.

SRF es el nro. de reducción de stress.

El primer cociente (RQD/J_n), representa las estructuras en el macizo rocoso, es una medida tosca del tamaño de bloque, o tamaño de partícula con valores extremos de (100/0.5 y 10/20), al ser interpretados en cm los valores extremos de 'tamaño de partículas' de 200 a 0.5 cm sería sus aproximaciones más realistas. Cabe destacar que existen bloques de varias veces este tamaño, y fragmentos de al menos la mitad del límite inferior.

El segundo cociente (J_r/J_a) indica la rugosidad y características friccionales de las paredes de fractura o materiales de relleno, este valor es ponderado a favor de paredes rugosas, inalteradas de fracturas en contacto directo. Se espera que estas superficies tengan una resistencia peak, que se dilatarán con fuerza al ser cortadas y por ende serán especialmente favorables a la estabilidad de los túneles.

El tercer cociente consiste en dos parámetros de esfuerzo, el término SRF es una medida de: 1) el aflojamiento de carga por excavaciones 2) esfuerzos en roca intacta competente 3) cargas de compresión en material plástico incompetente, este término se considera una medida de stress total.

El termino J_w por su parte es una medida del efecto de la presión de agua, que tiene un efecto adverso en las fracturas al disminuir el stress normal que reduce su resistencia de corte, además el agua puede “lavar” el relleno de las fracturas. A partir de esto el cociente (SRF/J_w) corresponde a una medida empírica del “stress activo” en la roca.

2.2.4 Spacing (S_f)

En términos generales el espaciamiento (*spacing*) corresponde a la distancia entre dos fracturas. El *spacing* de las discontinuidades corresponde al recíproco de la frecuencia (lineal) de fractura, y es usado como un parámetro de calidad del macizo rocoso en los sistemas de clasificación.

Una mejor definición de *spacing* corresponde a la distancia entre un par de discontinuidades medida sobre una línea de una especificada localización y orientación (PRIEST, 1993). Se pueden distinguir tres tipos de *spacing*:

1. La distancia entre fracturas consecutivas medida en una línea general, bien definida, es conocido como *spacing total*.

2. La distancia entre fracturas consecutivas entre fracturas de un mismo set mediadas en una línea de conocida orientación y localización es conocido como *set spacing*.
3. El spacing del set, cuando es medido en una línea que es paralela a la normal media del set es el *spacing normal*.

Los spacing de un set pueden ser medidos solo cuando su orientación está en un rango sub vertical a la línea de mapeo. Si S_f es un valor aleatorio de un set cuya normal forma un ángulo agudo δ con la línea de mapeo, entonces el spacing corregido del set S_f' es:

$$S_f' = S_f \cos \delta \quad (2.2)$$

2.2.5 Frecuencia de fracturas (FF)

La frecuencia de fracturas es una medida del grado de fracturamiento en la roca que puede expresarse en términos del número de discontinuidades que son observadas o predichas en una unidad de volumen, área o largo de una muestra tomada en un macizo dado.

La medida más utilizada de frecuencia de fracturas es la frecuencia lineal, que corresponde al número de discontinuidades interceptadas por unidad de largo de la línea de mapeo. Este concepto abarca tanto mapeo por scanline, o sondajes.

$$FF = \frac{\text{Nro fracturas}}{\text{Largo de sondaje}} \quad (2.3)$$

Uno de los atributos más importantes usados en la clasificación del RMR es la frecuencia de fracturas (FF), básicamente el número de fracturas contado por los geólogos dividido por el tamaño del testigo. Este cálculo no es tan simple porque a menudo una parte significativa del testigo está deshecho, haciendo el conteo de fracturas imposible, haciendo el FF un conteo de dos cantidades (testigo intacto y deshecho) que pueden cambiar de una zona a otra del depósito, lo que dificulta su

evaluación, a medida de testigo o de bloques, en otras palabras, hablamos de una unidad no aditiva, (Seguret, 2014).

Se puede considerar al FF como una variable direccional, al hablar de una variable direccional, se debe entender que la orientación espacial en que se mide la variable condicionará el valor de la muestra, es decir, depende de la dirección en que ésta sea medida (Erazo, 2008). Para ilustrar gráficamente se presenta en la siguiente figura dos sondajes con distinta orientación para el mismo set de fracturas.

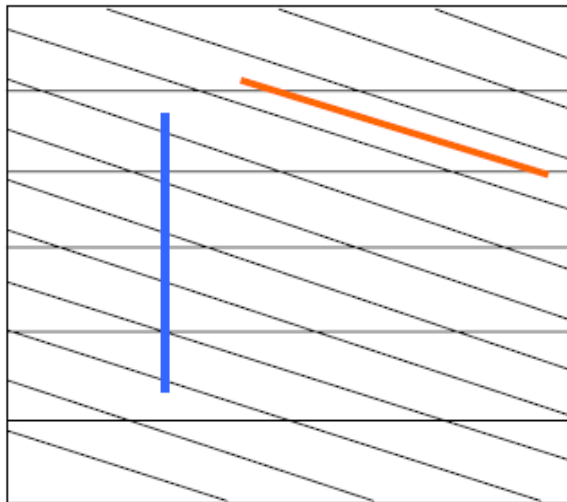


Ilustración 4: Direccionalidad de FF, en azul se observa un sondaje vertical con $FF=9$ [1/m], y en naranja un sondaje inclinado con $FF=2$ [1/m]. (Erazo,2008).

Dada la direccionalidad de esta variable, se debe corregir según su orientación, utilizando el ángulo agudo entre el vector normal a la fractura y la dirección de la línea de mapeo.

$$FF' = FF * \cos \delta \quad (2.4)$$

De la misma forma, se puede relacionar al recíproco del spacing corregido:

$$FF' = \frac{1}{S_{fr}} \quad (2.5)$$

Además, el índice FF tiene una relación con el RQD, cuando el FF aumenta el RQD tiende a disminuir, pero no de una manera determinística (Séguret &

Moreno, Geostatistical Evaluation of Rock-Quality Designation, 2015), (Priest & HUDSON, 1981) & (Sen & Kasi, 1984).

2.2.6 Intensidad de fracturas

La intensidad de fracturas corresponde a la medida del total de Fracturas presentes en un soporte definido. Generalmente combina la densidad de fracturas (número de fracturas en una línea, área, o volumen) con el tamaño de las fracturas (Palleske, 2014).

La medida de la intensidad de fracturas se basa en la dimensión de la unidad de medida, y la dimensión de la fractura. Designado por la letra “P” (persistencia), seguida de la designación de la dimensión de la unidad de medida, y luego la dimensión de la fractura.

Dimension de la medida de fractura	Dimension de la unidad de medición			
	0: Número de fracturas	1: Longitud de fractura	2: Área de sección de fractura	3: Volumen de fractura
0: Punto	P00= Número de fracturas por punto de macizo rocoso [-].			
1: Línea (sondaje)	P10= Número de fracturas por unidad de longitud de sondaje o scanline, o spacing inverso [1/m].	P11: Largo de fractura por longitud de sondaje o scanline [-].		
2: Área (tracemap).	P20: Número de fracturas por área de superficie medida [1/m ²].	P21: Número de fracturas por unidad de área de pared [1/m ²].	P22: Área de secciones de fractura por área de pared [1/m].	
3: Volumen de roca.	P30= Número de centros de fractura por volumen de roca [1/m ³].	P31= Longitud de fractura por volumen de roca [1/m ²].	P32: Área de fracturas por unidad de volumen de roca [1/m].	P33: Volumen de fracturas por unidad de volumen de roca [-].
	Densidad		Intensidad	Porosidad

Tabla 1: Medidas de intensidad de fracturas, (Palleske, 2014)

A partir de esta clasificación P10 corresponde a la frecuencia de fracturas, y el spacing (Sf) corresponde a su inversa.

$$P10 = \frac{1}{Sf} \quad (2.6)$$

En particular el parámetro P32, también llamado intensidad volumétrica, llama la atención porque corresponde a una variable no direccional, es decir, su valor no depende de la dirección de medida. Esto se debe a que este índice a diferencia de los anteriores incluye las dimensiones de la fractura, en este caso el área. Además, este parámetro (P32) fue definido como la mejor medida de intensidad de fracturas (Wang, 2006), ya que, es una variable aditiva y no direccional que corresponde al área de fracturas, por volumen de roca. Tiene una alta sensibilidad a la orientación y a la distribución de tamaño de las fracturas (Wang, 2006), lo que la hace un buen estimador del tamaño de bloque.

2.2.7 Redes de fracturas discretas (DFN)

Con el avance de las herramientas de simulación en geotecnia e ingeniería de rocas, cada vez es menos necesario utilizar modelos empíricos de clasificación del macizo rocoso. Aún ante la aparición de modelos numéricos más avanzados es necesaria una buena recolección de datos, porque, aunque se produzcan modelos numéricos cada vez más complejos, estos son solo tan buenos como los datos en los que están basados, por lo que su recolección sigue siendo muy importante (Palleske, 2014).

Las redes de fracturas discretas (DFN) corresponden a la utilización de estadística para extrapolar, modificar y expandir los datos recolectados para generar un macizo rocoso sintético. La base del método DFN es la caracterización de los parámetros de fracturas usando distribuciones estadísticas para describir

variables como la localización espacial, orientación, intensidad y tamaño de las fracturas (Miyoshi, Elmo, & Rogers, 2018).

En cuanto a la intensidad de fracturas, la medida preferida para realizar un modelo DFN es el P32, dado a que es un parámetro tridimensional, no direccional y aditivo, debido a sus características tridimensionales debe ser inferido a partir de datos levantados en terreno. El modelamiento geoestadístico de la intensidad de fracturas (P32) junto con la asignación de las propiedades anisotrópicas de los elementos individuales modelados frente a la definición bruta de dominios geotécnicos ofrece una marcada mejora en la resolución de la descripción del macizo rocoso modelado (Elmo, Rogers, Stead, & Eberhardt, 2014)

Entre las aplicaciones de los modelos DFN, están estimación de la fragmentación esperada en el macizo, predicción de cuñas en túneles y taludes, evaluación del efecto del fracturamiento hidráulico, entre otras.

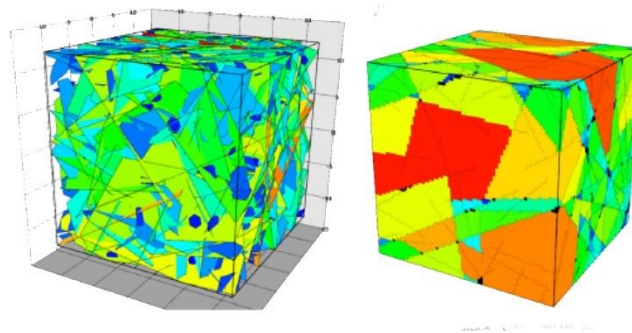


Ilustración 5: Formación de bloques a partir de un modelo DFN. Elmo et al, 2014.

2.3 Estimación de P32

La intensidad volumétrica de fracturamiento, también llamado P32 corresponde al área total de fracturas contenidas por unidad de volumen mapeado.

La principal problemática asociada a la intensidad volumétrica (P32) es que requiere datos en tres dimensiones para ser calculada, y además debe conocerse el área de las discontinuidades, lo que no puede ser medido directamente de un sondaje sin tener que destruirlo.

La importancia de calcular P32 a partir de sus análogos bidimensional, y unidimensional (P21 y FF), es que los dos últimos son escalas dependientes, o sea, altamente dependientes del dominio de muestreo, mientras que P32 no lo es.

En contraste FF, y P21 son fáciles de medir en terreno, pero no pueden ser usados para caracterizar un macizo por su dependencia al soporte de medida, a diferencia de P32 que es difícil de estimar en campo, pero no depende del soporte de medición.

2.3.1 Metodología de Dershowitz, 1991

En este caso de estudio se propuso que dada la escala independencia en las medidas de intensidad de fracturamiento estas pueden ser estimadas removiendo el efecto de la orientación del sondaje o scanline sin necesitar información adicional (Dershowitz, 1992). El tamaño de las fracturas no afecta esta transformación siempre y cuando no exista una relación entre orientación y tamaño.

La primera metodología para calcular P32 indirectamente fue propuesta por Dershowitz (Dershowitz, 1992), quien simuló sondajes con distintas orientaciones en un sistema discreto de fracturas (DFN), con distintos valores de P32 arbitrarios, para luego buscar una relación lineal entre P32 y el spacing ($1/P_{10}$). De la misma manera utilizando un tracemap se puede establecer una relación entre P21 y P32.

$$P_{32} = \frac{cp_3}{sf} \quad (2.7)$$

$$P_{21} = \frac{cp_2}{sf} \quad (2.8)$$

2.3.2 Metodología de Zhang & Einstein, 2000

En este caso se intenta estimar la intensidad de fracturas (P32) formulando intensidad y orientación como un tensor de fracturas. Primero se calcula la distribución de tamaño de fracturas y luego el número de discontinuidades.

Para inferir el tamaño de discontinuidades se ocuparon datos de scanlines o “ventanas” circulares, luego utilizando relaciones estereográficas entre el área real de las fracturas y la distribución de diámetro de discontinuidades asumiendo discontinuidades de forma circular.

En esta investigación se hicieron las siguientes suposiciones:

- Las discontinuidades son del tipo planar
- Las discontinuidades son discos circulares delgados.
- Los centros de fractura están dispuestos de forma independiente y al azar en el espacio.

Estas suposiciones corresponden a una simplificación de la problemática con motivo de facilitar el cálculo de las distribuciones de tamaño de fractura y número de discontinuidades.

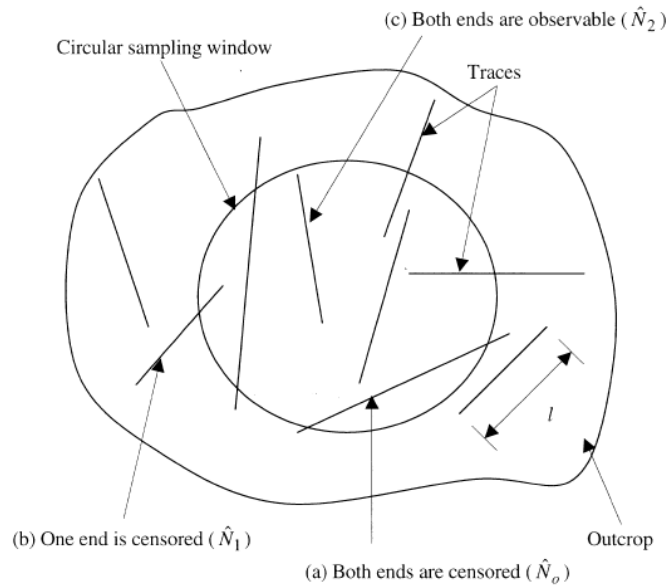


Ilustración 6: Clasificación de fracturas, según extremos observables, (Zhang & Einstein, 2000)

En esta metodología se realizaron estimaciones combinando datos de galería (caras expuestas), y también de sondajes de tamaño normalizado. Se utilizaron ventanas circulares, debido a que el sesgo de orientación puede ser eliminado automáticamente al estimar el tamaño real de las fracturas, en este caso se estimó el tamaño real de las fracturas a partir de sus trazas, considerando el sesgo de muestreo.

Por otro lado, se propuso un método para calcular el número total de discontinuidades en un volumen objetivo, usando la distribución de diámetros inferido y descrito en un sondaje normalizado. En este método se utiliza la aproximación de Mauldon & Mauldon (Mauldon & Mauldon, 1997), para estimar la probabilidad de que la discontinuidad que tiene un centroide en el objetivo de cortar la pared del sondaje.

Luego con la distribución del tamaño y número de fracturas, la intensidad puede ser calculada e incluida en un tensor de fracturas.

Este tensor de fracturas puede ser utilizado para describir cuantitativamente la intensidad y orientación de las fracturas, la intensidad de fracturas está definida

por la división del área total de discontinuidades y el volumen de macizo rocoso considerado.

2.3.3 Metodología de Wang, 2006

Otra aproximación a la estimación de P32 es la propuesta por Wang (Wang, 2006), quien, mediante relaciones estereográficas buscó una relación lineal entre valores de intensidad de fractura como frecuencia de fracturas y también intensidad de área, relacionándolos con la intensidad volumétrica.

En esta investigación se concluyó que la transformación de datos de intensidad de fractura de dos dimensiones a tres dimensiones no depende del tamaño de fracturas, pero sí depende de la orientación de los cilindros (sondajes), y de la orientación de las fracturas.

Para esto se consideró un tamaño constante de fractura con distribución Fisher, que es la más utilizada debido a su simplicidad, comparada a otras distribuciones para datos esféricos (N. Fisher et al, 1987), y además a que es análoga a la distribución normal. Se supuso fracturas del mismo tamaño e indefinidas.

La distribución Fisher, que es la más utilizada en este caso por su simplicidad y analogía a la distribución normal corresponde a:

$$f_{\Delta}(\delta) = \frac{ke^{k\cos\delta}\sin\delta}{e^k - e^{-k}} \quad (0 \leq \delta \leq \pi) \quad (2.9)$$

Donde δ es el ángulo entre el vector normal a la fractura, $f_{\Delta}(\delta)$ es la función de densidad de probabilidad δ , k es la constante Fisher relacionada con el valor de dispersión (valores de k altos para baja dispersión, y bajos para alta dispersión).

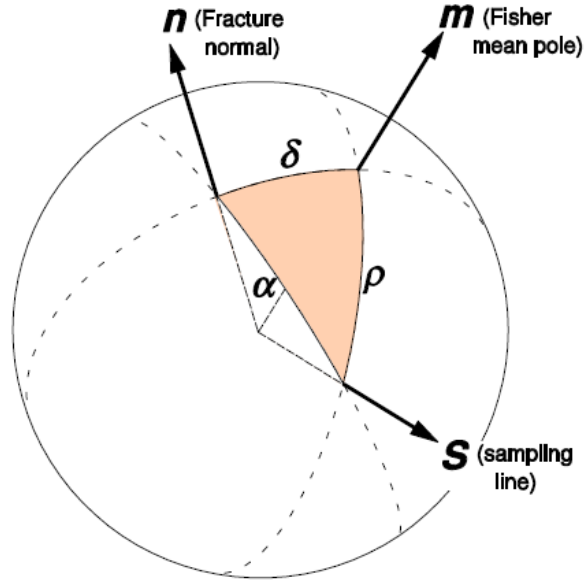


Ilustración 7 Triángulo formado por normal de fractura (n), polo medio de Fisher (m), y línea de mapeo (s), (Wang, 2006).

La integral de la ecuación no puede ser calculada a mano, así que se trabaja con su forma numérica. Luego los valores obtenidos son organizados en una tabla, para distintos k y ρ , se entrega un valor asociado de $1/C13$ que corresponde a la variable necesaria para transformar el P10 en P32.

Tabla 2: Valor de $1/C13$ para una distribución Fischer de parámetros k y ρ , (Wang, 2006).

$\rho \backslash k$	0.1	1	2	5	10	50	100	200	500	∞
0	0.5	0.53	0.62	0.79	0.9	0.98	0.99	0.99	1	Cosp
5	0.5	0.53	0.62	0.79	0.89	0.97	0.98	0.99	0.99	
10	0.5	0.53	0.61	0.78	0.88	0.96	0.97	0.98	0.98	
20	0.5	0.53	0.59	0.75	0.84	0.91	0.92	0.93	0.93	
30	0.5	0.52	0.56	0.68	0.77	0.84	0.85	0.85	0.85	
40	0.5	0.51	0.54	0.62	0.67	0.74	0.75	0.75	0.75	
50	0.5	0.51	0.51	0.54	0.57	0.62	0.62	0.63	0.63	
60	0.5	0.49	0.48	0.47	0.45	0.47	0.48	0.48	0.48	
70	0.5	0.48	0.45	0.39	0.34	0.32	0.32	0.32	0.32	
80	0.5	0.48	0.44	0.34	0.26	0.18	0.16	0.16	0.16	
90	0.5	0.48	0.44	0.33	0.24	0.11	0.08	0.06	0.04	

2.3.4 Cálculo de P32 de forma directa.

Para el cálculo directo de P32 se utiliza la metodología de Chilles (Chilles 2008), donde la i-ésima fractura en un compósito de largo L es ponderada por el inverso del coseno del ángulo agudo entre la dirección de la línea de sondaje y la línea normal al plano de fractura, de forma coincidente con la corrección por Terzaghi (*Terzaghi weighting*) (TERZAGHI, 1965). Así:

$$\hat{P}_{32} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\cos(\omega_i - \alpha)|} \quad (2.10)$$

Donde:

- L = tamaño de compósito.
- N = nro. de fracturas.
- ω_i = línea normal al plano de fractura i.
- α = línea de sondaje.

En este caso se puede modificar el tamaño de compósitos (L), valores de soporte muy grandes entregan menor resolución, pero con valores menos dispersos en el llamado “efecto de soporte”.

Las fracturas sub-paralelas a la dirección de medición (sondaje) entregan ponderaciones demasiado grandes en la corrección por Terzaghi (infinito en el límite $\omega_i = 0$), por lo que se fija un límite menor para el ángulo entre la dirección de sondaje, y la fractura de entre 10 y 15°.

2.4 Conceptos de geoestadística

2.4.1 Variable regionalizada

Es importante definir el concepto de *variable regionalizada*, que fue acuñado por Matheron (1963), para representar una función que representa el comportamiento en el espacio de un atributo relacionado a un fenómeno natural. Dicha variable tiene dos aspectos contradictorios: un aspecto aleatorio, que da cuenta de irregularidades locales, y un aspecto estructurado, que refleja tendencias a larga escala.

2.4.2 Soporte

Una variable regionalizada puede medirse no solo en un punto, sino además en una superficie o volumen. La unidad de superficie o volumen en que se mide la variable es considerado soporte.

En general el soporte de medición es puntual (sondajes), mientras que en la práctica interesa estimar un soporte mayor (bloques). Esta noción es fundamental, debido a la relación del soporte y la distribución estadística de los datos, conocido como *efecto soporte* (Emery, Apuntes de Geoestadística, 2007), soportes voluminosos tiene menos valores extremos y más valores intermedios.

2.4.3 Análisis exploratorio de datos

La geoestadística consiste en el estudio de una o más variables regionalizadas conocidas mediante toma de muestras, los principales objetivos del análisis exploratorio son tres:

- Analizar mediante estadística básica la cantidad, calidad y ubicación de los datos.
- Definir la(s) zona(s) de estudio. Observar si existen cambios abruptos en la distribución de valores, coincidentes con la geología del yacimiento.
- Anticipar posibles errores o problemas en la fase de estimación.

Además de la estadística básica (mínimo, máximo media y desviación estándar) se pueden utilizar herramientas como el histograma que permite ver la forma de la distribución de los datos al dividirlos en clases, los gráficos de probabilidad que permiten comparar la distribución de los datos con otra distribución teórica, la nube de correlación que permite conocer que tan relacionadas están dos variables medidas en los mismos puntos de interés, entre otras.

2.5 Modelamiento variográfico

El análisis variográfico tiene como objetivo analizar la continuidad espacial de la variable regionalizada, según Emery (Emery, Apuntes de Geoestadística, 2007), los pasos a seguir son:

- Calcular el variograma experimental, a partir de los datos obtenidos.
- Modelar este variograma a una función teórica.
- Validar el modelo variográfico.

Para realizar un modelo variográfico hay que utilizar la hipótesis de estacionaridad, que indica que la esperanza y varianza son constantes y que la covarianza y variograma de los datos depende solo de la distancia entre ellos, es decir, no depende de la posición absoluta en el espacio, sino de la posición relativa entre valores. Esta hipótesis permite simplificar el problema.

2.5.1 Variograma experimental

El variograma experimental mide la desviación cuadrática promedio entre los datos en función de su separación espacial, que se define de la siguiente manera:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{N(h)} [z(x_\alpha) - z(x_\beta)]^2 \quad (2.11)$$

Donde:

N(h)=número de pares

h=distancia entre puntos.

Si los datos están irregularmente distribuidos en el espacio, el número de pares utilizado para el cálculo de x_α es generalmente pequeño, lo que genera un variograma muy errático y difícil de modelar. Para darle una mayor robustez se suele utilizar tolerancia tanto en las distancias como en las orientaciones utilizadas (Emery, Apuntes de Geoestadística, 2007).

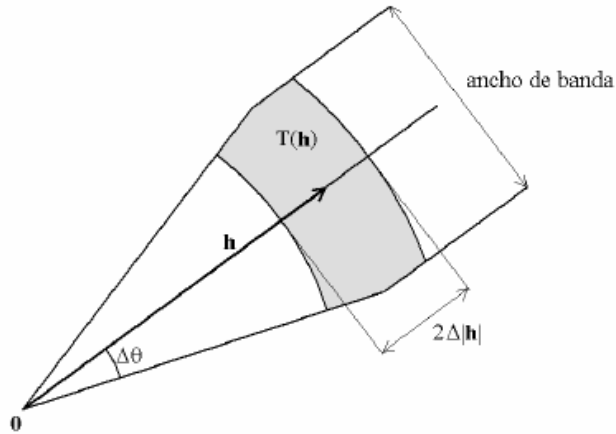


Ilustración 8: Tolerancia en la longitud del vector h y en la orientación, (Emery, 2007)

Además, se deben definir otros parámetros en la generación de variogramas, los cuales son los siguientes:

- Dirección de interés: azimut e inclinación (dip).
- Distancias de interés: paso o lag (distancia elemental),
- Número de pasos: cantidad de pasos de lag en el modelo.
- Tolerancia en la dirección: tolerancia angular (azimut e inclinación).
- Tolerancia en las distancias: Anchos de banda (horizontal y vertical).
- Número mínimo de pares: Un mayor nro. De pares indica mayor robustez de estimación.

2.5.2 Variograma modelado

Para continuar con la estimación necesitamos un variograma para cualquier valor de paso (lag). Dado que el variograma es una función definida como condicionalmente positiva no se puede simplemente interpolar los valores. Por esto se debe ajustar utilizando funciones de variograma previamente conocidas.

El variograma teórico tiene algunas características importantes que deben conocerse, según Isaaks & Srivastava, (ISAAKS & SRIVASTAVA, 1989) estas son:

- Alcance (*range*): Mientras la distancia de separación entre pares aumenta el valor correspondiente de variograma generalmente también aumenta. Eventualmente un aumento en la distancia ya no generará un aumento en el valor del variograma y este alcanza un valor máximo, la distancia en que el variograma alcanza su meseta es conocido como alcance.
- Meseta (*sill*): El valor que alcanza el variograma al llegar al alcance se llama meseta.

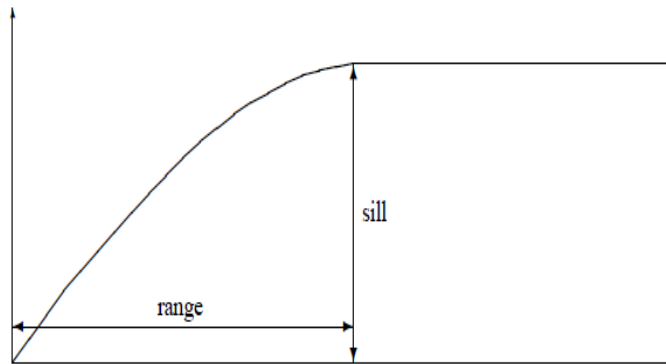


Ilustración 9: Alcance (*range*), y meseta (*sill*) en un variograma esférico, (Bardossy, 1997).

- Efecto pepita (*nugget*): Aunque el valor de variograma para $h=0$ es estrictamente 0, algunos factores como errores de muestreo, o variabilidad en pequeña escala, esto causa que valores muestreados a distancias

extremadamente pequeñas sean bastante diferentes. Esto causa una discontinuidad al origen del variograma. El salto de un valor de variograma de 0 en el origen a un valor de variograma distinto para distancias extremadamente pequeñas es conocido como efecto pepita. La razón entre el efecto pepita y la meseta es conocido como “efecto pepita relativo” y es usualmente expresado en porcentaje.

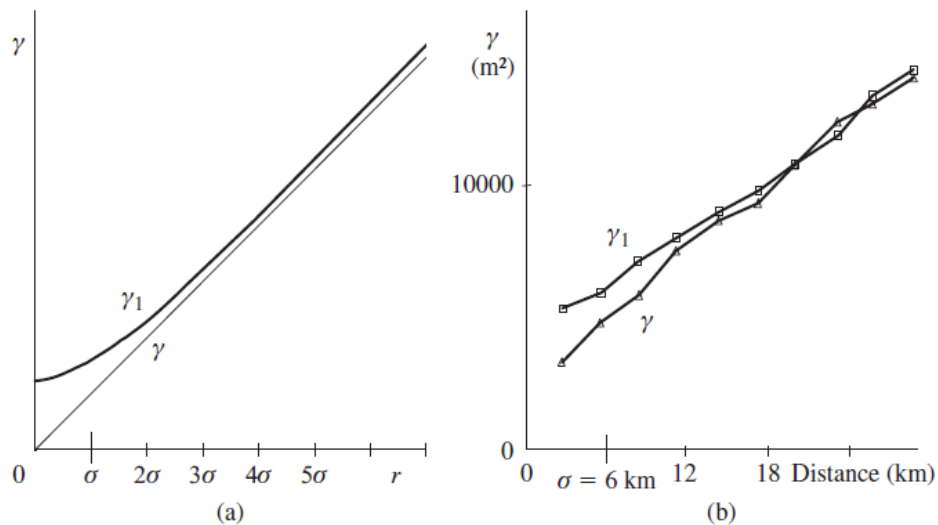


Ilustración 10: a) Variograma modelado caso con, y sin efecto pepita b) Variogramas experimentales, (Chilés & Delfiner, 2012).

Existen distintas estructuras teóricas utilizadas para modelar el variograma experimental, a menudo una estructura no es suficiente, en modelos más complejos se suelen utilizar variogramas anidados, que consisten en la suma de varios variogramas elementales, por ejemplo, el modelo esférico, exponencial, gaussiano y cubico, además de modelo pepítico (modelo con ausencia de correlación).

- Modelo esférico:

$$\gamma(h) = \begin{cases} C \left\{ \frac{3|h|}{2a} - \frac{1}{2} \left(\frac{|h|}{a} \right)^3 \right\} & \text{si } |h| \leq a \\ C & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2.12)$$

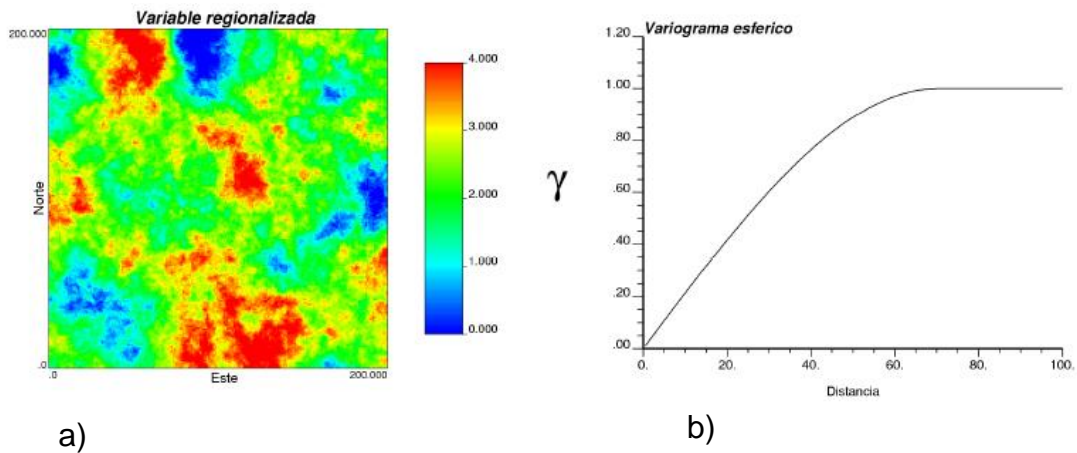


Ilustración 11: a) Variable regionalizada con comportamiento esférico b) Variograma teórico esférico, (Emery, 2007).

- Modelo exponencial:

$$\gamma(h) = C \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{3|h|}{a}\right) \right\} \quad (2.13)$$

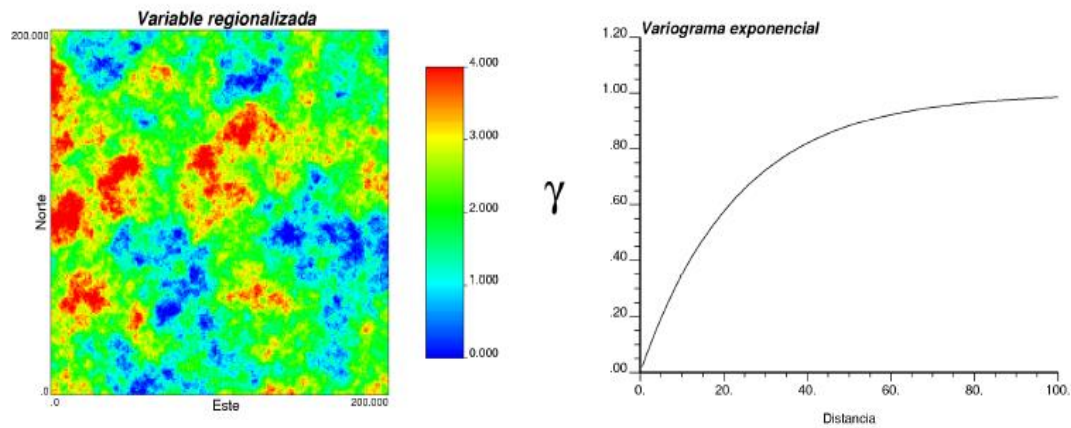


Ilustración 12: a) Variable regionalizada con comportamiento exponencial b) variograma teórico exponencial, (Emery, 2007).

- Modelo gaussiano:

$$\gamma(h) = C \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{3|h|^2}{a^2}\right) \right\} \quad (2.14)$$

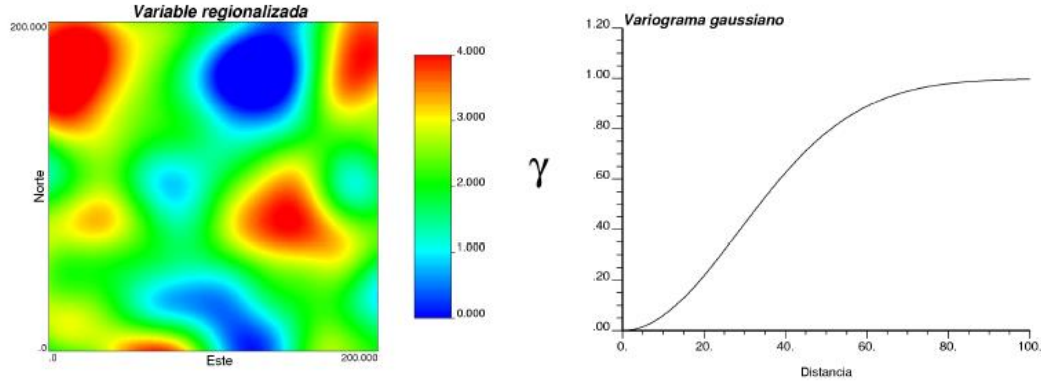


Ilustración 13: a) Variable con comportamiento gaussiano b) variograma teórico gaussiano, (Emery, 2007).

2.5.3 Variograma cruzado

En el caso multivariable, se deben calcular además los variogramas cruzados (*cross variogram*), entre ambas variables que luego deben también ser modelados. En este caso se consideran dos variables regionalizadas estacionarias con semi-varianza igual al variograma de cada una. El variograma cruzado, definido como la semi covarianza de incremento entre (x) y (x+h), supuesto de ser estacionario (RIVOIRARD, 2003), de la forma siguiente:

$$\gamma_{12}(h) = \frac{1}{2} E[Z_1(x+h) - Z_1(x)][Z_2(x+h) - Z_2(x)] \quad (2.15)$$

Este estimador requiere conocer ambas variables en pares distantes por h (más tolerancias). Este variograma en general toma la forma simple, pero puede tener formas mucho más variadas. Puede ser negativo (a diferencia de variograma univariable), el valor en h=0 es nulo, y es simétrico (RIVOIRARD, 2003).

El modelamiento de variograma multivariable, es de la misma forma que univariable, utilizando variogramas anidados.

2.6 Estimación por Kriging

El análisis variográfico genera mucha información acerca de las variables de estudio, pero esencialmente es una herramienta para generar estimación o simulación geoestadística. Uno de los usos de los variogramas es la estimación de lugares no muestreados, o la media de estos en un sector (Bárdossy, 1997).

El kriging corresponde a una combinación lineal ponderada de los datos, de la forma:

$$Z^*(x_0) = a + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha}) \quad (2.16)$$

Es un estimador insesgado, es decir el error tiene una esperanza nula, esto no quiere decir que el error sea bajo, sino que la media global es aproximadamente nula. Además, se busca minimizar la varianza del error de estimación, o sea, "si se calcula sobre numerosas configuraciones de kriging idénticas, la varianza de estimación cometidos es la más baja posible", esto equivale a minimizar el error cuadrático promedio.

Se debe definir con que cantidad de datos, o vecindad se estimará. Al utilizar todos los datos disponibles en la ponderación se denomina kriging con vecindad única, este caso es a veces demasiado costoso computacionalmente, y dado que

datos muy alejados tiene casi nula inferencia en la estimación se puede utilizar solo los datos más cercanos al sitio a estimar, en este caso se denomina kriging con vecindad móvil.

La forma de la vecindad debe tomar en cuenta la anisotropía de la variable regionalizada, que es encontrada mediante el análisis variográfico. En el caso de anisotropía zonal la vecindad tendrá forma de elipse, o elipsoide en el que las características de la elipsoide -orientación y excentricidad- serán idénticas a las del elipsoide de anisotropía. También se puede dividir la elipse en sectores (cuadrantes u octantes), para repartir mejor los datos sobre los cuales se va a estimar y darles mayor representatividad.

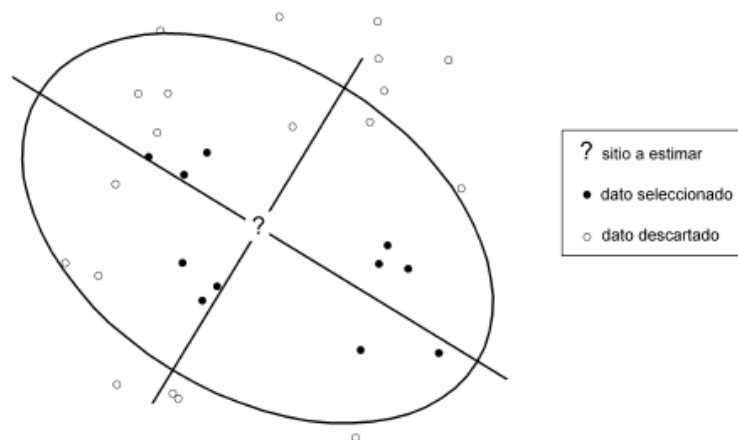


Ilustración 14: Vecindad móvil elíptica para 3 datos por cuadrante, (Emery, 2007).

2.6.1 Kriging de media conocida (Kriging simple).

En el caso de media conocida, se puede calcular los ponderadores del kriging mediante una multiplicación lineal de las covarianzas relativas a la ubicación de los datos pertenecientes a la vecindad de búsqueda.

$$\begin{pmatrix} C(x_1-x_1) & \cdots & C(x_1-x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(x_n-x_1) & \cdots & C(x_n-x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(x_1-x_0) \\ \vdots \\ C(x_n-x_0) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Al resolver este sistema matricial se pueden determinar los ponderadores de kriging, bajo la condición de insesgo, la estimación de ley en un punto x_0 se obtiene de la forma:

$$Z^*(x_0) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} Z(x_{\alpha}) + (1 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}) m \quad (2.18)$$

En este caso la media aparece como un ponderador más, mientras menos ponderación se les dé a los datos (datos más alejados), más ponderación tendrá la media para compensar la falta de información.

2.6.2 Kriging de media desconocida (Kriging ordinario).

En el caso de media desconocida el sistema es similar, pero tiene una incógnita y una ecuación en comparación a la anterior.

$$\begin{pmatrix} \gamma(x_1-x_1) & \cdots & \gamma(x_1-x_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(x_n-x_1) & \cdots & \gamma(x_n-x_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(x_1-x_0) \\ \vdots \\ \gamma(x_n-x_0) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

También se puede utilizar el variograma como equivalente a la covarianza, según la relación $\gamma(k) = C(0) - C(h)$

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} \gamma(x_{\alpha}-x_{\beta}) - \mu = \gamma(x_{\alpha}-x_0) \quad \forall \alpha=1 \dots n \\ \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} = 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

2.6.3 Co-kriging

En el caso multivariable, se busca estimar el valor de un bloque utilizando no solo el valor de cada variable en un punto, sino la relación entre ellas. Se busca extender el kriging a un caso multivariable, buscando una combinación lineal sin sesgo y varianza del error mínima (Emery, Apuntes de Geoestadística, 2007).

Supongamos que se quiere estimar la variable Z_1 , en el sitio x_0 , denotando m_i el valor esperado (conocido) de la variable Z_i ($i=1\dots N$). De la forma:

$$Z_1^*(x_0) = a + \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^{n_i} \lambda_{\alpha}^i Z_i(x_{\alpha}^i) \quad (2.21)$$

Donde el coeficiente a , y los ponderadores $\{\lambda_{\alpha}^i, i = 1 \dots N, \alpha = 1 \dots n_i\}$ son las incógnitas del problema.

Según la condición de sin sesgo se exige que la esperanza del error sea nula:

$$E[Z_1^*(x_0) - Z_1(x_0)] = a + \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^{n_i} \lambda_{\alpha}^i E[Z_i(x_{\alpha}^i)] - E[Z_1(x_0)] \quad (2.22)$$

$$= a + \left[\sum_{\alpha=1}^{n_1} \lambda_{\alpha}^1 - 1 \right] m_1 + \sum_{i=2}^N \left[m_i \sum_{\alpha=1}^{n_i} \lambda_{\alpha}^i \right] \quad (2.23)$$

A partir de la minimización de la varianza se obtiene la siguiente relación.

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\beta=1}^{n_j} \lambda_{\beta}^j C_{ij} \left(x_{\alpha}^i - x_{\beta}^j \right) = C_{i1} \left(x_{\alpha}^i - x_0 \right) \quad \forall i=1\dots N, \forall \alpha=1\dots n_i, \quad (2.24)$$

Este sistema de ecuaciones se puede resolver invirtiendo esta matriz, o por sustitución gaussiana, y se pueden estimar todas las variables en una localización al hacerlo. Sin embargo, el tamaño de la matriz aumenta bastante al agregar una variable, por lo que los tiempos de cálculo son considerables.

2.7 Simulación geoestadística.

Un problema común en las geociencias es que el grupo de información disponible no es suficiente para evaluar las complejidades locales de las entidades a modelar (Mallet, 2002). En puntos lejanos del set de datos cualquier método de interpolación (por ejemplo, kriging) generará una solución suavizada que no reproduce la variabilidad de los datos.

Esto implica que para puntos muy alejados de los datos reales solo se tiene una imagen suavizada correspondiente al comportamiento más probable esperado, que es diferente al comportamiento real de las entidades modeladas. Como consecuencia de esto, es peligroso tomar decisiones económicas al basarse en una sola solución suavizada (Mallet, 2002).

Una manera de solucionar esta problemática es generar una serie de soluciones equiprobables, llamadas simulaciones que deben cumplir con dos condiciones:

- Cada simulación honra a todos los datos.
- Cada simulación tiene un comportamiento local compatible con variabilidades locales presentes en la entidad modelada.

Existen numerosos tipos de métodos de simulación, el interés práctico de estos es generar un número grande de soluciones equiprobables a un bajo costo de CPU y memoria.

2.7.1 Anamorfosis gaussiana

Es difícil que una variable tenga un comportamiento gaussiano, por lo general la distribución univariable (histograma) es asimétrico y no compatible con un modelo gaussiano (Emery, Apuntes de Geoestadística, 2007). Se necesita realizar una transformación de los datos, o **anamorfosis** para convertirlos a una distribución gaussiana, prácticamente esto consiste en una deformación de los datos originales a una distribución normal $N(0,1)$.

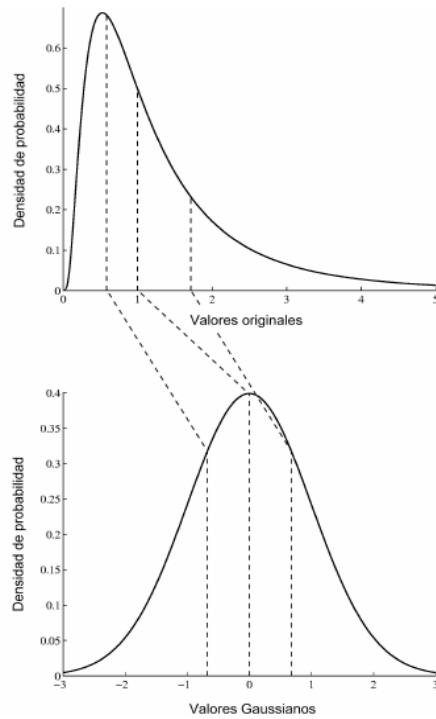


Ilustración 15: Anamorfosis gaussiana, (Emery, 2007)

2.7.2 Simulación secuencial

Se debe transformar los datos a variables gaussianas, una vez ya realizada la transformación, el modelo queda caracterizado por la variable gaussiana, y por el variograma de los datos gaussianos.

Se busca simular una variable multi-gaussiana Y , de media 0 y variograma $\gamma(h)$ en los sitios $\{u_1, \dots, u_m\}$ del espacio, condicionada a los datos Gaussianos disponibles en los sitios $\{x_1, \dots, x_n\}$, el procedimiento es el siguiente. El algoritmo secuencial se realiza para todos los sitios de estimación u_i ($i = 1, \dots, m$):

- 1) Se realiza un kriging de $Y(u)$ a partir de los datos condicionantes, y de los valores previamente simulados. Se obtiene un valor estimado $Y^*(u_i)$ y su desviación estándar $\sigma^*(u_i)$.
- 2) Se genera un valor gaussiano, de media $Y^*(u_i)$, y desviación estándar $\sigma^*(u_i)$.

$$Y(u_i) = Y^*(u_i) + \sigma^*(u_i)N_i \quad (2.25)$$

Donde N_i es una variable aleatoria gaussiana de media 0, y varianza 1, independiente de $N_1 \dots N_{i-1}$, y de los datos originales (Emery, Apuntes de Geoestadística, 2007).

Entre las ventajas de este método está que produce datos condicionados de forma directa, es un método sencillo y fácil de ejecutar, en cuanto a sus desventajas, principalmente radican en su lentitud, debido a que el kriging utilizado se hace cada vez más grande (se realiza un kriging diferente para cada punto simulado).

Una manera de reducir el costo computacional es utilizando una vecindad móvil para la estimación por kriging, pero esto genera ciertas imprecisiones en los cálculos que se deben remediar. Por esto se utiliza una grilla amplia para realizar la estimación con una vecindad fija, y luego se simula utilizando mallas más

pequeñas con vecindad móviles y apoyándose en los valores simulados anteriormente, también se debe intentar aleatorizar la simulación, ya que, una secuencia de simulación regular puede hacer aparecer ciertos artefactos, por eso para cada realización es recomendable utilizar una secuencia diferente.

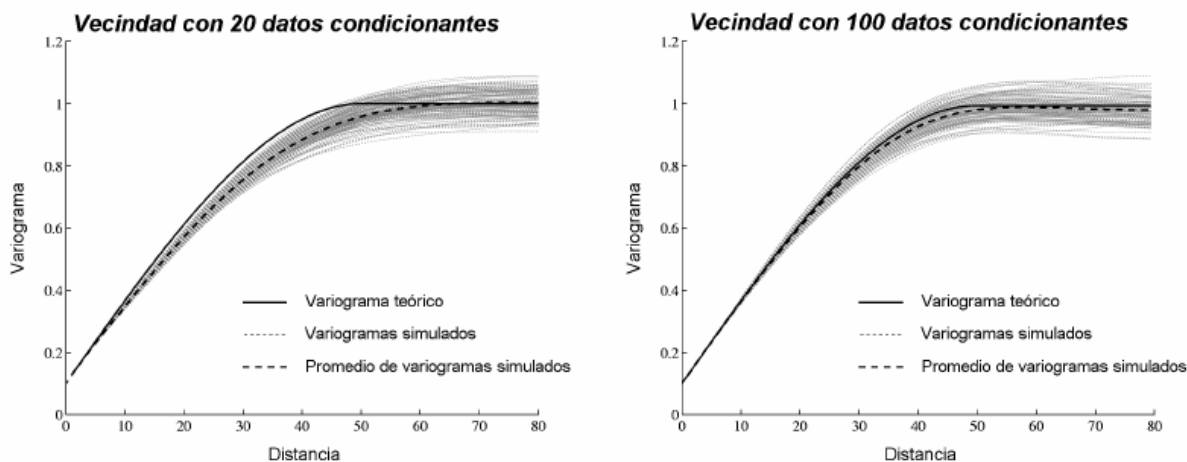


Ilustración 16: Efecto de la vecindad móvil en la simulación gaussiana secuencial, (Emery, 2007).

2.7.3 Métodos de simulación condicional

Dado el alto costo computacional de los algoritmos de simulación secuencial existen métodos de simulación alternativos, entre los cuales se encuentran:

- Método de descomposición matricial.
- Métodos de convolución (medias móviles, métodos autorregresivos).
- Método espectral discreto.
- Método espectral continuo.
- Método de bandas rotantes.

Los últimos 4 algoritmos realizan simulaciones no condicionales (que no reproducen los valores de los datos), por lo que requieren de una etapa posterior de condicionamiento. Aunque son más complejos matemáticamente son más rápidos

que el método secuencial por: 1) El kriging solo involucra a los datos reales 2) se puede condicionar múltiples realizaciones con un solo kriging.

Los pasos para realizar una simulación condicional son los siguientes (Emery, Apuntes de Geoestadística, 2007):

- 1) Desagrupamiento de datos.
- 2) Transformar los datos en datos gaussianos, considerando ponderadores de desagrupamiento.
- 3) Realizar análisis variográfico de los datos (variograma modelado).
- 4) Validar hipótesis multi-gaussiana.
- 5) Simular la variable gaussiana:
 - Elegir algoritmo de simulación
 - Construir realizaciones
 - Condicionar los datos gaussianos si el algoritmo es no condicional.
- 6) Transformación gaussiana inversa a la variable original.
- 7) Procesamiento de los resultados.

2.7.4 Método de Bandas rotantes

El algoritmo de bandas rotantes (*turning bands*) fue desarrollado originalmente por Matheron (Matheron, 1973), consiste en transformar una simulación de variables 2D, o 3D a un problema unidimensional. Se simulan los valores en una serie de líneas que luego se ponderan para generar una función de covarianza de 2 o 3 dimensiones, de esta manera este método es matemáticamente complejo, sin embargo, el coste computacional se reduce sustancialmente.

Considerando una región P, donde se desea generar una simulación se debe generar una serie de líneas i con azimut θ_i , que es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente entre 0 y 2π . Sobre cada una de las líneas se genera una función aleatoria de media 0, y covarianza $C1(h_i)$, donde h_i es la coordenada a lo largo de la línea i .

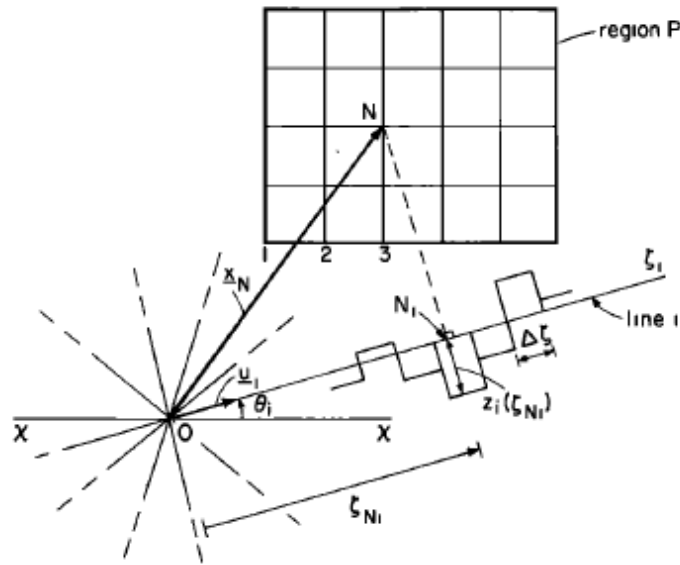


Ilustración 17: Imagen esquemática de las bandas rotantes (i) correspondientes a una región P. (MANTOGLOU & WILSON, 1982).

Si N es el punto donde se desea simular la variable $Z(x)$, N se proyecta en cada una de las líneas y se le asigna el valor de $Z_i(h_i)$, correspondiente al valor de ponderación de la línea i, donde h_{ni} es la proyección del pto. N sobre la línea i, y u_i es el vector unitario que corresponde a la dirección en i con la cual $h_{ni} = x_n \cdot u_i$ donde (.) denota el producto escalar (producto punto). La estimación el punto N viene dada por (RESTREPO, 2016):

$$Z_S(x_N) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{i=1}^L Z_i(x_N \cdot u_i) \quad (2.26)$$

Donde L es el número de líneas total.

La dificultad para generar cosimulación de variables regionalizadas esta en la necesidad de funciones de covarianza cruzada entre las diferentes variables. Si se considera un vector estacionario de un campo aleatorio $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^t$ cuyos componentes tienen media cero y distribución normal multivariable. Estas variables están caracterizadas por la matriz de covarianzas simples y cruzadas.

$$\forall x, x+h \in \mathbb{R}^d, \quad C(h) = E\{Y(x)Y(x+h)^t\} \quad (2.27)$$

Existe una gran diversidad de modelos de covarianza, por lo que es difícil definir un algoritmo útil para todos los casos. En este caso se utiliza el modelo lineal de co-regionalización con una matriz de covarianzas de la forma (Wackernagel, 2003).

$$C(h) = \sum_{n=1}^N B_n \rho_n(h) \quad (2.28)$$

Donde $\{\rho_n, n = 1 \dots N\}$ es un set de funciones de covarianza (funciones positivas semi definidas $\rho_n \geq 0$); y $\{B_n, n = 1 \dots N\}$ es un set de matrices simétricas semi definidas ($B_n \geq 0$).

El algoritmo de bandas rotantes genera simulaciones no condicionantes, es decir que deben ser condicionadas para producir las realizaciones, para esto se debe agregar una etapa añadiendo la realización no condicional y el kriging de la diferencia de entre la base de datos y los datos simulados su localización. En el caso multivariable se utiliza co-kriging en vez de kriging. De la forma:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, Y_{CS}(x) = Y_S(x) + [Y(x) - Y_S(x)]^*, \quad (2.29)$$

Donde el asterisco (*) indica el operador de co-kriging desde los valores en las localizaciones de los datos, y los índices S, y CS indican la simulación no-condicional, y condicional respectivamente.

2.8 Estado del arte: Geoestadística aplicada en geomecánica.

Clásicamente los sistemas de clasificación geomecánica se han basado en la zonificación y definición de la calidad de roca según rankings basados en el promedio de las muestras tomadas y analizadas.

Esta no es una aproximación del todo correcta, ya que, se omiten algunas características como la direccionalidad, la no aditividad que poseen algunas variables, y a la vez, no se toma atención a los valores extremos que son los que generan mayores problemáticas asociadas (ERAZO, 2008).

Una alternativa a la zonificación es la utilización de geoestadística, de manera de estimar los valores esperados de un índice geomecánico utilizando los datos mapeados como muestras ubicadas en el espacio, y luego de compositar estos datos de sondajes utilizarlos en un estudio variográfico. Desde aquí se puede generar estimación por kriging, o según algún algoritmo de simulación geoestadística.

Particularmente, en los últimos años ha tomado fuerza la aplicación de algoritmos de simulación geoestadística como alternativa a métodos basados en kriging e interpolación, debido al efecto de suavizamiento presente en estos, entre algunos casos con aplicación de algoritmos de simulación se encuentran: (Marcotte, 2016), (Zagayevskiy, 2015), (Armstrong, y otros, 2011), (Verly, 1993), (Hosseini, Asghari, & Emery, 2017), (Maleki & Emery, 2017).

Existen también numerosas aplicaciones de geoestadística en la estimación de diferentes índices geomecánicos, principalmente a variables de clasificación de macizo rocoso como RMR, GSI, y Q de Barton, y además índices de fracturamiento de roca como RQD, FF y P32, utilizando métodos de kriging, y/o simulación principalmente. Dentro de estos casos se destacan: (Dung & Thinh, 2017), (Vatcher, McKinnonb, & Sjöberg, 2016), (Namysłowska-Wilczyńska, 2015), (Goodarzi et al,

2018) , (Ferrari, Tiziana, & Giani, 2011), (Pinheiro et al,2016) , (Hekmatnejad et al 2017).

En síntesis, de los estudios más relevantes:

Eivazy (2016) modeló la heterogeneidad del macizo rocoso utilizando la simulación gaussiana secuencial, para las variables geotécnicas de RMR, RQD, FF, Jointcondition, y UCS (resistencia a la compresión simple). Utilizó dos metodologías para estimar el RMR, en la primera lo hizo directamente, y en la segunda de forma indirecta, estimando cada uno de sus parámetros por separado. En este caso no se utiliza una metodología multivariable, aunque las variables están correlacionadas entre sí. El estudio concluyó que la segunda aproximación entrega mejores resultados, ya que, se estima de forma separada las características de roca intacta y el grado de fracturamiento del macizo.

Pinheiro et al (2016) mediante simulación de bandas rotantes buscó simular el RMR de un yacimiento epitermal de la cordillera de los Andes, utilizando una metodología directa e indirecta de forma similar a lo realizado por Eivazy (Eivazy, Esmaili, & Jean, 2016) , en este caso se concluyó que ambas metodologías entregan resultados aceptables, pero, la segunda además entrega nociones de fracturamiento presente en la roca.

Ferrari et al (2011) modeló el fracturamiento presente en la roca a partir de dos índices, el primero corresponde al intercepto horizontal que corresponde a la media de la distancia entre fracturas sin considerar su orientación en una scanline horizontal ,y el segundo fue la cuenta volumétrica de fracturas o “Jv” que corresponde a la suma de la inversa de los spacing de los sets de fracturas presentes y que entrega una estimación de la cantidad de fracturas por unidad de volumen, luego se generó los variogramas de ambas variables además de estimación por kriging ordinario y simulación secuencial. Se concluyó que ambas variables tuvieron una buena validación, sobre todo el intercepto horizontal, y se obtuvieron mejores resultados al usar saltos de baja escala al incluir heterogeneidades pequeñas, siendo la simulación más sensible al tamaño de salto.

Hekmatnejad et al (2017) propuso la estimación de la intensidad de fracturamiento a partir de la intensidad volumétrica (P32), calculada de manera directa utilizando la metodología de Chilés (Chilés, 2008) de acuerdo con la corrección de Terzaghi, primero validó la metodología para calcular P32 de manera directa a partir de datos sintéticos, luego generó variogramas y simuló la intensidad volumétrica teniendo en cuenta que es un parámetro no direccional, aditivo y escala independiente. Como resultado pudo definir qué sectores presentaban mayor fracturamiento en la mina, y además estimó la incertidumbre en los datos a partir de mapas de probabilidad.

A partir de estos estudios se concluye que la simulación de variables geotécnicas es un tema relevante, y que entrega buenos resultados. A diferencia de los métodos de Kriging un algoritmo de simulación puede cuantificar la incertidumbre asociada en los valores estimados. Por otra parte, la mayoría de las investigaciones recopiladas utilizan métodos de simulación univariable por lo que la novedad en esta investigación está en modelar dos variables geotécnicas utilizando una metodología multivariable.

CAPÍTULO 3: METODOLOGIA: COSIMULACIÓN POR BANDAS ROTANTES

3.1 Composición de FF y P32.

En esta memoria se utilizaron datos de sondajes tomados para los estudios hidrogeológicos de una mina a rajo abierto del norte de Chile. El set de datos corresponde a logueo de 51.843 fracturas que cortaron 33 sondajes. Estos datos están dispuestos en una tabla con la información relevante mapeada: Hole Id, Profundad, Este, Norte y Cota del Header, Dip Direction y Dip de la línea del sondaje, Dip Direction y Dip del plano de fractura, y From/To de la muestra.

Como primer paso para compositar los datos se transformaron las orientaciones de las fracturas a polo, así, se transformó el Dip Direction/Dip de plano de fractura a Trend/Plunge de polo (línea perpendicular al plano de fractura) a partir del formulario siguiente:

$$\begin{aligned}Trend &= Dip Dir + 180^\circ \quad si \quad Dip Direction < 180^\circ \\Trend &= Dip Dir - 180^\circ \quad si \quad Dip Direction \geq 180^\circ \\Plunge &= 90 - Dip\end{aligned}\tag{3.1}$$

Luego, la orientación del polo se transformó a vector normal utilizando trigonometría para pasar de coordenadas polares (stereonet) a cartesianas, de acuerdo con la siguiente ecuación, donde $\alpha = Trend$, y $\beta = Plunge$:

$$\begin{aligned}nx &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ny &= \text{seno}(\alpha) \cos(\beta) \\nz &= \text{seno}(\beta)\end{aligned}\tag{3.2}$$

Para calcular la intensidad volumétrica de fracturas (P32) es necesario obtener el ángulo entre la línea de sondaje y el polo de fractura. Este ángulo (δ) se calcula a partir de la siguiente fórmula:

$$\delta_i = \text{acos}(|s_x * n_x + s_y * n_y + s_z * n_z|) \quad (3.3)$$

Donde el vector correspondiente a la línea de sondaje es llamado vector s, y el vector correspondiente al polo de fractura es llamado vector n. El ángulo entre la línea de sondaje y el polo de fractura se obtiene del arcoseno del producto punto de ambos vectores. En la siguiente figura se muestra los vectores s y n, y el ángulo δ .

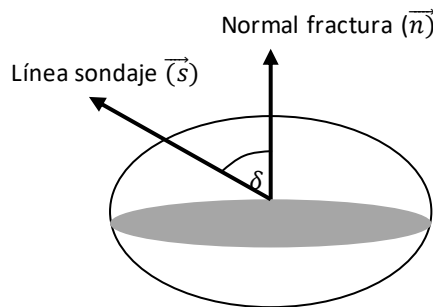


Ilustración 18: Ángulo δ entre línea de sondaje y normal a fractura. Elaboración propia.

El weight, o factor de corrección se obtiene a partir del ángulo δ como $1/\cos(\delta)$, debido a que esta función tiene un límite infinito cuando $\delta = 90^\circ$ (plano de fractura paralelo a línea de sondaje) se fijó un límite máximo de $\delta = 75^\circ$, lo que corresponde a un factor de corrección de 3.864 como máximo.

$$\text{weight} = \frac{1}{\cos(\delta)} \quad \text{si } \delta \geq 75^\circ ; \quad \frac{1}{\cos(75)} \quad \text{si } \delta > 75^\circ \quad (3.4)$$

A partir de aquí fue necesario compositar los datos, debido a que los intervalos de mapeo no son regulares (el spacing de las fracturas no lo es), y las hipótesis de geoestadística utilizadas de aquí en adelante están basadas en la equiprobabilidad de las muestras. Se eligió hacer compósitos de 20m, debido a que el tamaño de bloque utilizado es de 20m*20m*20m.

Ambas variables a compositar son aditivas, así que para obtener los datos compositados basta con sumar las variables correspondientes a un intervalo de compósito. Como primer paso se definió los intervalos de cada compósito para cada sondaje cada 20m, este intervalo tiene un valor mínimo, medio y máximo.

. Para calcular el FF se contaron las fracturas dentro del *i*ésimo intervalo y luego se dividió este valor por el largo de compósito, en el caso de P32 se sumaron los weight de las fracturas en el *i*ésimo intervalo y se dividió por el largo de compósito. El valor intermedio de cada Intervalo es utilizado para calcular las coordenadas del compósito. En base al Header (Este, Norte, Cota), el vector director de la línea de sondaje (s_x, s_y, s_z) y el punto medio del intervalo del compósito (Intervalo medio) las coordenadas del compósito se calcularon de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}C_x &= Este + Intervalo\ medio * S_x \\C_y &= Norte + Intervalo\ medio * S_y \\C_z &= Cota - Intervalo\ medio * S_z\end{aligned}\tag{3.5}$$

El código Matlab para la Composición de FF y P32 se agregó a Anexos.

3.2 Análisis exploratorio de los datos

El análisis exploratorio busca caracterizar las variables, su comportamiento espacial, su distribución estadística, y la correlación entre variables. Se utilizó el histograma para conocer la distribución estadística de los datos, medias condicionales para conocer su comportamiento espacial, una nube de dispersión para conocer la correlación entre variables.

Como primer paso para conocer la distribución espacial de los datos se realizó una visualización espacial de los compósitos en vista Norte, Este y Cota, y también una vista 3D.

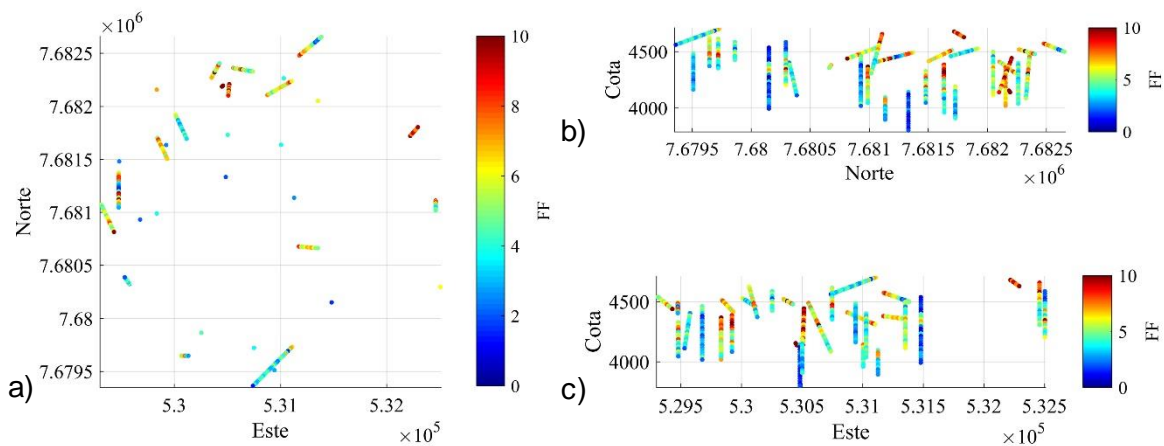


Ilustración 19 a) Vista Norte-Este de compósitos, para FF. b) Vista Norte-Cota de compósitos, para FF. c) Vista Este-Cota de compósitos, para FF. Elaboración propia.

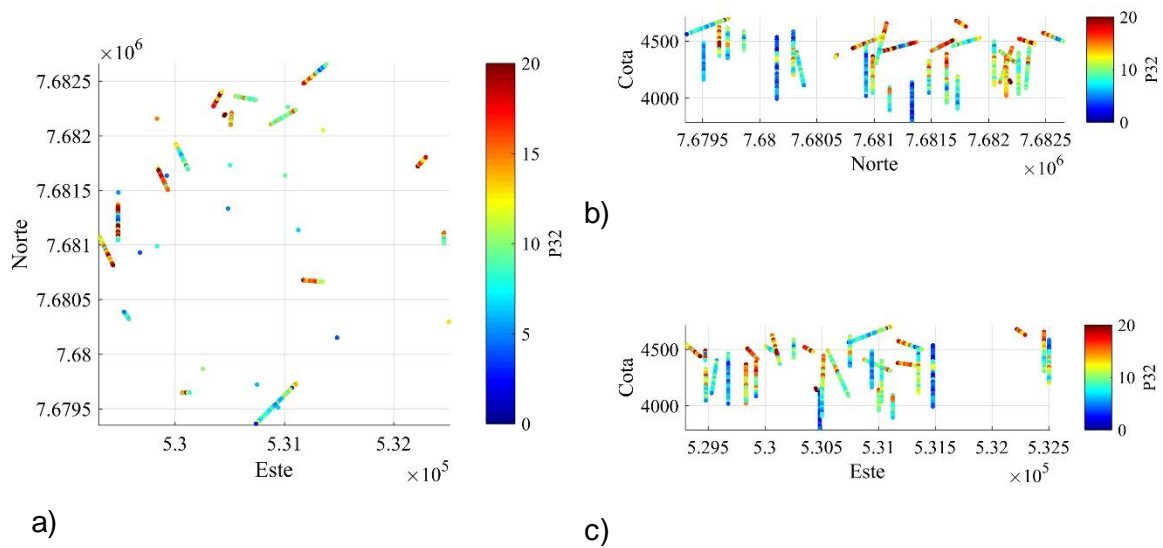


Ilustración 20: a) Vista Norte-Este de compósitos, para P32. b) Vista Norte-Cota de compósitos, para P32. c) Vista Este-Cota de compósitos, para P32. Elaboración propia.

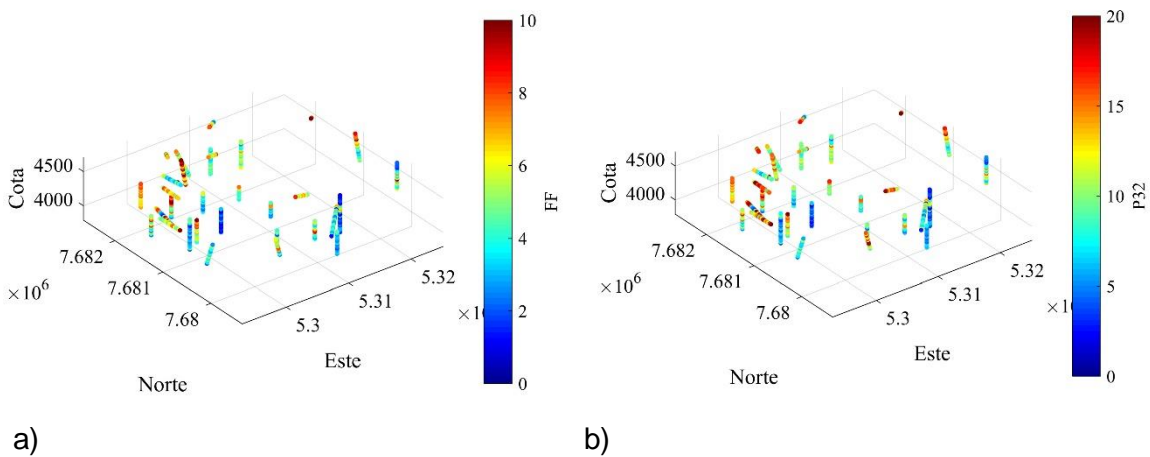


Ilustración 21: a) Vista 3D de compósitos, para a) FF. b) P32. Elaboración propia.

Se observa que la malla de muestreo no es regular, existen sectores altamente muestreados y otros donde prácticamente no hay datos. Este es un problema que más adelante afectará la estimación de las variables de interés.

Para compensar la irregularidad del muestreo se realizó un desagrupamiento de datos, así, se les dio un mayor peso a los compósitos que se encuentran en un sector poco muestreado, y una ponderación menor a los compósitos que se encuentra en un sector altamente muestreado. Se ocupó el método de “*cell declustering*”, dividiendo la zona de interés en bloques de 300m*300m*100m.

Como primera aproximación se calcularon las estadísticas básicas del set de datos: media, desviación estándar, mínimo, cuartil inferior, mediana y máximo. De esta forma se pudo conocer en que rango están los datos y que tan dispersos de la media se encuentran, así como también comparar “a priori” la distribución estadística de ambas variables.

Tabla 3: Estadísticas básicas de los compósitos. Elaboración propia

Estadísticas	FF	P32
Media	4.821	10.038
Varianza	4.888	20.274
Mínimo	0.65	1.314
Cuartil inferior	3.2	6.654
Mediana	4.55	9.479
Cuartil superior	6.35	13.153
Máximo	11.65	24.962

La intensidad de fracturas tiene un valor mayor o igual a la frecuencia de fracturas, debido a que corresponde a una corrección de esta, es por esto que sus estadísticas cuentan con valores mayores de promedio, mínimo y máximo. Los valores de P32 además cuentan con mayor varianza por lo que su dispersión es mayor.

Una vez conocidas las estadísticas básicas se hicieron los histogramas de los datos para comparar de manera visual su distribución estadística, sin considerar todavía la componente espacial. En los histogramas se observa que ambas variables tienen una distribución similar con un sesgo a la derecha y los datos concentrados en torno la media, y su forma se asemeja a una distribución lognormal.

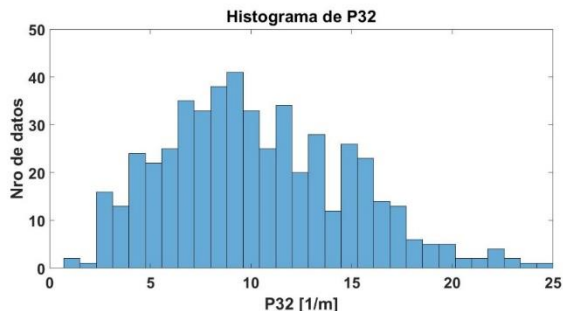
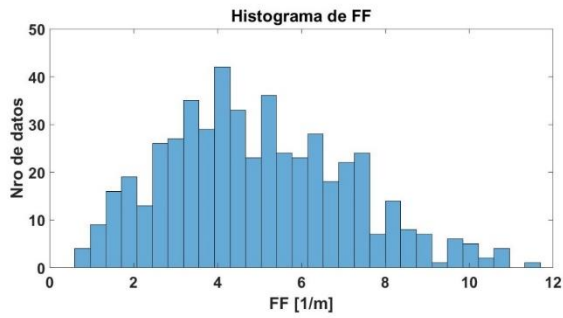


Ilustración 22: a) Histograma de compósitos para FF b) Histograma de compósitos para P32. Elaboración propia.

Para tener una idea de la distribución espacial de los datos se utilizó las medias condicionales que permiten conocer el comportamiento direccional de una variable, y su tendencia al alza o baja en un eje coordinado, en este caso se eligió el eje z debido a la mayor presencia de datos en esta dirección, lo que hace este gráfico más robusto.

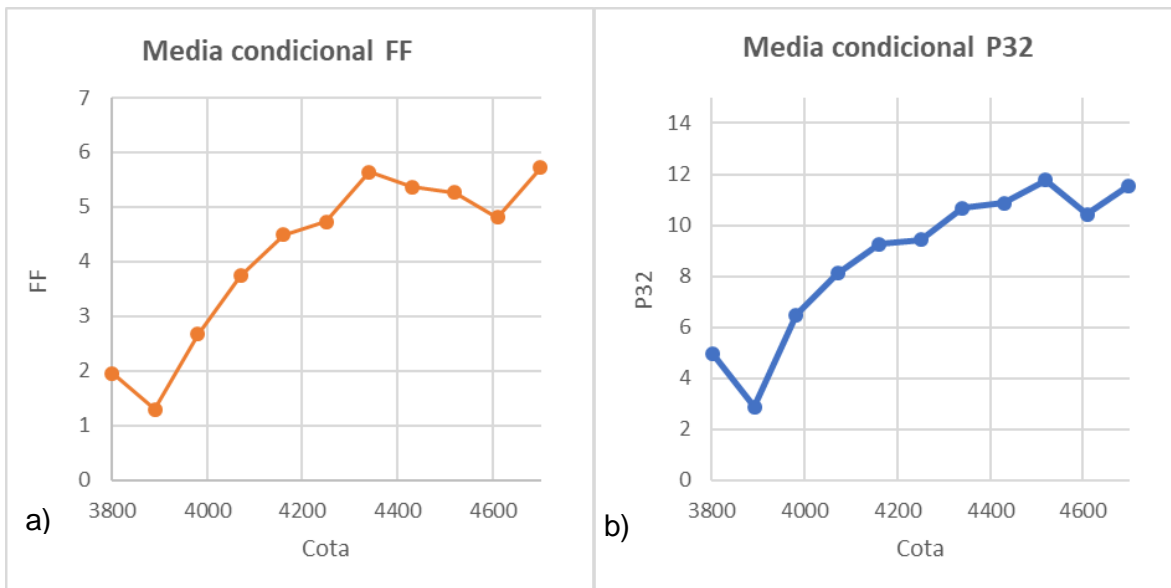


Ilustración 23: a) Media condicional de compósitos por Cota, para FF. b) Media condicional de compósitos por cota para FF. Elaboración propia.

El comportamiento espacial es similar para FF y P32, lo que indica una correlación espacial. Ambas variables tienen valores más altos cerca de superficie, con un aumento consistente entre cota 3.800m y 4.300m, luego estos valores se estabilizan entre 4.300m y 4.800m, el valor máximo de FF se encuentra cerca de los 4.300m y para P32 es cerca de los 4.500m.

Para analizar el comportamiento multivariable, se hizo una nube de dispersión entre ambas variables, y también se calculó el coeficiente de correlación lineal.

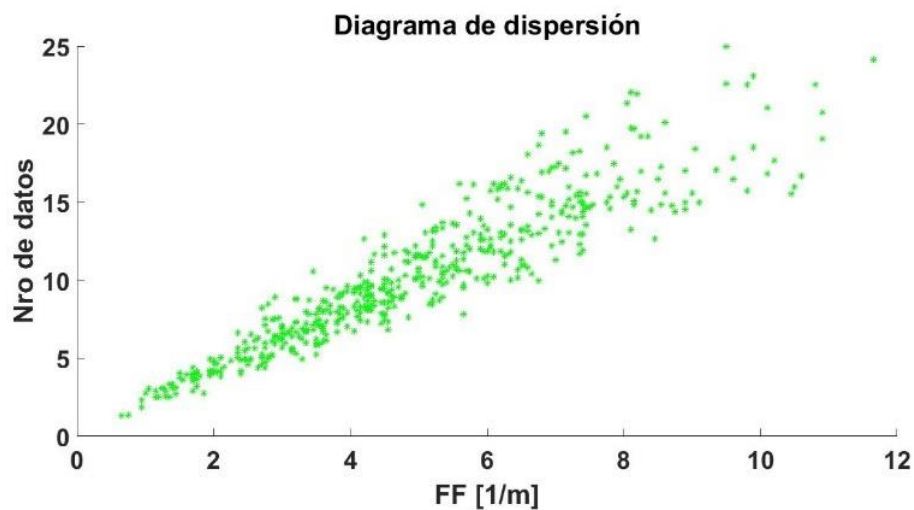


Ilustración 24: Nube de dispersión entre FF y P32. Elaboración propia

En el gráfico se puede observar un diagrama de dispersión con forma lineal, además el coeficiente de correlación entre ambas variables es de 0.931 lo que indica que las variables poseen una alta correlación lineal.

3.3 Anamorfosis gaussiana

Dado que los datos utilizados no corresponden a una distribución gaussiana se deben transformar a una distribución normal estandarizada $N(0,1)$, paso necesario para luego hacer simulación condicional. Para esto se calcularon variables gaussianas correspondientes a una deformación de la variable original, conocidos como “*normal scores*”, también se generaron las tablas de transformación para cada variable, necesarias para transformar los datos gaussianos simulados a su distribución estadística original.

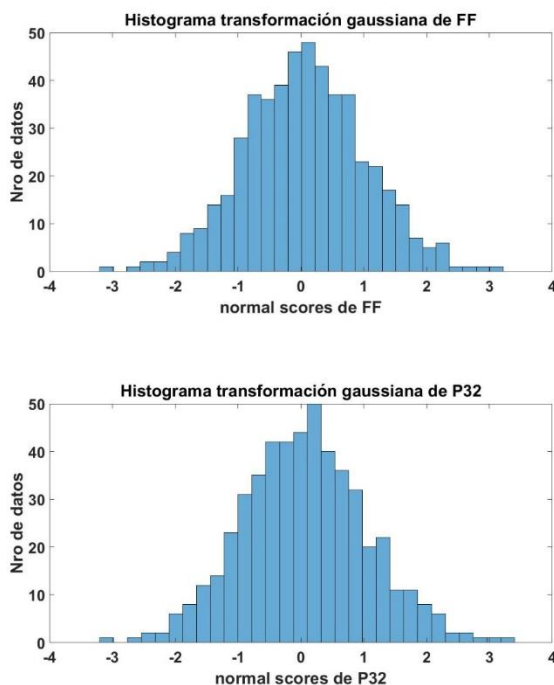


Ilustración 25: Histograma de valores gaussianos para FF y P32. Elaboración propia.

Una vez transformados los datos las variables quedan definidas por sus análogas gaussianas y el variograma se hace en base a estos datos. Como el histograma no corresponde a una variable continua se debe hacer una etapa posterior de “modelamiento de colas” (*tail modelling*), para evitar que la transformación de los datos generada de forma empírica termine de forma brusca.

Se intentó modelar con distintos parámetros de terminación de colas para el límite superior e inferior que correspondientes a la pendiente de la curva ajustada en los extremos, estos parámetros se fijaron en 1 para la cola inferior y 1 para la cola superior, tanto para FF como para P32.

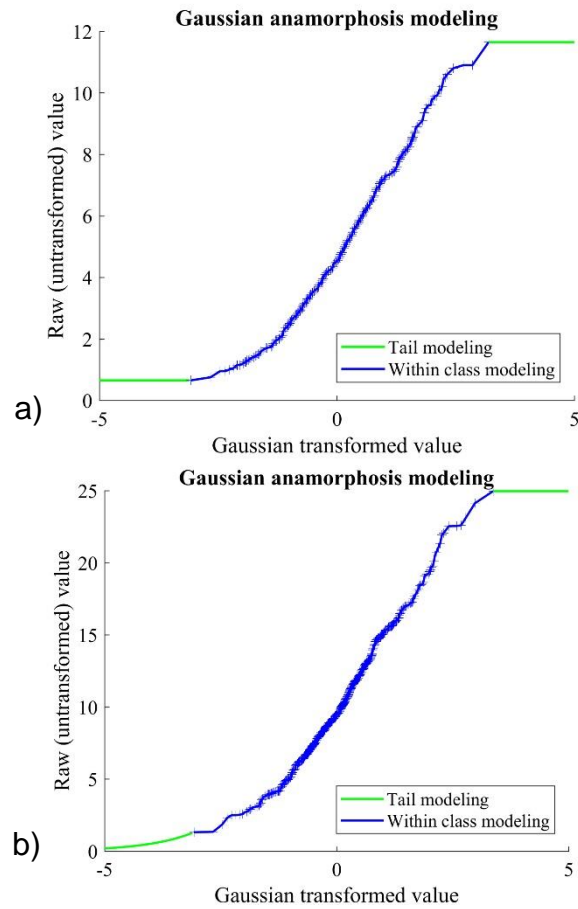


Ilustración 27: Modelamiento de colas para histograma de nscores de a) FF, b) P32. Elaboración propia.

3.4 Modelamiento variográfico

Se utilizaron variogramas para modelar la variabilidad espacial de los datos, para esto primero se calcularon los variogramas experimentales en las direcciones de mayor anisotropía.

Al analizar los variogramas en diferentes direcciones en la horizontal sin encontrar una dirección principal de anisotropía se decidió realizar un variograma omni-horizontal, con Azimut de 0° , y una tolerancia angular de 90° en la horizontal. Se eligió un tamaño de paso (*lag*) de 60m, que corresponde aproximadamente al espaciamiento entre sondajes, con una tolerancia de paso de 30m, un total de 30 pasos (1800m), y una tolerancia de 22.5° en la dirección vertical para abarcar un mayor nro. de pares.

El otro eje de anisotropía se definió como la dirección vertical utilizando un Azimut de 0° con tolerancia de 90° en la horizontal, y un Dip de 90° correspondiente a la orientación preferencial de los sondajes, se utilizó una tolerancia angular de 22.5° en la vertical, un paso de 20m, correspondiente al tamaño de los compósitos, una tolerancia de 10m, y 20 saltos (400m).

Tabla 4: Parámetros utilizados en variograma experimental. Elaboración propia.

Dirección	Azimut	Az.tol	Dip	Dip.tol	Lag	Nro Lag	Lag. tol
Omni-Horizontal	0	90	0	22.5	60	30	30
Vertical	0	90	90	22.5	20	20	10

Para utilizar un modelo de estimación es necesario conocer el modelo de variograma para cualquier distancia de paso, para esto los variogramas experimentales fueron modelados según variogramas teóricos, a partir de una combinación de estructuras, llamados variogramas anidados. Cada variograma tiene su propio alcance y meseta relativa en las dos direcciones principales ya definidas (omni-horizontal y vertical).

Para ajustar los variogramas teóricos se utilizaron variogramas del tipo esférico, porque coincide con el comportamiento del variograma experimental, y es uno de los modelos más comúnmente usados. Se modelaron los variogramas experimentales directos y cruzados, a partir de un ajuste semiautomático eligiendo la cantidad y tipo de estructuras a ajustar, y su alcance relativo (*range*), con ajuste automático de la meseta. Se ajustaron cuatro variogramas anidados del tipo esférico, los modelos ajustados fueron los siguientes:

$$\begin{aligned} \gamma(h) = & \begin{pmatrix} 0.141 & 0.124 \\ 0.124 & 0.108 \end{pmatrix} \text{nugget} + \begin{pmatrix} 0.312 & 0.279 \\ 0.279 & 0.249 \end{pmatrix} \text{sph}(105,90) + \begin{pmatrix} 0.08 & 0.132 \\ 0.132 & 0.222 \end{pmatrix} \text{sph}(250,150) \\ & + \begin{pmatrix} 0.277 & 0.15 \\ 0.15 & 0.081 \end{pmatrix} \text{sph}(350,\infty) + \begin{pmatrix} 0.115 & 0.167 \\ 0.167 & 0.243 \end{pmatrix} \text{sph}(500,\infty) \end{aligned} \quad (3.6)$$

La meseta relativa se entrega en una matriz donde el valor en la posición 1,1 (fila 1, columna 1) corresponde a la meseta de FF y el valor 2,2 (fila 2 columna 2) corresponde a la meseta de P32, la meseta de los variogramas cruzados son valores iguales en la diagonal, el primer factor corresponde al efecto pepita, y los siguientes corresponden a la meseta relativa de cada modelo con alcance correspondiente a las dos direcciones de anisotropía entre paréntesis.

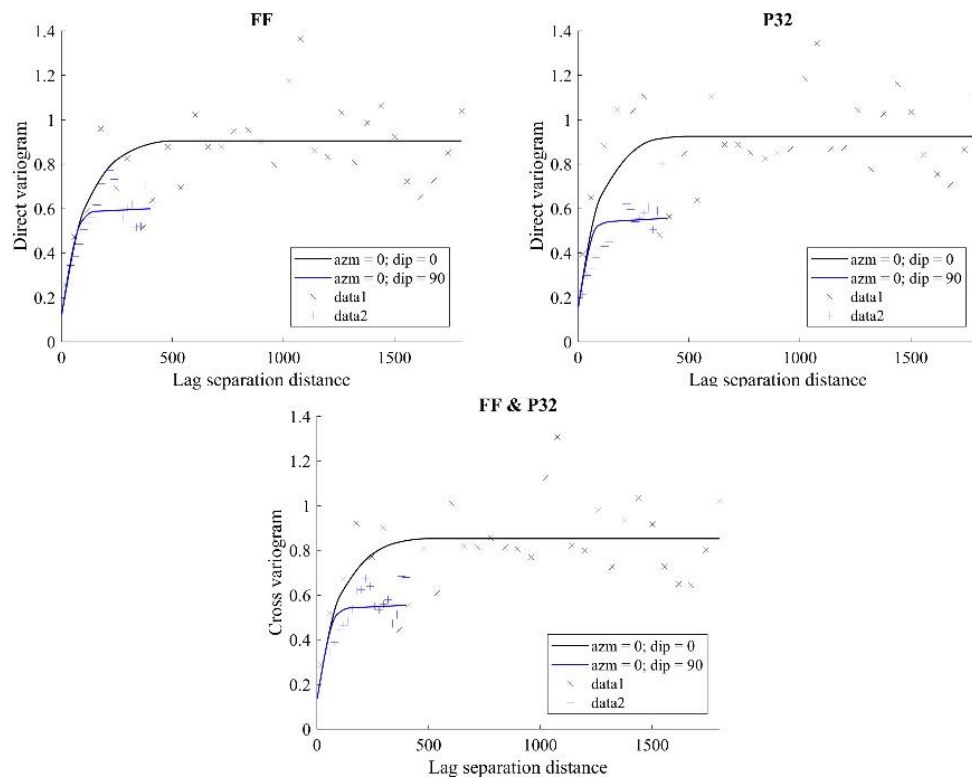


Ilustración 28: Variogramas directos y cruzados para FF y P32 Elaboración propia.

Se consideró utilizar efecto pepita en ambos variogramas para modelar variabilidad a pequeña escala presente tanto en el FF como en P32. El variograma experimental de FF presenta mejor estructura que P32, por lo que, se priorizó el modelado de ese variograma. El modelamiento de variogramas siguió un proceso iterativo hasta obtener una validación cruzada aceptable, según se explica en la siguiente sección.

3.5 Selección de parámetros de simulación

Se eligió utilizar un algoritmo de simulación, ya que, permite cuantificar la incertidumbre asociada a cada variable, y además modela de mejor manera la variabilidad de los datos sin generar tanto suavizamiento. A su vez la simulación permite utilizar ciertas herramientas probabilísticas, al generar varias realizaciones equiprobables compatibles con los datos originales. Se eligió el algoritmo de bandas rotantes por su rapidez de cálculo en comparación con otros métodos como la simulación gaussiana secuencial (SGS).

Existen diversos algoritmos para generar co-simulación geoestadística. El algoritmo diseñado por (CARR & MYERS, 1985) que está limitado a un modelo de bandas rotantes para espacios 2D y modelos de covarianza esféricos. Otros softwares como GSLIB (Deutsch & Journel, 1998), GCOSIM3D (HERNÁNDEZ & JOURNEL, 1993), Gstats (Pebesma, 2003), y SGEMS (REMY, BOUCHER, & WU, 2009) que sólo permiten generar co-simulación gaussiana secuencial, que es más lenta de computar debido a la utilización de un cokriging cada vez más grande que incluye los datos simulados. En esta memoria se utilizó la subrutina TBCOSIM perteneciente a Xlib (Emery, 2018) que permite realizar simulación de bandas rotantes en R^3 utilizando el lenguaje Matlab.

Para realizar un modelo simulación se requiere tener un modelo de variograma previamente validado, además de una grilla, que corresponde a un modelo 3D de bloques en donde se realizará la estimación. La grilla se generó para

la región en la que se encuentran los datos de compósitos, incluyendo una pequeña holgura para no dejar compósitos fuera de esta región. De esta forma se creó una grilla con 1.256.122 bloques de 20m*20m*20m.

Tabla 5: Parámetros para creación de Grilla. Elaboración propia.

	Este	Norte	Cota
Primer nodo	529.300	7.679.350	3.790
Nro de nodos	161	166	47
Tamaño de bloque	20	20	20

..

Para generar las realizaciones se utilizaron los variogramas gaussianos modelados anteriormente, y una configuración de región de búsqueda y número de datos que entregue resultados correctos.

Se eligió generar cien realizaciones, dado que es suficiente para los objetivos planteados en el estudio, se definió un radio de búsqueda de acuerdo con la anisotropía modelada por el variograma, en base a esto se consideró un radio de búsqueda de 1500m*1500m*600m, y de 100 datos para la vecindad, lo que se consideró suficiente, ya que, agregar más datos tendría solo un efecto marginal.

3.6 Validación cruzada

En muchas situaciones prácticas es común testear muchas aproximaciones de estimación y elegir la que funciona mejor (EDWARD H. ISAAKS, 1989). En la validación cruzada se compara la estimación en la posición de cada compósito con los datos reales de la base de datos. Para este propósito primero se saca uno de los compósitos de la base de datos y se estima el valor correspondiente a su posición en base a compósitos restantes utilizando los mismos parámetros de variograma y región de búsqueda a utilizar en el modelo de simulación, este procedimiento se repite para todas las muestras, en un proceso llamado validación cruzada "*leave one out*".

Para validar el modelo es necesario utilizar herramientas estadísticas cuantitativas que permitan evaluar tanto la predicción como la habilidad de medir incertidumbre.

1. Evaluar la habilidad de predicción, para esto se deben promediar las realizaciones para cada punto, y usar un diagrama de dispersión entre los datos reales y los estimados. Se grafican los valores reales en las ordenadas, y los valores predichos en las abscisas. Se espera que los puntos estén dispuestos en la línea diagonal con intercepto cero y pendiente uno, lo que indica que el modelo es insesgado (A. Hekmatnejad, 2017).
2. Validar la capacidad de medir la incertidumbre en la base de datos. Para este propósito, a partir de los valores en cada localización se puede definir un intervalo donde los datos reales tienen una probabilidad p de estar. Luego este valor p se compara con la proporción real de datos en el mismo intervalo p^* . Estos resultados se grafican en un gráfico de incertidumbre, si este gráfico coincide con la diagonal indica que la probabilidad teórica calculada de las realizaciones coincide con la proporción estadística de los valores reales que pertenece a los intervalos de probabilidad. (A. Hekmatnejad, 2017)

El modelo de variograma se validó por el método “*leave one out*”. En la validación cruzada se utilizaron los variogramas previamente modelados y la región de búsqueda y nro. de datos definidos en las secciones anteriores.

A partir del análisis de los gráficos se concluye que ambos modelos son insesgados y que miden de buena manera la incerteza de los datos reales.

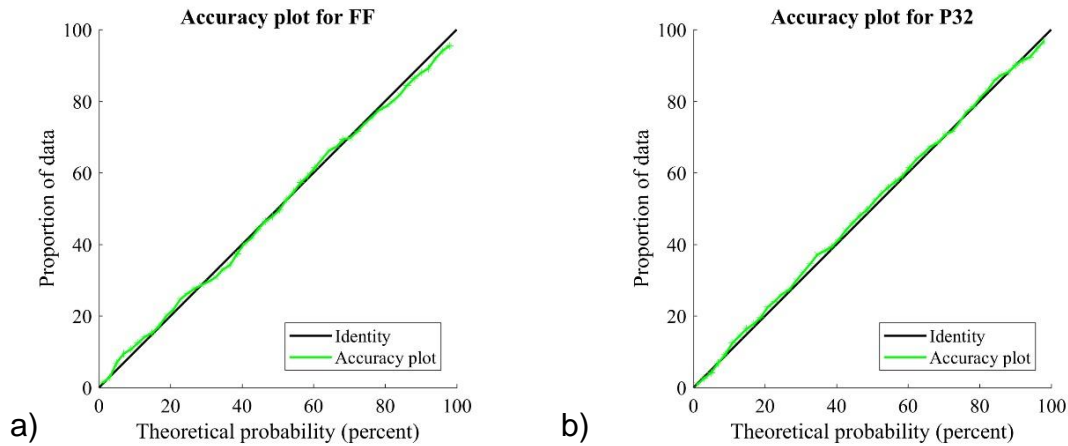


Ilustración 29: Diagrama de exactitud para a) FF, b) P32. Elaboración propia.

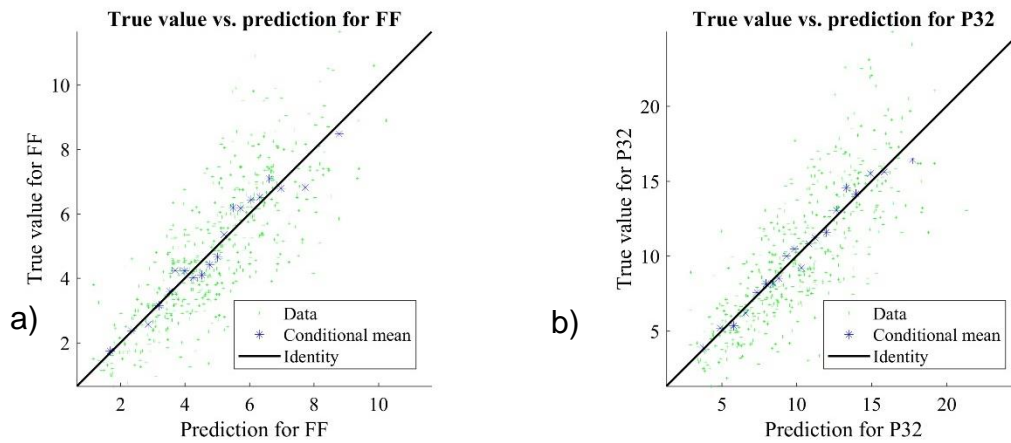


Ilustración 30: Diagrama de precisión para a) FF, b) P32. Elaboración propia.

CAPITULO 4: RESULTADOS

Se simularon cien realizaciones de co-simulación a partir del modelo de variograma previamente validado, utilizando un radio de búsqueda de 1500m*1500m*600m, y 100 datos. Estas realizaciones fueron procesadas con un código Matlab para encontrar el promedio, mínimo y máximo de las realizaciones, además se estimó FF y P32 a partir de un modelo de cokriging utilizando los mismos modelos de variograma, vecindad de búsqueda y número de datos, a modo de comparar ambas técnicas de estimación.

Para visualizar los resultados se hicieron cortes a la grilla utilizando el software Sgems con los datos exportados de Xlib. Dada la alta cantidad de información generada en este estudio, y la imposibilidad de mostrar todos los puntos de forma simultánea, se generaron cortes 2D de la grilla, y fueron presentados tres cortes de forma simultánea para apreciar las propiedades tridimensionales de los datos, el resto de los cortes generados son presentados en Anexos.

Los cortes que se muestran de aquí en adelante corresponden a la intersección de 3 planos: Este 532.440m, Norte 7.679.750m, y Cota 4390m. En base a estos cortes se muestra la primera realización, el promedio, el mínimo y máximo de cien realizaciones y el cokriging. También se presentan las estadísticas básicas y el histograma, para comparar la distribución estadística de las estimaciones en comparación con datos reales, y así cuantificar el suavizamiento en la estimación.

4.1 Resultados de la primera realización

Las realizaciones corresponden a soluciones equiprobables que honran todos los datos, y que poseen un comportamiento local compatible con el conocimiento a priori del estilo de variaciones locales en la entidad modelada (Mallet, 2002). En base a esta definición es posible notar que cada realización tiene una varianza e histograma muy similar a los datos modelados, y que incluye valores atípicos como el mínimo y el máximo de los datos que no están presentes en otros modelos de estimación, además el valor promedio de cada realización es prácticamente igual a la entidad modelada para ambas variables.

Tabla 6: Estadísticas primera realización de co-simulación. Elaboración propia.

Estadísticas	FF	P32
Media	4.723	9.925
Varianza	4.28	17.507
Mínimo	0.65	1.302
Cuartil inferior	3.2	6.73
Mediana	4.5	9.395
Cuartil superior	6.2	12.904
Máximo	11.65	24.962

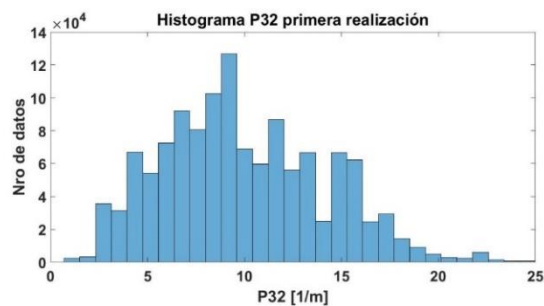
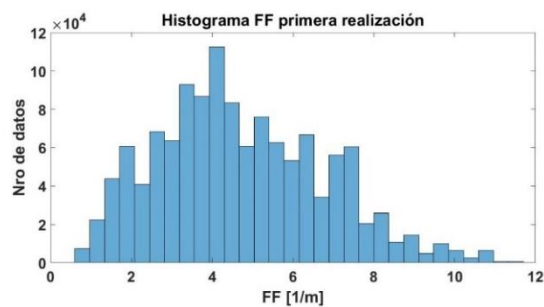


Ilustración 31: Histograma primera realización, para FF y P32. Elaboración propia.

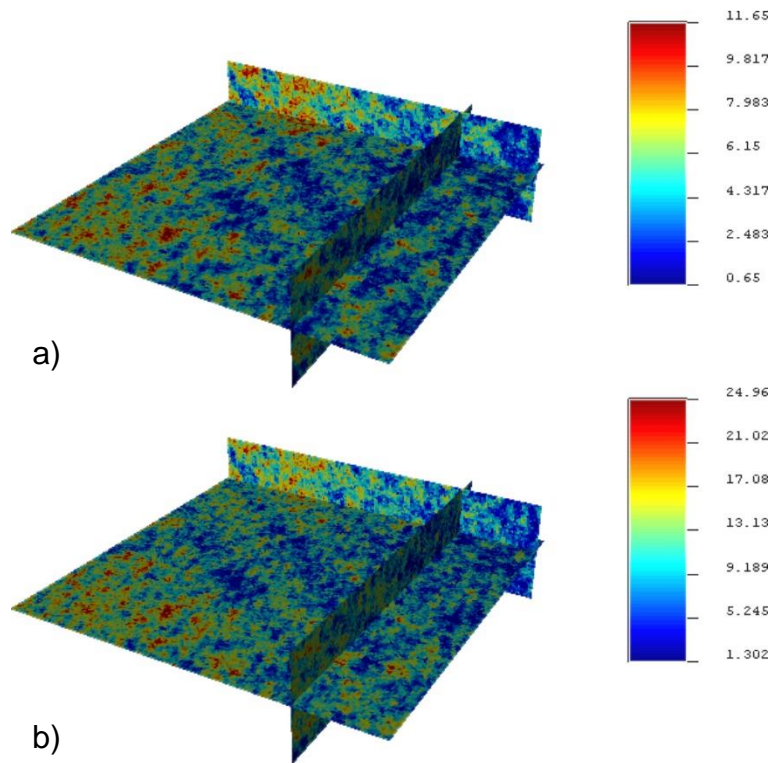


Ilustración 32:: Vista cortes 3D de primera realización, para a) FF, b) P2. Elaboración propia.

A partir de los cortes en la grilla se observa una alta variabilidad en los datos, además se destaca que ambas variables tienen un comportamiento espacial similar, aunque FF tiene mayor presencia de valores muy altos de fracturamiento (color rojo) como también mayor presencia de valores muy bajos (azul), en general en ambos casos hay una baja presencia de valores intermedios (amarillo/verde).

4.2 Resultados del promedio de cien realizaciones

El promedio de las realizaciones entrega el valor la estimación más probable para la variable de interés por lo que entrega valores similares a la estimación por kriging, pero con menor suavizamiento, debido a que cada realización representa la variabilidad de los datos y sus valores atípicos.

Tabla 7: Estadísticas del promedio de cien realizaciones. Elaboración propia.

Estadísticas	FF	P32
Media	4.96	10.412
Varianza	0.946	3.896
Mínimo	0.943	2.256
Cuartil inferior	4.232	9.02
Mediana	4.8719	10.286
Cuartil superior	5.676	11.766
Máximo	10.66	21.39

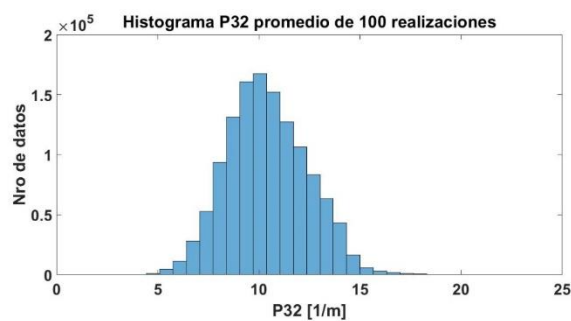
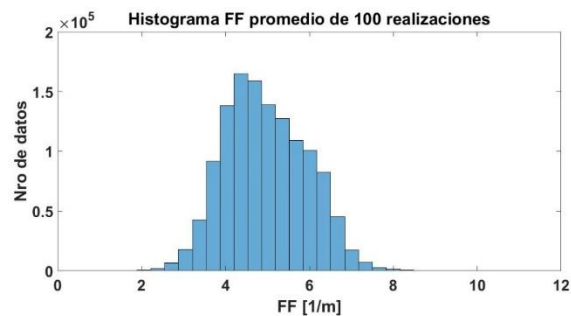


Ilustración 33: Histograma del promedio de cien realizaciones, para FF y P32. Elaboración propia.

Tanto las estadísticas como el histograma son más suaves, que las obtenidas para la primera realización. El valor promedio de los bloques es un 3% mayor para FF, y un 4% mayor para P32 con respecto a los valores de compuesto, lo que indica una estimación aceptable, la varianza es un 81% menor para ambas variables, lo que es esperable para un método de estimación que siempre genera suavizamiento, el valor mínimo es un 45% mayor para FF y un 72% mayor para P32, y el valor máximo es un 8 %menor para FF y un 14% menor para P32 en comparación con los datos de compósitos, lo que indica que el modelo estima de mejor manera los valores más altos de FF y P32.

En general los resultados están dentro de lo esperable, y lo más destacable es que el valor promedio es muy similar al promedio de los compósitos lo que indica una buena estimación, aunque entrega una cierta sobreestimación para los valores más bajos de FF y P32.

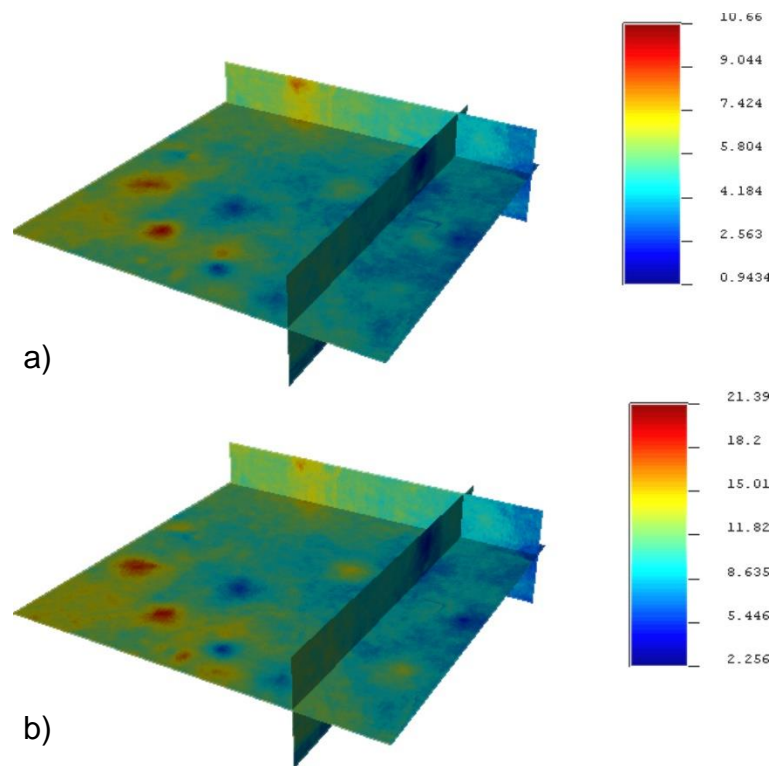


Ilustración 34: Vista cortes 3D del promedio de 100 realizaciones, para a) FF, b) P2. Elaboración propia.

El comportamiento espacial del promedio de las realizaciones es más regular que el de una realización, las zonas donde el fracturamiento es mínimo y máximo están bien definidas, y no hay una gran presencia de valores intermedios cercanos al promedio.

4.3 Resultados del mínimo y máximo de cien realizaciones

El mínimo y máximo de las realizaciones entrega una idea del intervalo en que se encuentran los valores de las realizaciones para cada bloque. Se puede utilizar las realizaciones de cada bloque como una distribución de datos con los cuales hacer mapas de probabilidad para valores de FF o P32 de interés operativo, esta aproximación se escapa a los alcances de esta memoria, pero es especialmente útil para cuantificar la incertidumbre en la estimación y aplicarlo a la operación minera.

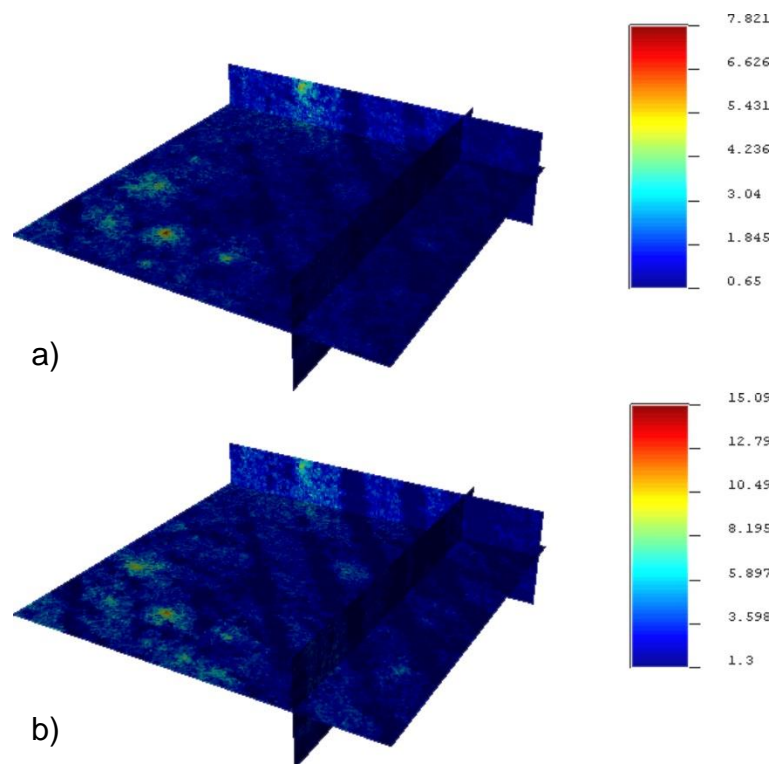


Ilustración 35: Vista cortes 3D del mínimo de 100 realizaciones, para a) FF, b) P2. Elaboración propia

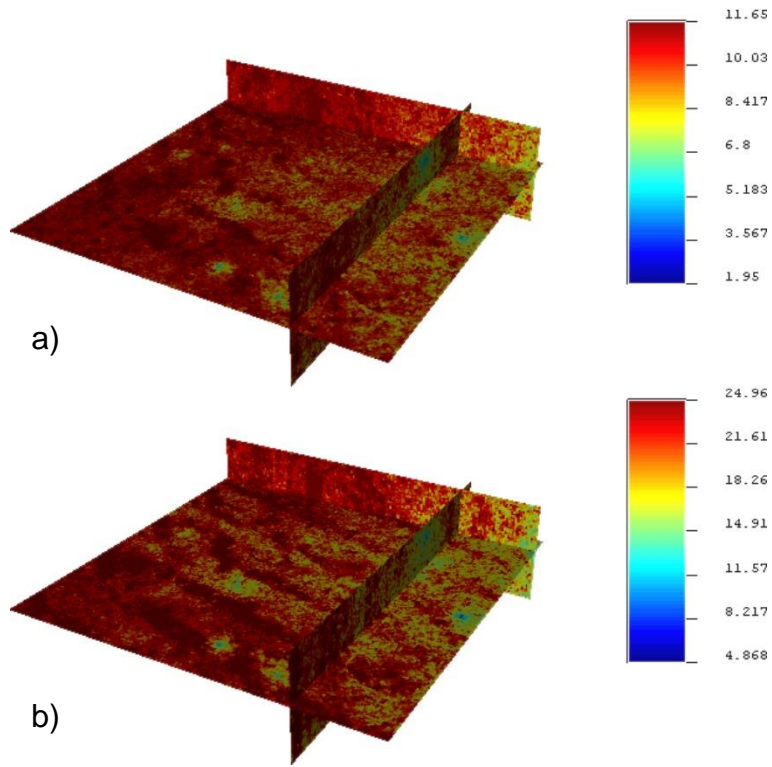


Ilustración 36: Vista cortes 3D del máximo de 100 realizaciones, para a) FF, b) P2. Elaboración propia

4.3 Resultados del modelo de cokriging

El modelo de cokriging, entrega una sola solución suavizada que es la más probable para las variables modeladas, el resultado es similar al promedio de las realizaciones de simulación, pero se espera una estimación algo más suavizada y por ende con menor presencia de valores atípicos.

Tabla 8: Estadísticas de cokriging para FF y P32. Elaboración propia.

	FF	P32
Media	4.997	10.51
Varianza	0.827	3.556
Mínimo	0	0
Cuartil inferior	4.361	9.227
Mediana	4.906	10.352
Cuartil superior	5.612	11.835
Máximo	10.236	20.633

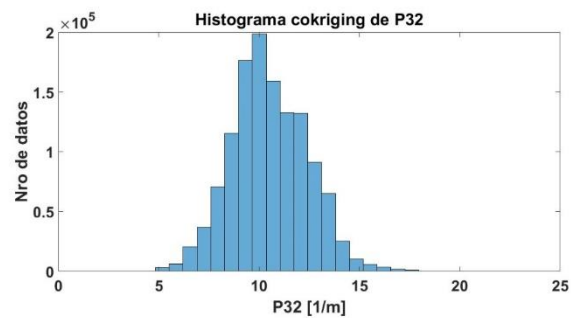
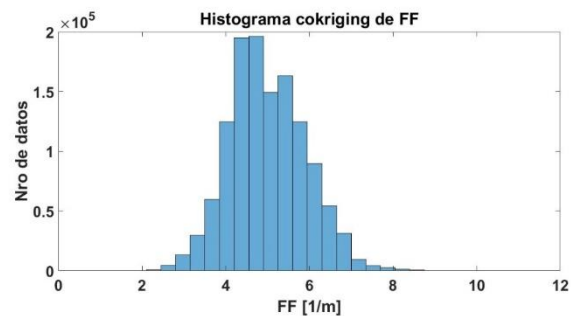


Ilustración 37: Histograma del cokriging, para FF y P32. Elaboración propia.

Tanto las estadísticas como el histograma del cokriging son similares al promedio de las realizaciones. En comparación a los datos de compósito el valor promedio es un 4% mayor para FF, y un 5% mayor para P32, lo que indica una estimación aceptable, la varianza es un 83% menor para FF, y un 82% menor para P32 por lo que el suavizamiento es mayor que en el promedio de realizaciones, el valor mínimo es un 100% menor para FF y P32, y el valor máximo es un 12 %menor para FF y un 17% menor para P32 , en base a esto se puede afirmar que el cokriging genera más suavizamiento y estima de peor manera los datos atípicos tanto del mínimo como del máximo para ambas variables.

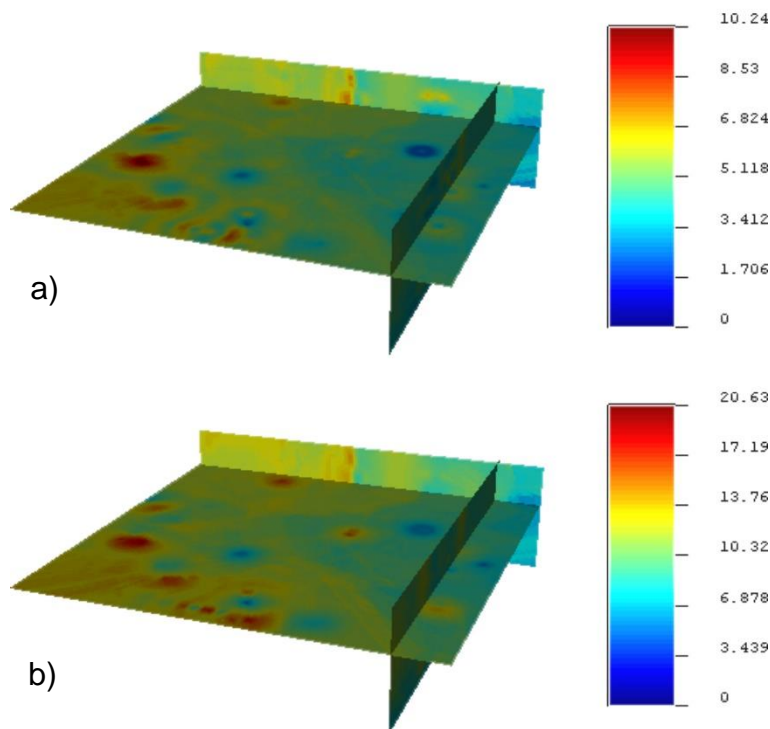


Ilustración 38: Vista cortes 3D de cokriging para, a) FF, b) P32. Elaboración propia.

El comportamiento espacial es bastante similar al promedio de las realizaciones, pero con una mayor presencia de valores intermedios (amarillo) para ambas variables y el comportamiento es algo más irregular para los valores más altos de FF y P32.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 CONCLUSIONES

Se generó un modelo de variograma a partir de cuatro modelos del tipo esférico con efecto pepita, se comprobó que el modelo es insesgado y preciso por validación cruzada, las realizaciones generadas en base a este modelo tuvieron estadísticas e histograma, muy similares a los datos reales por lo que reproducen de buena manera la variabilidad de los datos.

Se aplicó una metodología multivariable al utilizar variogramas directos y cruzados, se pudo estimar ambas variables en soporte de bloques a partir de un modelo de co-simulación.

A partir de la comparación de los resultados del modelo de simulación y cokriging se concluyó que la simulación genera un menor suavizamiento al tener un promedio más cercano a los valores reales, una varianza mayor y menor sesgo tanto para los valores más altos, y más bajos de fracturamiento.

Las realizaciones obtenidas del modelo de simulación pueden ser utilizadas para hacer zonificación de zonas geotécnicas al definir diferentes intervalos de fracturamiento para FF y/o P32 con diferentes implicaciones técnicas, esta aplicación sin embargo se escapa a los alcances de esta memoria.

5.2 RECOMENDACIONES

Considerar utilizar un software en base a GPU, ya que, los tiempos de cómputo son considerables al trabajar con software basado en CPU como XLIB.

Utilizar una base de datos lo más representativa y regular posible, para obtener una estimación más robusta, teniendo en cuenta que un modelo de estimación por más complejo y sofisticado que sea sólo es un reflejo de los datos modelados.

Generar un modelo de kriging es una buena forma de comprobar que los parámetros utilizados en la simulación son correctos, porque requiere un menor tiempo de cómputo y procesamiento de datos.

Utilizar un tamaño de compósitos muy pequeños pueden generar problemas en la estimación por lo que se sugiere utilizar compósitos de acuerdo con el tamaño de bloque.

Como líneas de trabajo futuro están:

- Generar un modelo geoestadístico para otras variables geotécnicas.
- Estimar la intensidad de fracturas utilizando datos multi fuente, 1D (sondajes y scanlines), 2D (tracemaps), y 3D (fotogrametría).
- Generar mapas de probabilidad para distintos valores de P32 y FF.
- Generar zonificación en base a los resultados de simulación geoestadística.

CAPÍTULO 6: BIBLIOGRAFÍA

- Armstrong, M., Galli, A., Beucher, H., Loc'h, G. L., Renard, D., Doligez, B., . . . Geffroy, F. (2011). *Plurigaussian simulations in geosciences*. Avon: Springer.
- Bárdossy, A. (1997). *Introduction to Geostatistics*. Institute of Hydraulic Engineering.
- Barton, N. R., Lien, R., & Lunde, J. (1974). Engineering Classification of Rock Masses for the Design of Tunnel Support. *Rock Mechanics and Rock Engineering* 6, (págs. 189-236).
- Berg, C. R. (2012). *THE EFFECT OF FRACTURE AND BOREHOLE ORIENTATION ON FRACTURE FREQUENCY AND DENSITY*.
- Bieniawski, Z. (1973). CIVIL ENGINEER IN SOUTH AFRICA. *CIVIL ENGINEER IN SOUTH AFRICA Vol 15* (págs. 353-343). Johannesburg: South African Institution of Civil Engineers.
- Brzovic, A., & Leon, M. I. (2017). Integrated photogrammetry and discrete fracture network modeling to determine rock structure around excavations at the El Teniente mine. *9th International Symposium on Rockbursts and Seismicity in Mines*. Santiago.
- CARR, J. R., & MYERS, D. E. (1985). *COSIM: A FORTRAN IV PROGRAM FOR COCONDITIONAL SIMULATION*. Computers & Geosciences Vol 11, No 6.
- CHILÈS, J.-P., & DELFINER, P. (2012). *Geostatistics Modeling Spatial Uncertainty*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- CHILÈS, J.-P., WACKERNAGEL, H., BEUCHER, H., 1, C. L., & ÉLION, P. (2008). *ESTIMATING FRACTURE DENSITY FROM A LINEAR*. Santiago, Chile: Geostats 2008.
- Deere, D. U. (1963). Technical description of rock cores for engineering purposes. *Rock mechanics and engineering geology* (págs. 16-22). Salzburg: Journal of the international society of rock mechanics.

- Dershowitz, H. (1992). Interpretation of fracture spacing and intensity. *Rock Mechanics, Tilderson & Waversick*, 757-766.
- Deutsch, C. V., & Journel, A. G. (1998). *GSLIB Geostatistical Software Library and user guide*. New York: OXFORD UNIVERSITY PRESS .
- Dung, T. Q., & Thinh, V. D. (2017). *Geostatistics application in spatial analysis of geomechanical properties*. Science and Technology Development Journal, vol 20, no.K4-.
- Eivazy, H., Esmaili, K., & Jean, R. (2016). *Modelling Geomechanical Heterogeneity of Rock Masses Using*. Rock Mech Rock Eng.
- Elmo, D., Rogers, S., Stead, D., & Eberhardt, E. (2014). *Discrete Fracture Network approach to characterise rock mass fragmentation and implications for geomechanical upscaling*. Mining Technology Vol 123 no3.
- Elmo, D., S.Rogers, Stead, D., & Eberhardt, E. (2014). Discrete Fracture Network approach to characterise rock mass fragmentation and implications for geomechanical upscaling. *Mining Technology*, 149-161.
- Elmo, D., Stead, D., & Rogers, S. (2015). GUIDELINES FOR THE QUANTITATIVE DESCRIPTION OF DISCONTINUITIES FOR USE IN DISCRETE FRACTURE NETWORK MODELLING. *13th International Congress of Rock Mechanics* . Montreal.
- Emery, X. (2007). *Apuntes de Geoestadística*. Facultad de ciencias físicas y matemáticas - Universidad de Chile.
- Emery, X. (2018). A turning bands program for conditional co-simulation., (págs. 1850-1862). Santiago.
- ERAZO, M. J. (2008). *GEOESTADÍSTICA APLICADA A PARÁMETROS GEOTÉCNICOS*. Santiago de Chile: Universidad de Chile.
- Ferrari, Tiziana, A., & Giani, G. P. (2011). *Geomechanical surveys and geostatistical analyses in*. Italia: Università degli Studi di Milano,.

- Goodarzi, S., Vishkai, M., Soroush, M., & Gates, I. D. (2018). Geostatistical modeling accounting for variation of reservoir and geomechanical properties in Montney formation, Alberta. En A. R. 18. Estados Unidos.
- Hansen, K. M. (s.f.). *The Use of Sequential Indicator Simulation to Characterize Geostatistical Uncertainty*. Albuquerque: Statistics and Human Factors Sandia National Laboratories.
- Hekmatnejad, A., Emery, X., Brzovic, A., Schachter, P., & Vallejos, J. A. (2017). Spatial modeling of discontinuity intensity from borehole observations. *Engineering Geology* 228, 97-106.
- HERNÁNDEZ, J. J., & JOURNEL, A. G. (1993). *JOINT SEQUENTIAL SIMULATION OF MULTIGAUSSIAN FIELDS*. Geostatistics Tróia.
- Hoek, E. (2007). *Practical Rock Engineering*. North Vancouver, British Columbia: University of Toronto.
- Hosseini, S. A., Asghari, O., & Emery, X. (2017). *Multivariate simulation of block-support grades at Mehdiabad deposit, Iran*. Applied Earth Science.
- ISAAKS, E. H., & SRIVASTAVA, R. M. (1989). *Applied Geostatistics*. New York: OXFORD UNIVERSITY PRESS.
- Lianyang Zhang, H. H. (2000). Estimating the intensity of rock discontinuities. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 37, 819±837.
- Maleki, M., & Emery, X. (2017). Joint simulation of stationary grade and non-stationary rock type for quantifying geological uncertainty in a copper deposit. *Computers and Geosciences* 109, 258–267.
- Mallet, J.-L. (2002). *Geomodelling*. New York: APPLIED GEOSTATISTICS SERIES ;OXFORD UNIVERSITY PRESS.
- MANTOGLOU, A., & WILSON, J. L. (1982). *The Turning Bands Method for Simulation of Random Fields*. Massachusetts: WATER RESOURCES RESEARCH,.

- Marcotte, D. (2016). Spatial turning bands simulation of anisotropic non-linear models of coregionalization with symmetric cross-covariances. *Computers & Geosciences*.
- Matheron, G. (1973). The Intrinsic Random Functions and Their Applications. *Advances in Applied Probability, Vol. 5, No. 3*, 439-468.
- Mauldon, M., & Mauldon, J. (1997). Fracture sampling on a cylinder: from scanline to boreholes and tunnels. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, (págs. 30-129).
- Miyoshi, T., Elmo, D., & Rogers, S. (2018). Influence of data analysis when exploiting DFN model representation in the application of rock mass classification systems. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 1-17.
- Munkhchuluun, M. (2017). *LINKING THE FRACTURE INTENSITY OF AN IN SITU ROCK MASS TO BLOCK CAVE MINE FRAGMENTATION*. Vancouver.
- Namysłowska-Wilczyńska, B. (2015). Application of turning bands technique to simulate values of copper ore deposit parameters in Rudna mine (Lubin-Sieroszowice region in SW part of Poland). En *Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards* (págs. 224-241).
- Palleske, C. K. (2014). *A STUDY OF BIASES, ASSUMPTIONS AND PRACTICAL CONSIDERATION FOR THE USE OF DISCRETE FRACTURE NETWORKS IN GEOMECHANICAL PRACTICE*. Kingston, Ontario: Queen's University.
- Palmstrom, A. (2005). *Measurements of and Correlations between Block Size and Rock Quality Designation (RQD)*. Tunnels and Underground Space Technology.
- Paravarzar, S., Emery, X., & Madani, N. (2015). *Comparing sequential Gaussian and turning bands algorithms for cosimulating grades in multi-element deposits*. *Comptes Rendus Geoscience*.

- Pebesma, E. J. (2003). *Multivariable geostatistics in S: the gstat package*. Computers & Geosciences 30.
- Pinheiro, M., Vallejos, J., Miranda, T., & Emery, X. (2016). *Geostatistical simulation to map the spatial heterogeneity of*. Engineering Geology.
- PRIEST, S. D. (1993). *DISCONTINUITY ANALYSIS FOR ROCK ENGINEERING*. SPRINGER-SCIENCE+BUSINESS MEDIA, B.V.
- Priest, S. D., & HUDSON, J. A. (1981). Estimation of Discontinuity Spacing and Trace Length Using Scoline Surveys. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. Vol. 18* (págs. 183-197). Pergamon Press Ltd.
- REMY, N., BOUCHER, A., & WU, J. (2009). *APPLIED GEOSTATISTICS WITH SGeMS- A user's guide*. CAMBRIDGE: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
- RESTREPO, L. F. (2016). *SIMULACIÓN GEOESTADÍSTICA DE BANDAS ROTANTES APLICADA A LA IDENTIFICACIÓN DE FACIES EN EL BATOLITO ANTIOQUEÑO*. MEDELLIN, COLOMBIA: UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA.
- RIVOIRARD, J. (2003). *COURSE ON MULTIVARIATE GEOSTATISTICS* . Paris: Ecole des Mines de Paris.
- Rogers, S., Elmo, D., Webb, G., & Catalan, A. (2015). Volumetric Fracture Intensity Measurement for Improved Rock Mass Characterisation and Fragmentation Assessment in Block Caving Operations. *Rock Mech Rock Eng 48*, 633-349.
- Séguret, S. A., & Moreno, C. G. (2015). Geostatistical Evaluation of Rock Quality Designation. *IAMG 205*. Freiberg: International Association of Mathematical Geosciences.
- Séguret, S. A., Moreno, C. G., & Rivera, R. F. (2014). Geostatistical Evaluation of Fracture Frequency and Crushing. *Geomechanical design and geomechanical characterization*, 280-288.

- Sen, Z., & Kasi, A. (1984). Discontinuity spacing and RQD estimates from finite length scanlines. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, vol 21, (págs. 203-212).
- TERZAGHI, R. D. (1965). SOURCES OF ERROR IN JOINT SURVEYS.
- Vatcher, J., McKinnonb, S., & Sjöberg, J. (2016). *Developing 3-Dmine-scale geomechanical models in complex geological*. Engineering Geology.
- Verly, G. (1993). *Sequential Gaussian Cosimulation: A Simulation Method Integrating Several Types of Information*. Sunbury-on-Thames: BP Research Centre.
- Wackernagel, H. (2003). *Multivariate Geostatistics—An Introduction*.
- Wang, X. (2006). *Stereological Interpretation of Rock Fracture Traces on Borehole Walls and Other Cylindrical Surfaces* . September 16, 2005.
- Zagayevskiy, Y. (2015). *Multivariate Geostatistical Grid-Free Simulation of Natural Phenomena*. Canadá: University of Alberta.
- Zhang, L. (2016). *Engineering Properties of Rocks*. Butterworth-Heinemann.

CAPÍTULO 7: ANEXOS

```
1 function[composites] =compositing(composite_lenght,Data)
2 composites=[];
3 for i=1:max(Data(:,1))
4     Condition=Data(:,1)==i;
5     Comp_Data=Data(Condition,1:end);
6     Este=Comp_Data(1,5);
7     Norte=Comp_Data(1,6);
8     Cota=Comp_Data(1,7);
9     Sx=Comp_Data(1,8);
10    Sy=Comp_Data(1,9);
11    Sz=Comp_Data(1,10);
12    Interval_min=min(Comp_Data(:,3)):composite_lenght:(max(Comp_Data(:,4))-1);
13    Interval_max=(min(Comp_Data(:,3))+1):composite_lenght:(max(Comp_Data(:,4)));
14    nro_composites=length(Interval_min);
15    Interval_mean=(Interval_min+Interval_max)/2;
16    for j=1:nro_composites
17        cond=(Comp_Data(:,2)>=Interval_min(j) & Comp_Data(:,2)<Interval_max(j));
18        c_data=Comp_Data(cond,1:end);
19        P32=sum(c_data(:,16));
20        FF=size(c_data(:,16),1);
20        FF=size(c_data(:,16),1);
21        if FF==1
22            elseif FF==0
23                P32=-9999;
24                FF=-9999;
25            end
26        X=Este+Interval_mean(j)*Sx;
27        Y=Norte+Interval_mean(j)*Sy;
28        Z=Cota-Interval_mean(j)*Sz;
29        cmp=[X Y Z P32 FF]
30        composites=[composites;cmp];
31    end
32 end
33 composites=double(composites);
34 fid=fopen('composites_m2.txt','w');
35 fprintf(fid,'%s\t%s\t%s\t%s\t%s\t%s\t%s\t\n','X','Y','Z','P32','FF','CV');
36 for ii = 1:size(composites,1)
37     fprintf(fid,'%12.8f\t',composites(ii,:));
38     fprintf(fid,'\n');
39 end
40 fclose(fid);
41 end
```

Ilustración 39: Código Matlab para composición de FF y P32. Elaboración propia.

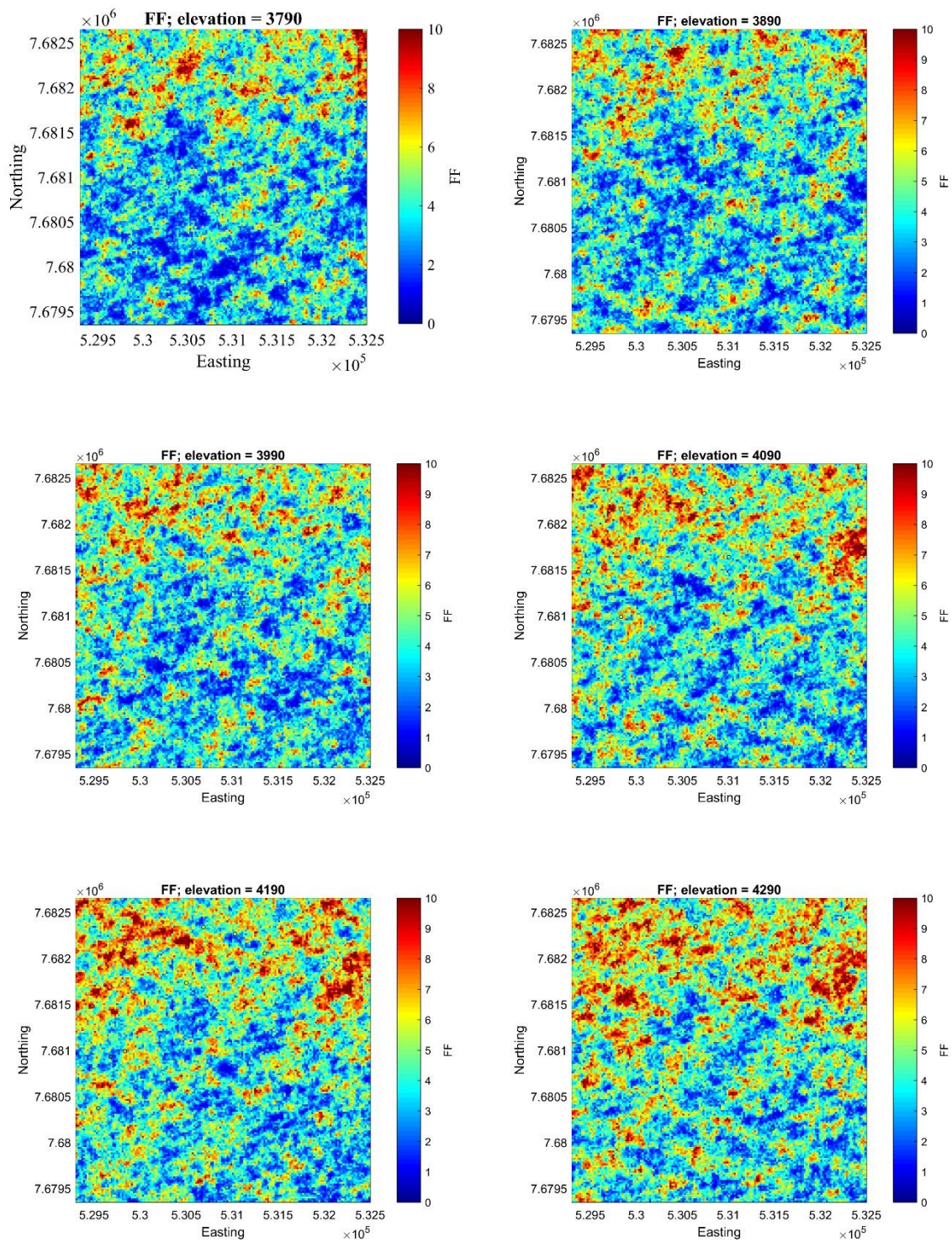


Ilustración 40: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para la primera realización de FF. Elaboración propia.

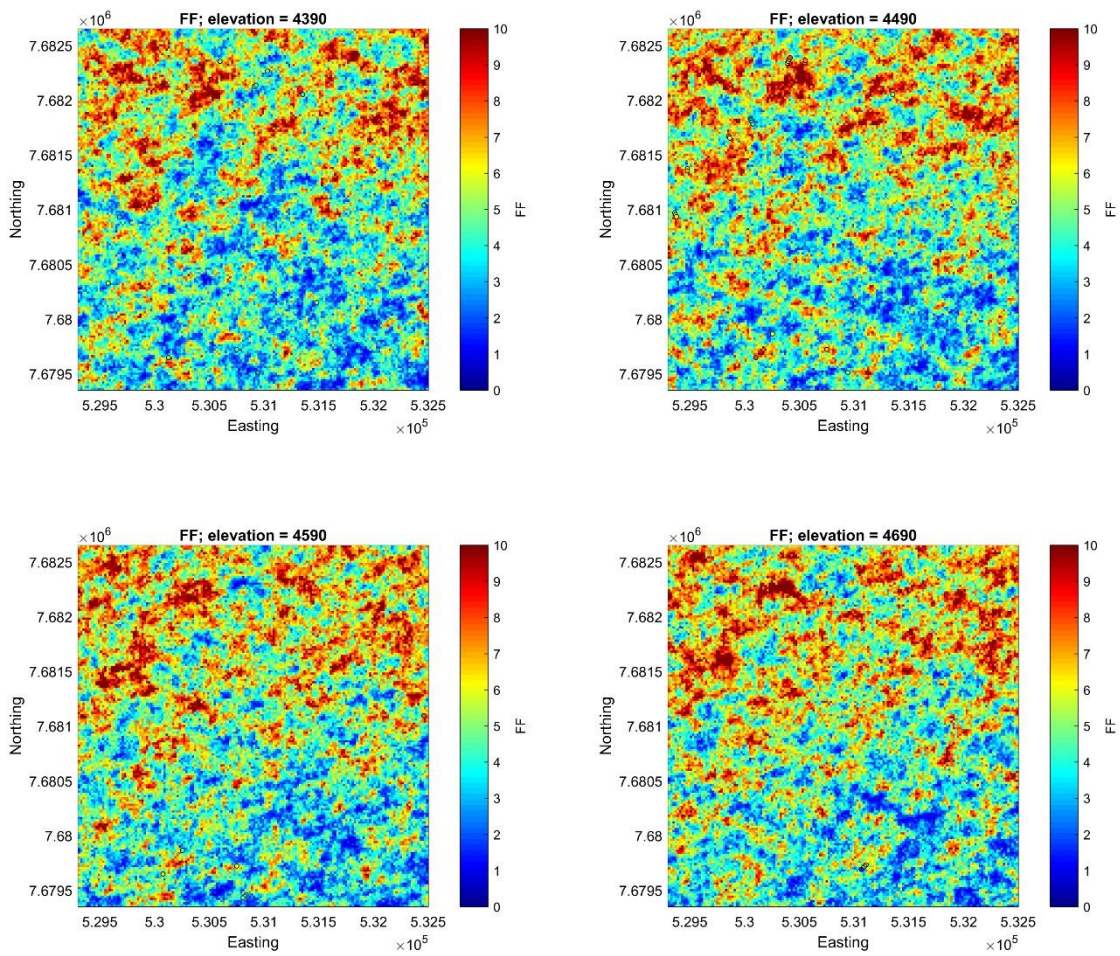


Ilustración 41: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para la primera realización de FF. Elaboración propia.

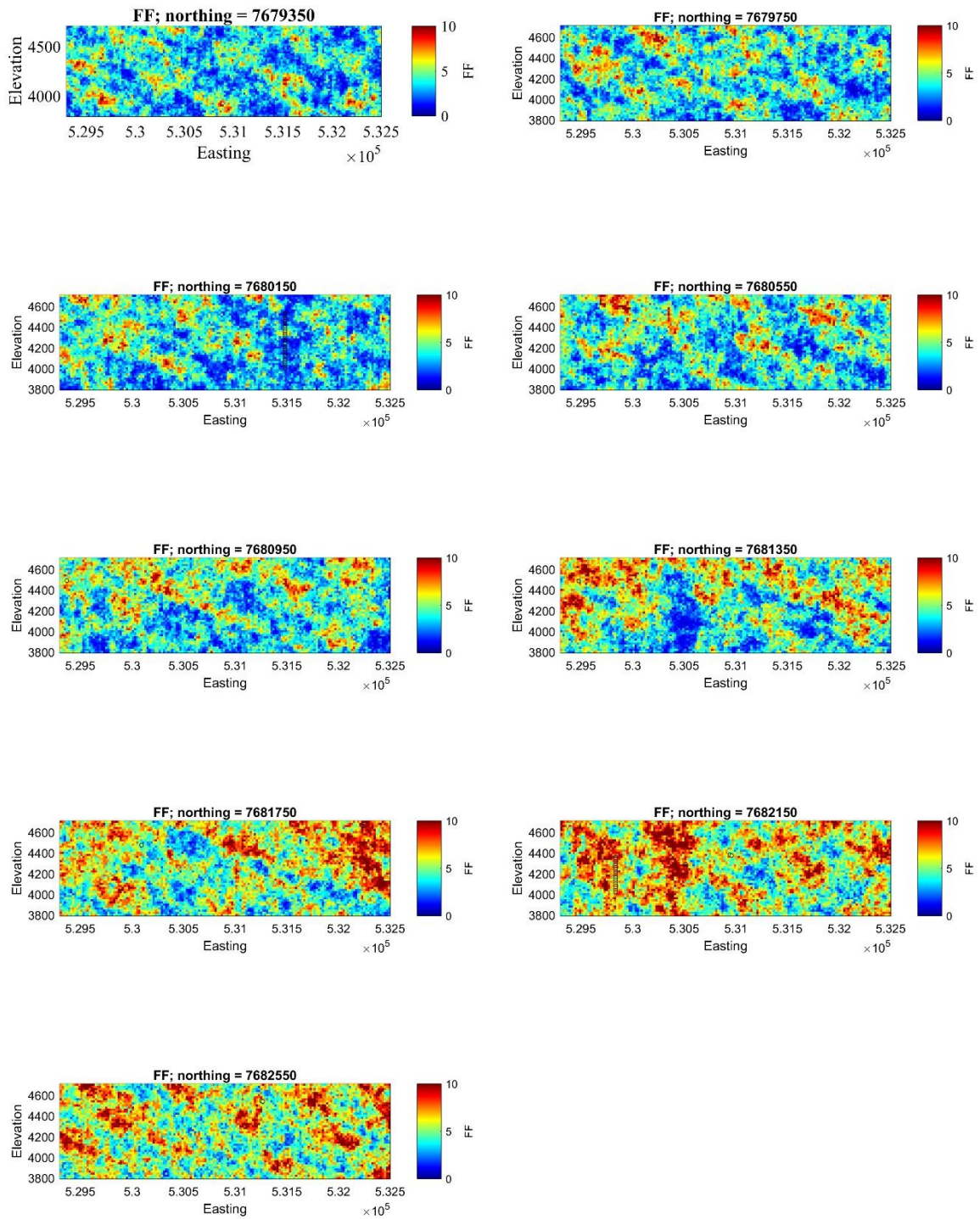


Ilustración 42: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para la primera realización de FF. Elaboración propia.

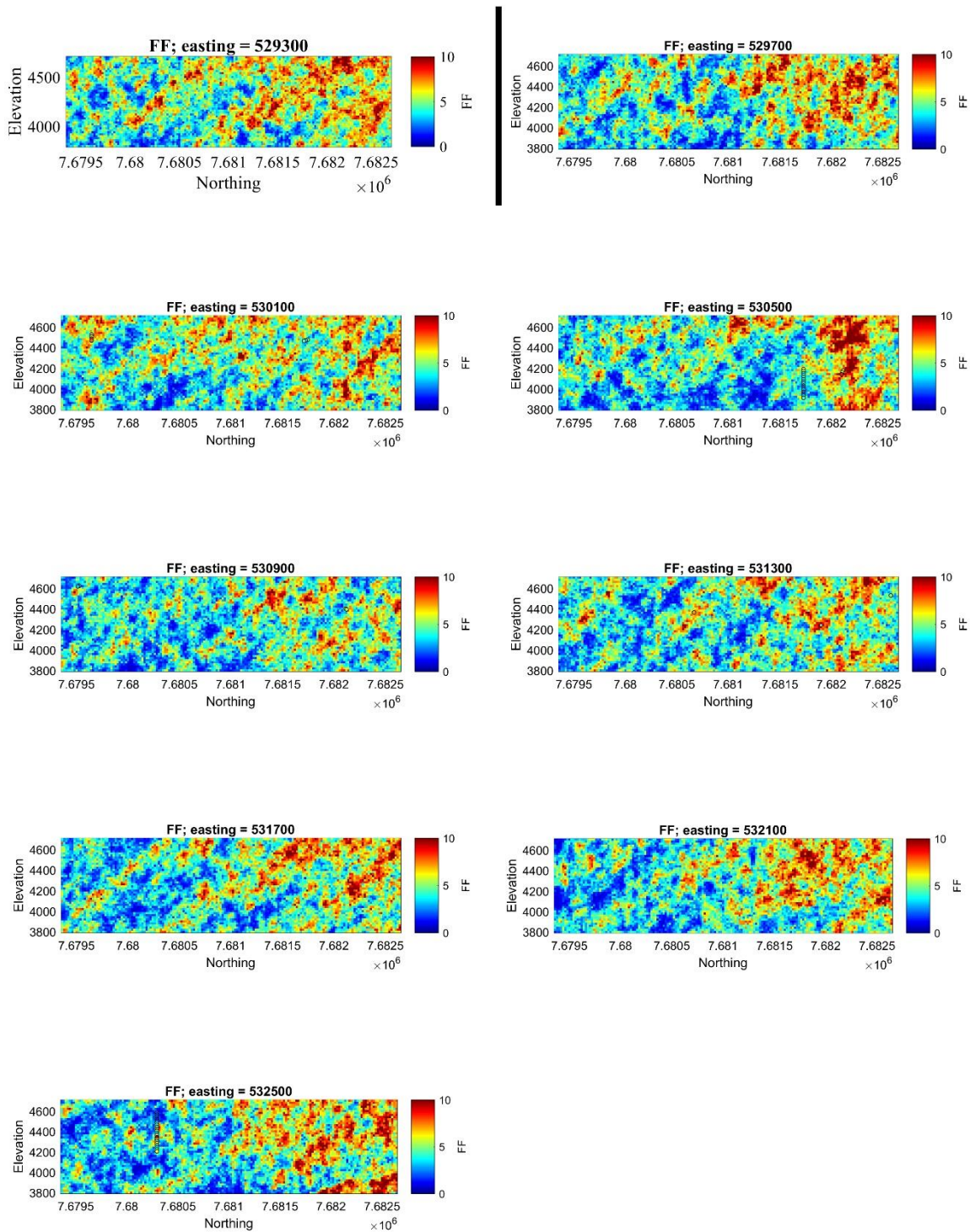


Ilustración 43: Cortes Este-Cota de Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para la primera realización de FF. Elaboración propia.

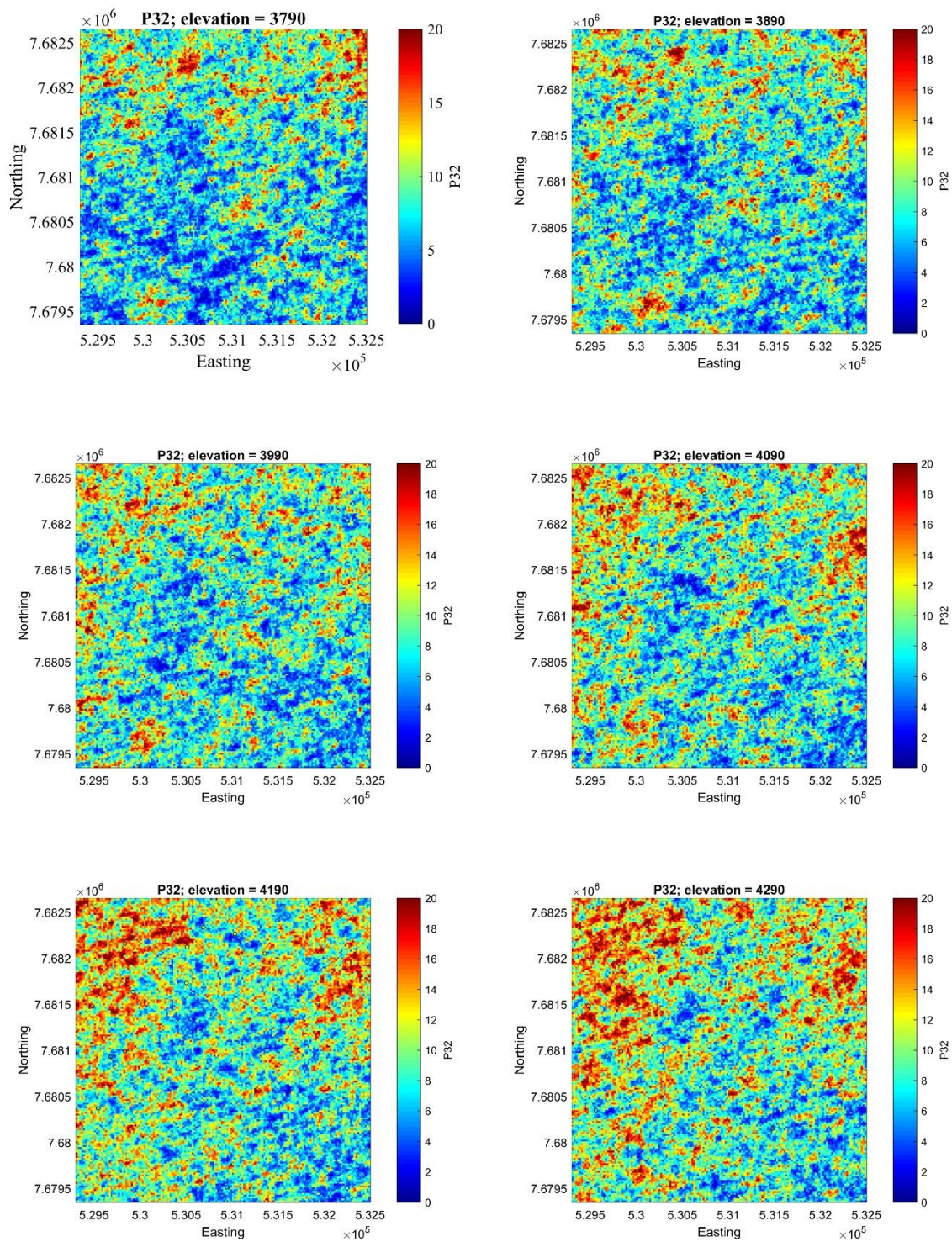


Ilustración 44: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para la primera realización de P32. Elaboración propia.

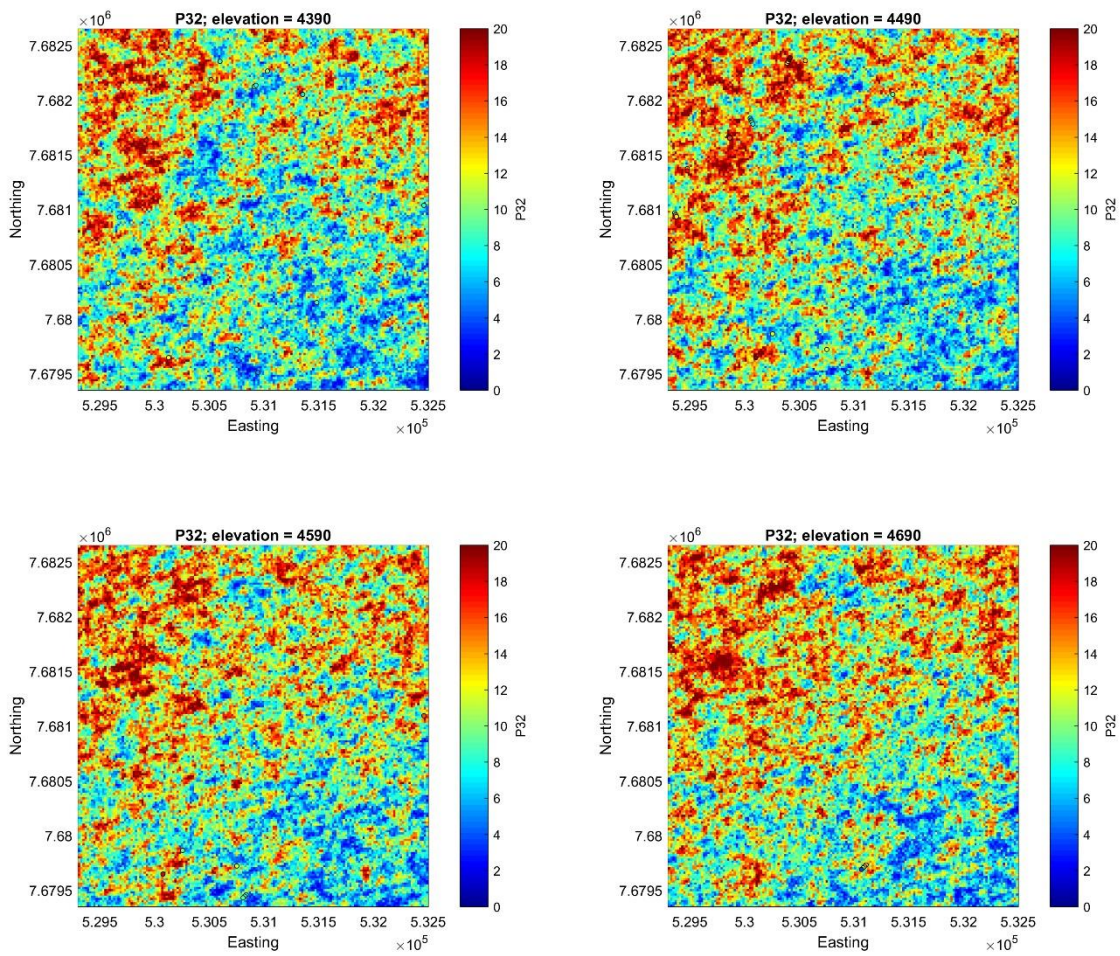


Ilustración 45: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para la primera realización de P32. Elaboración propia.

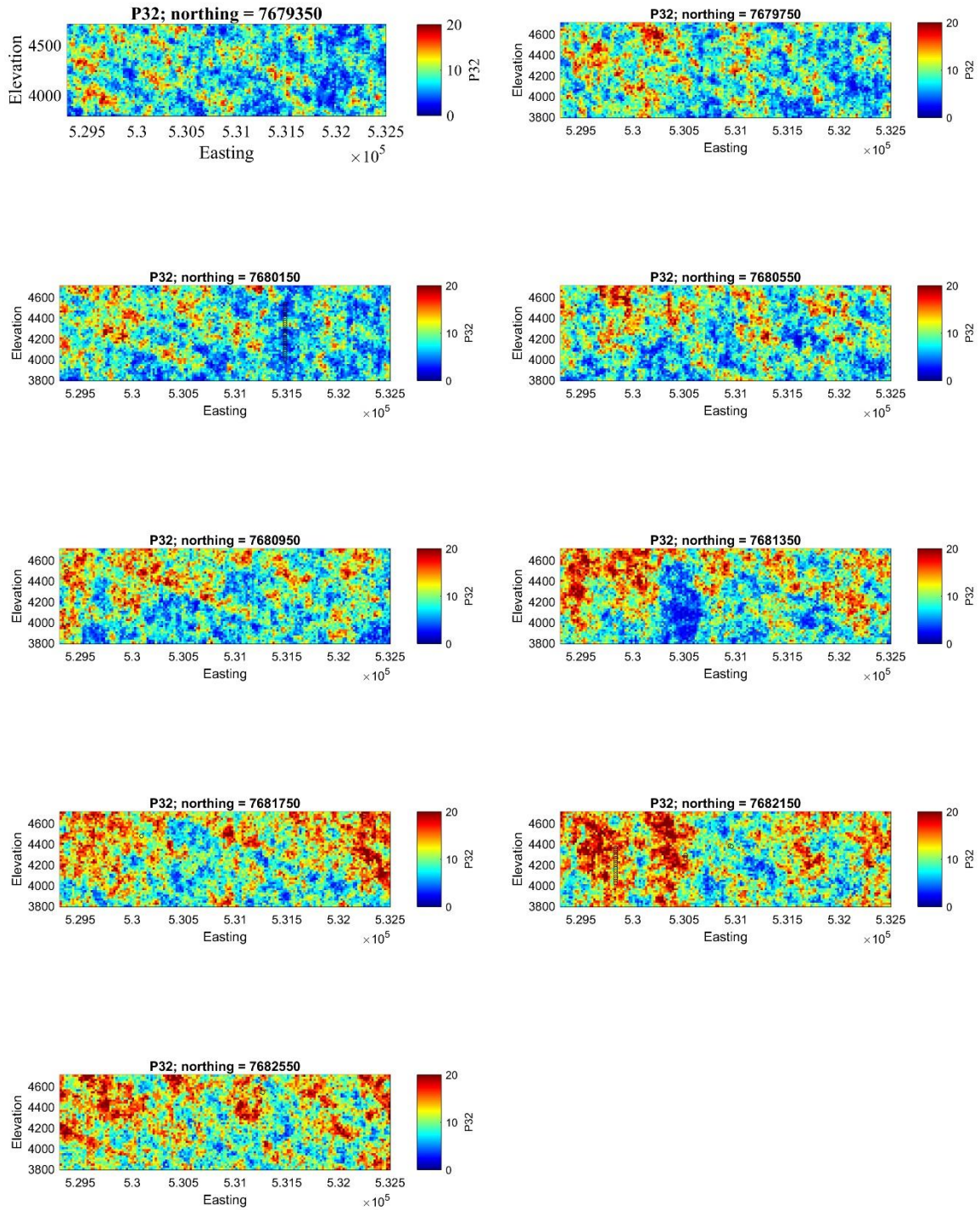


Ilustración 46: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para la primera realización de P32. Elaboración propia.

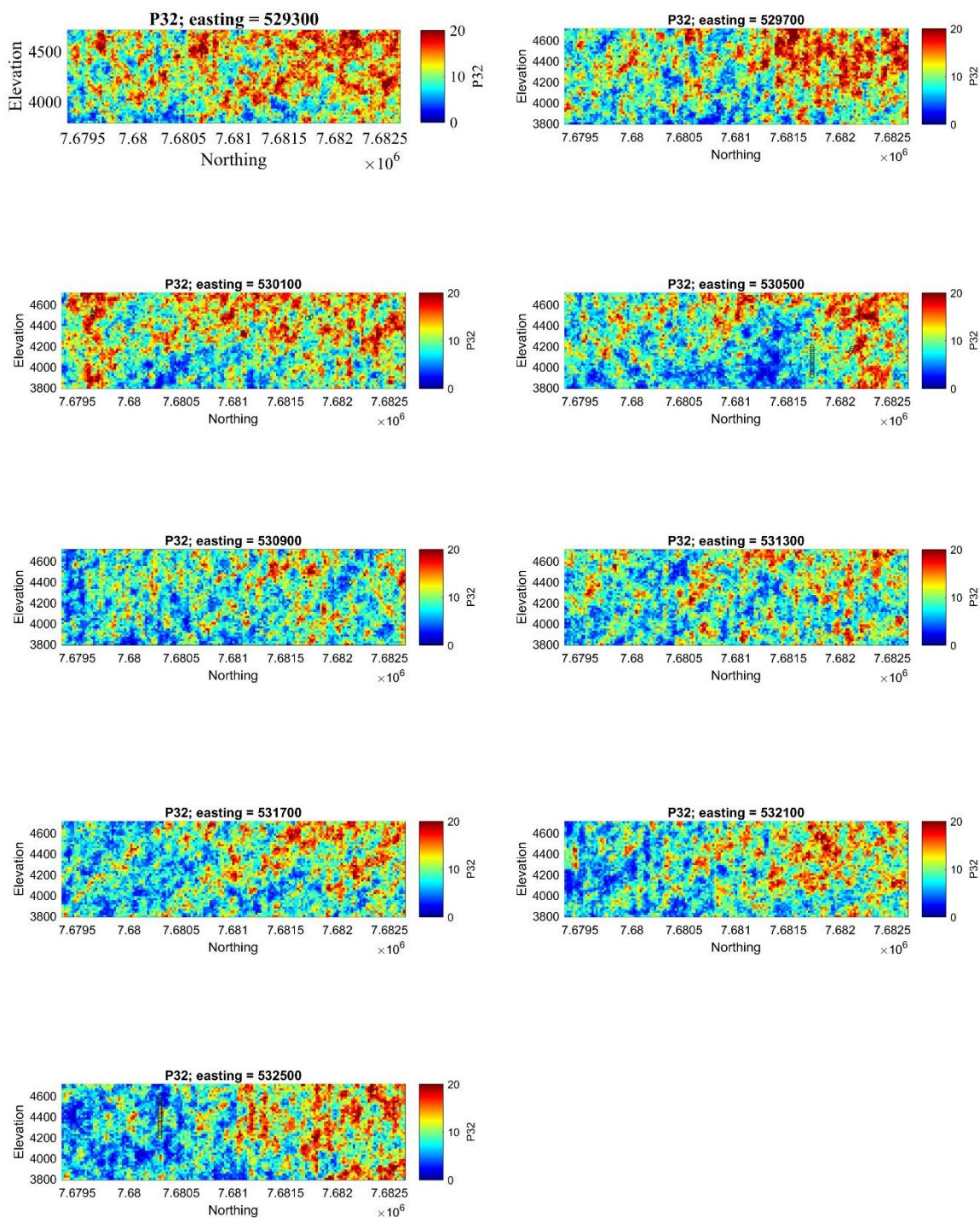


Ilustración 47: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para la primera realización de P32. Elaboración propia.

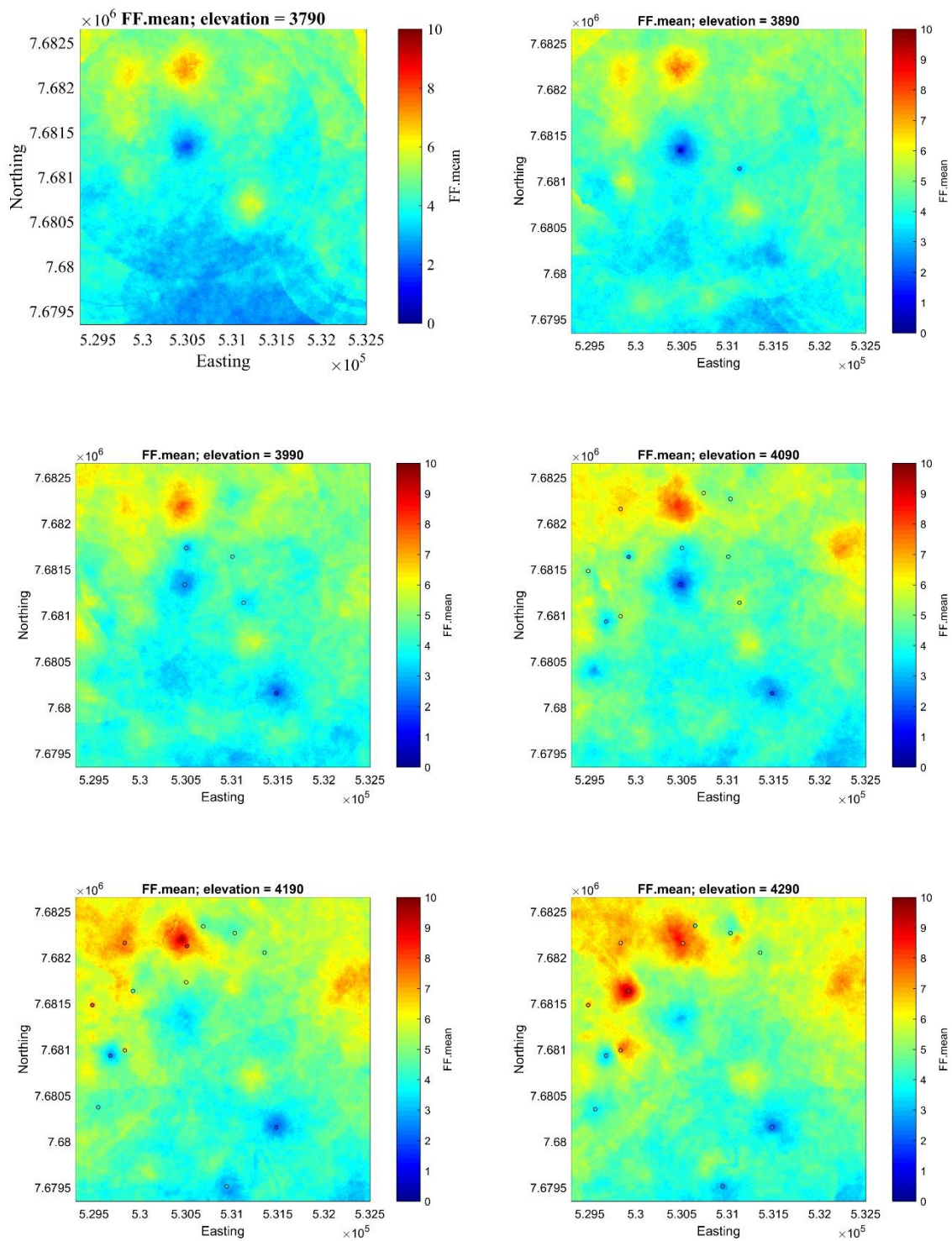


Ilustración 48: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el promedio de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.

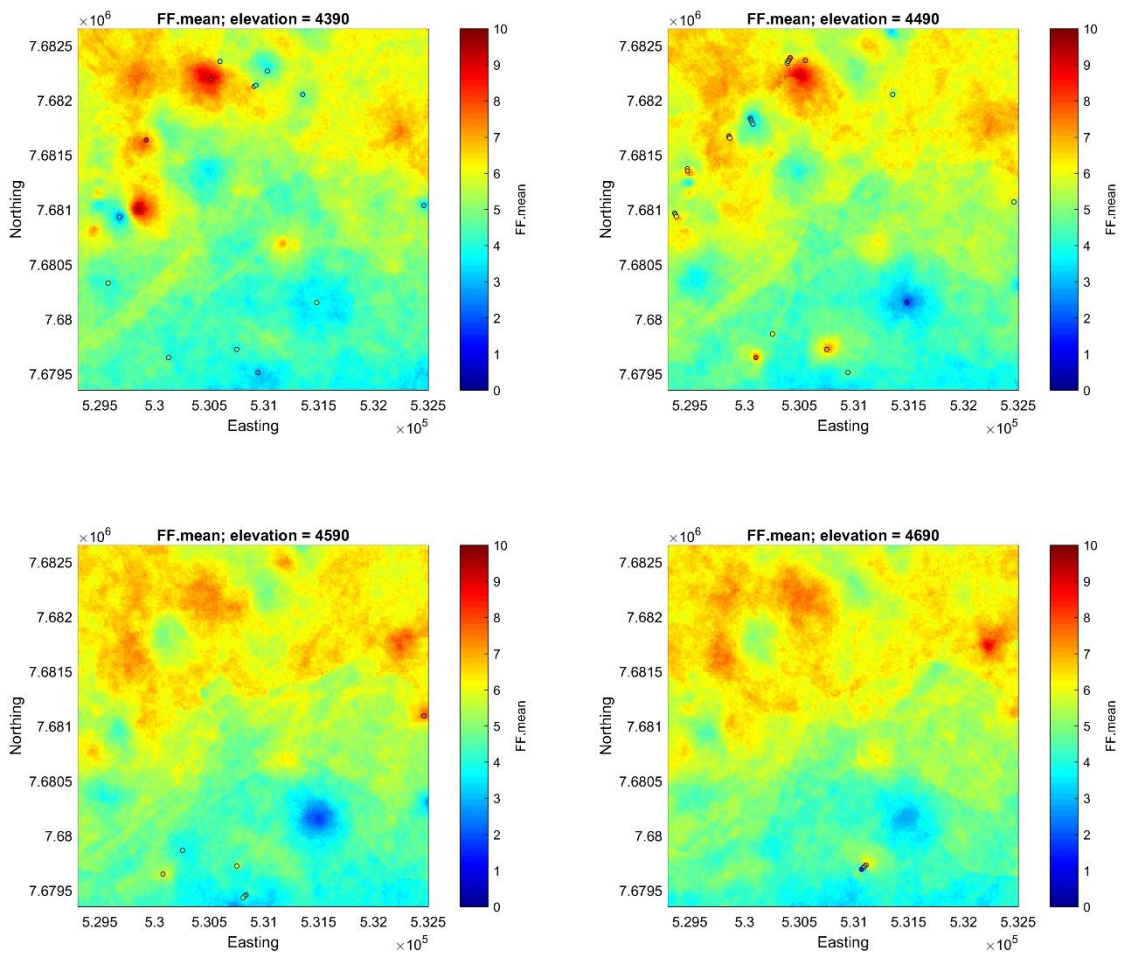


Ilustración 49: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para el promedio de cien realizaciones de FF. Elaboración propia

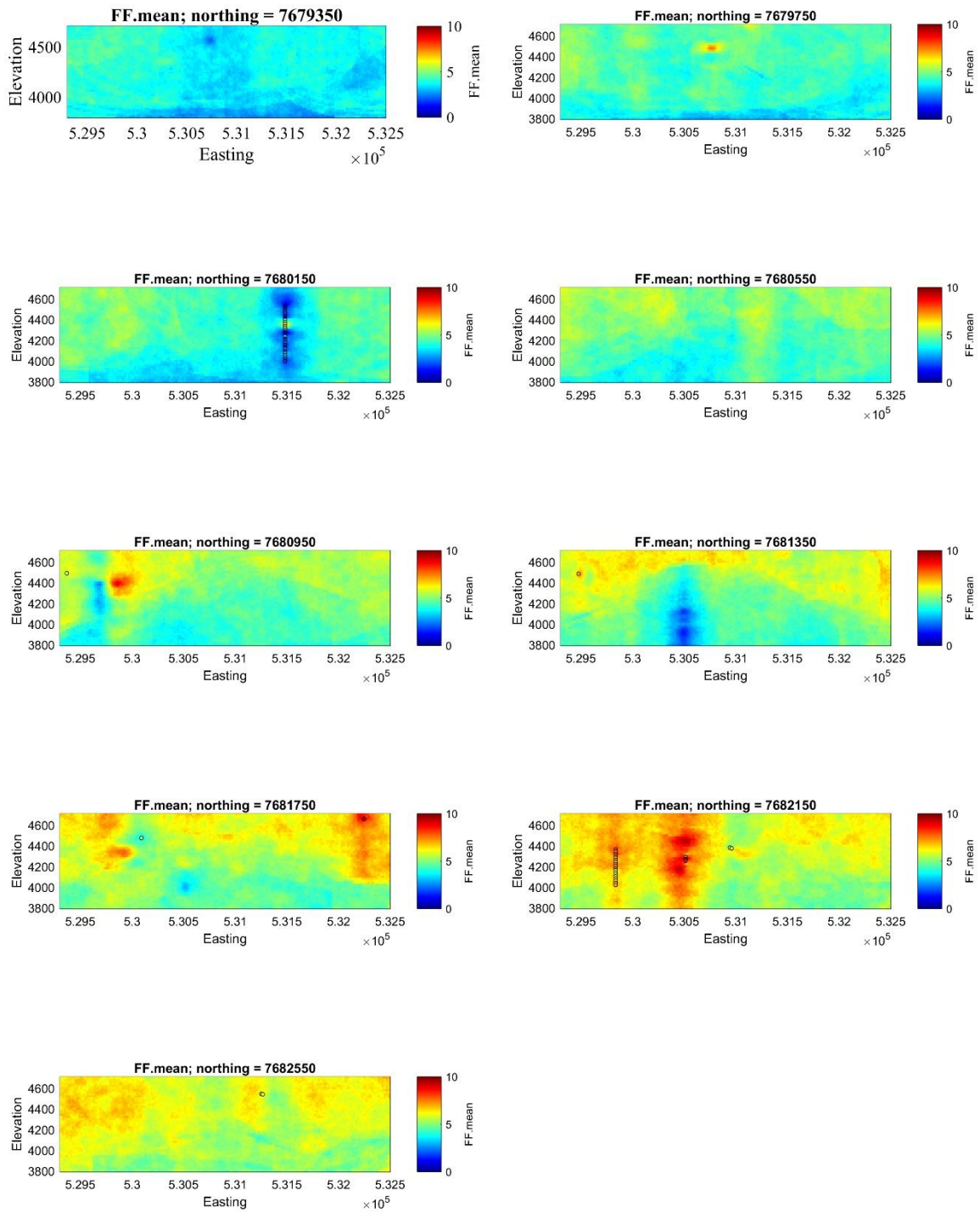


Ilustración 50: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el promedio de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.

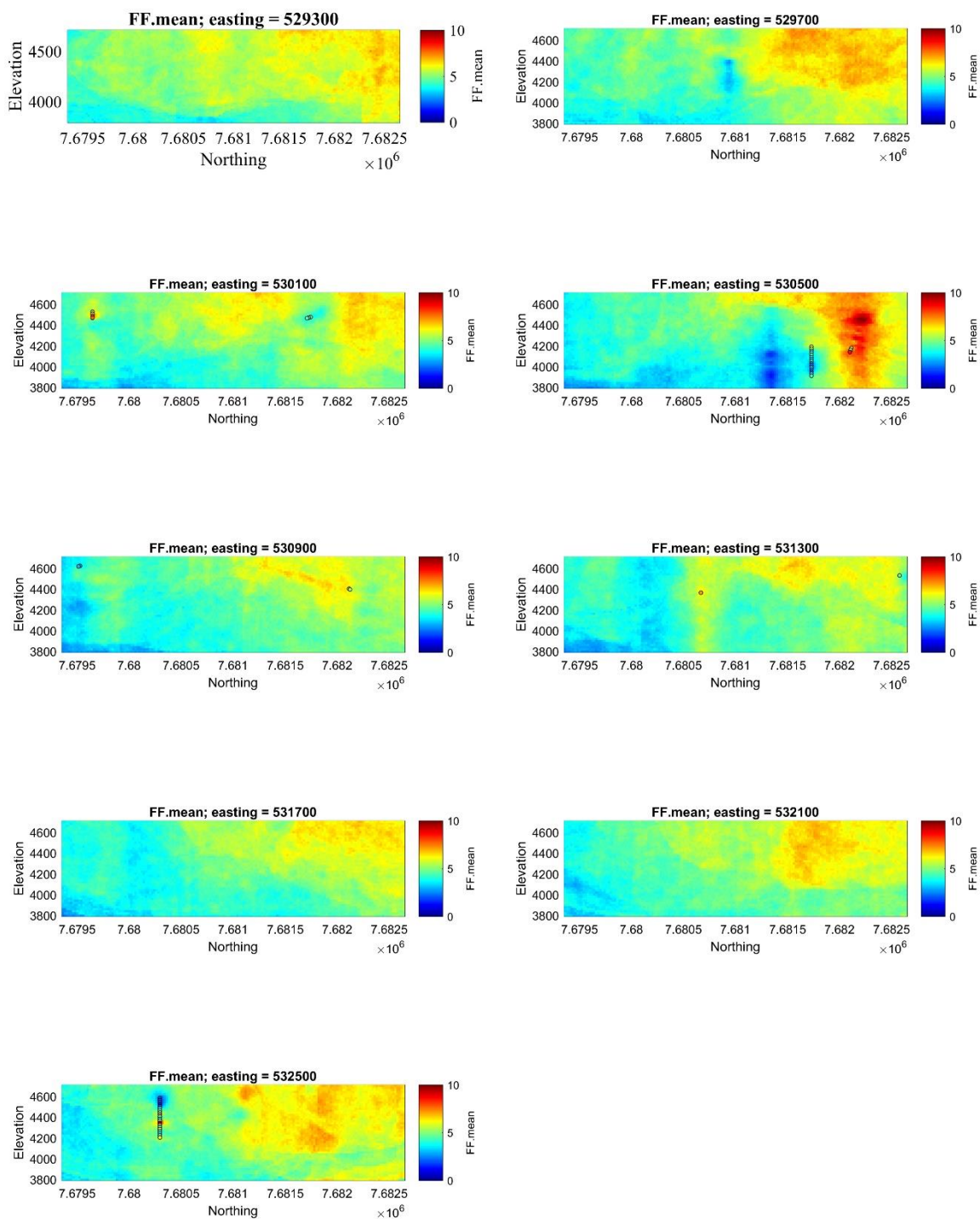


Ilustración 51: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el promedio de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.

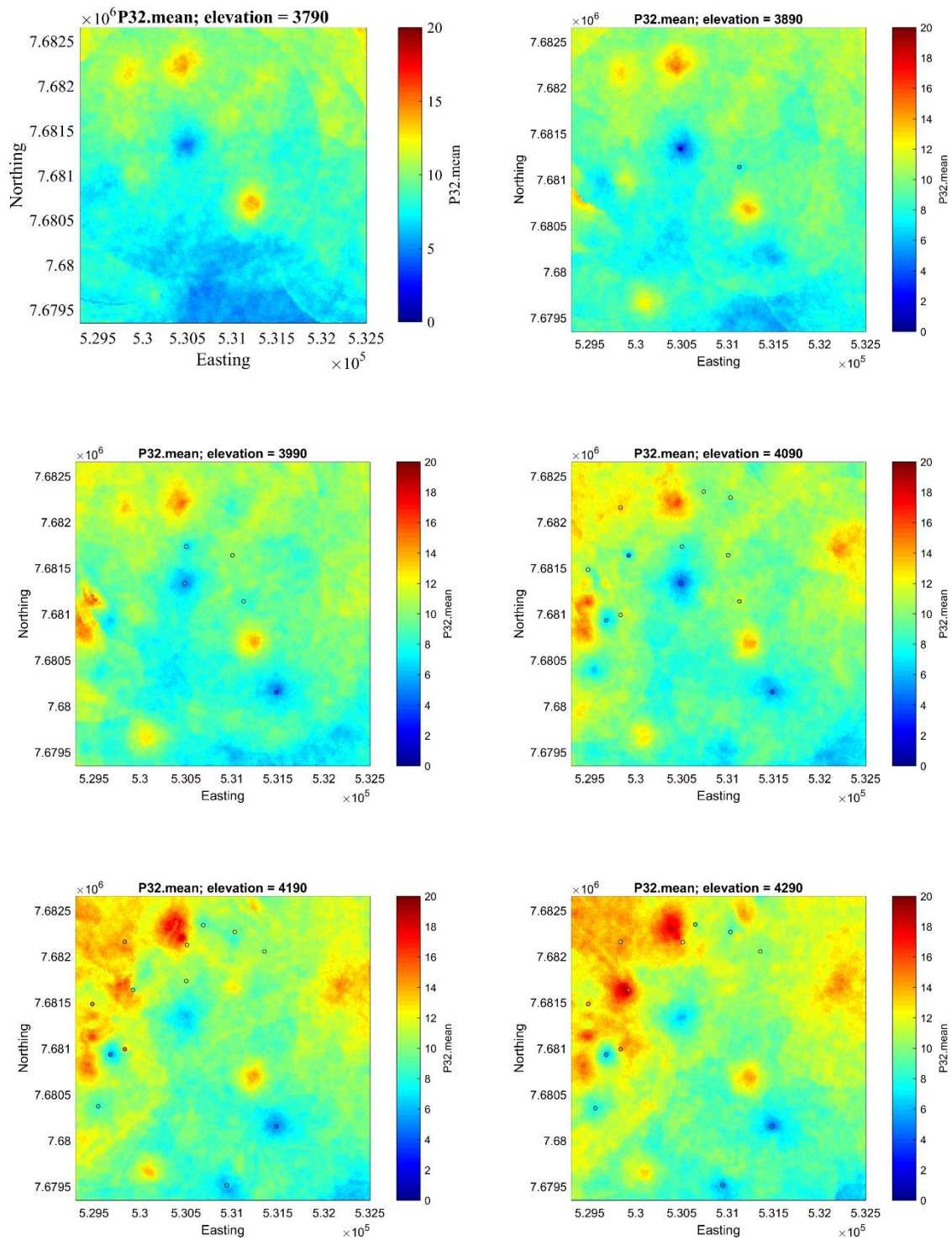


Ilustración 52: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el promedio de 100 realizaciones de P32. Elaboración propia

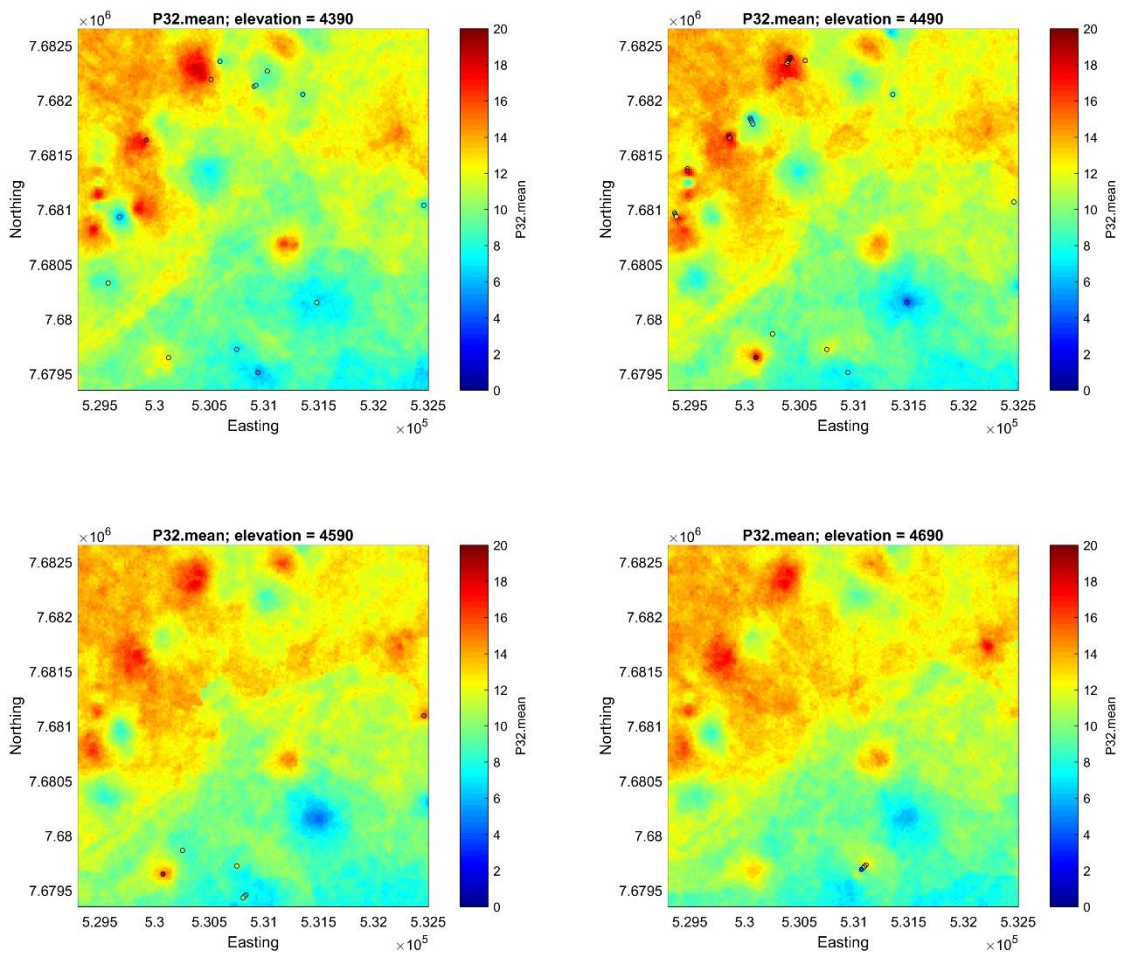


Ilustración 53: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para el promedio de cien realizaciones de P32. Elaboración propia

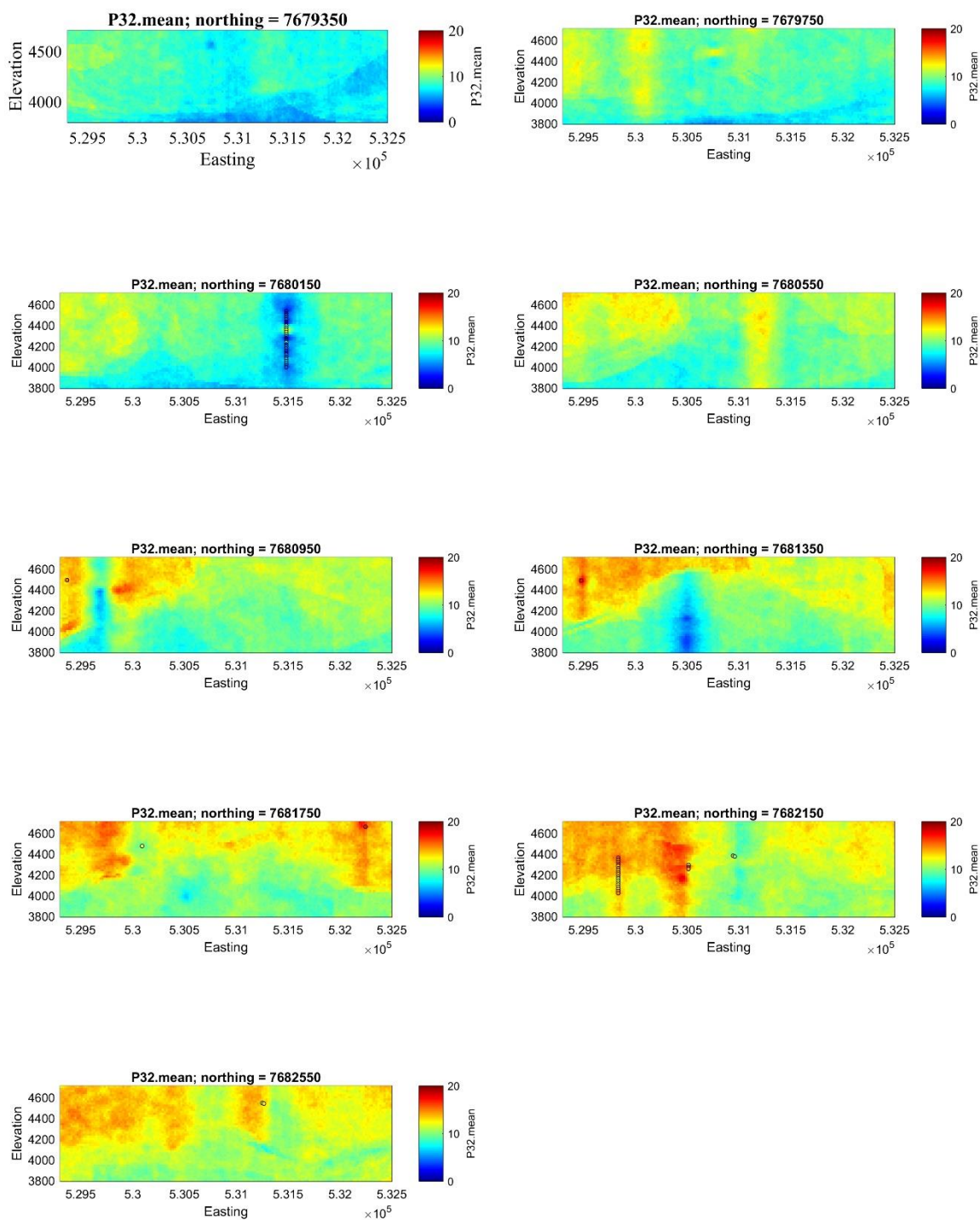


Ilustración 54: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el promedio de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.

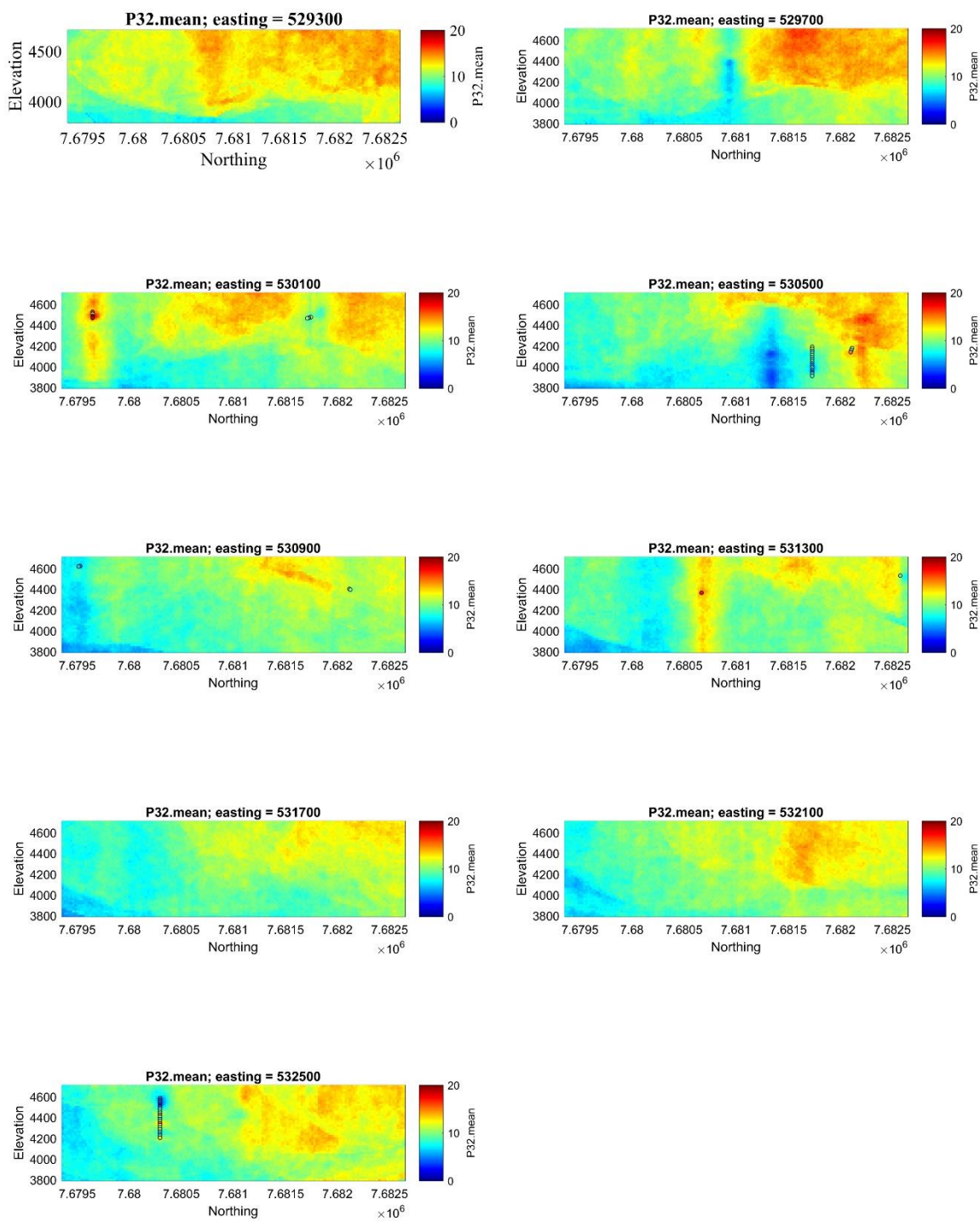


Ilustración 55: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el promedio de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.

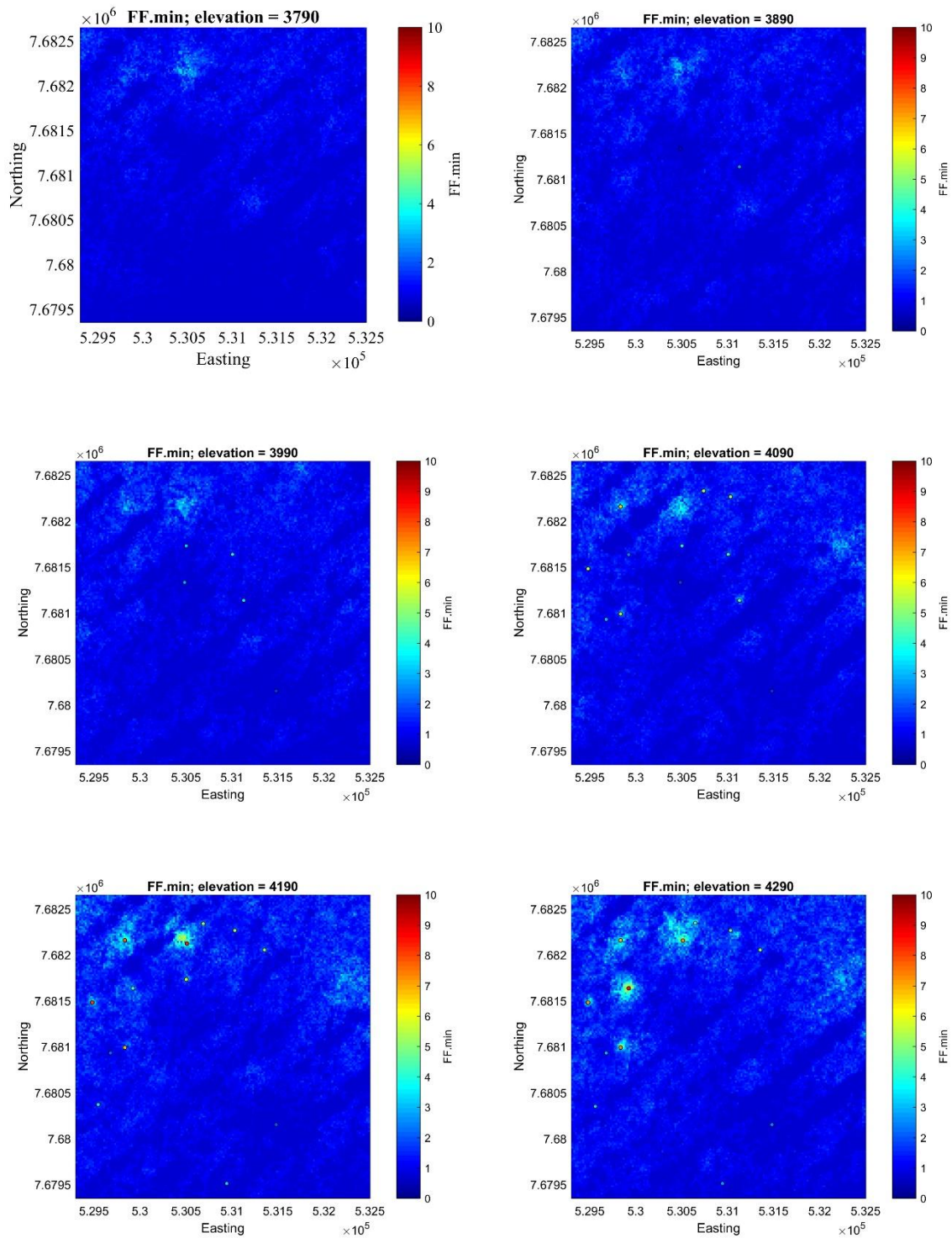


Ilustración 56: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el mínimo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia

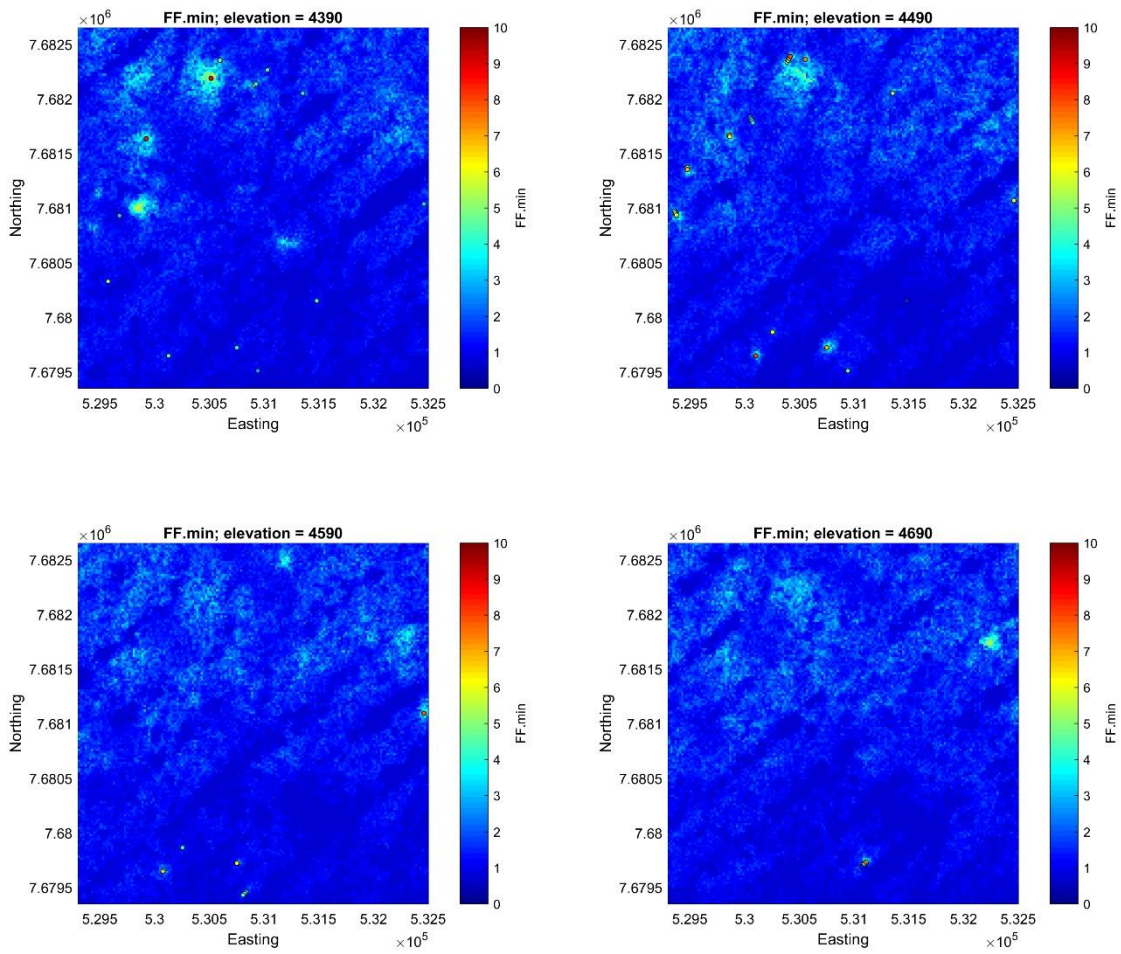


Ilustración 57: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para el mínimo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia

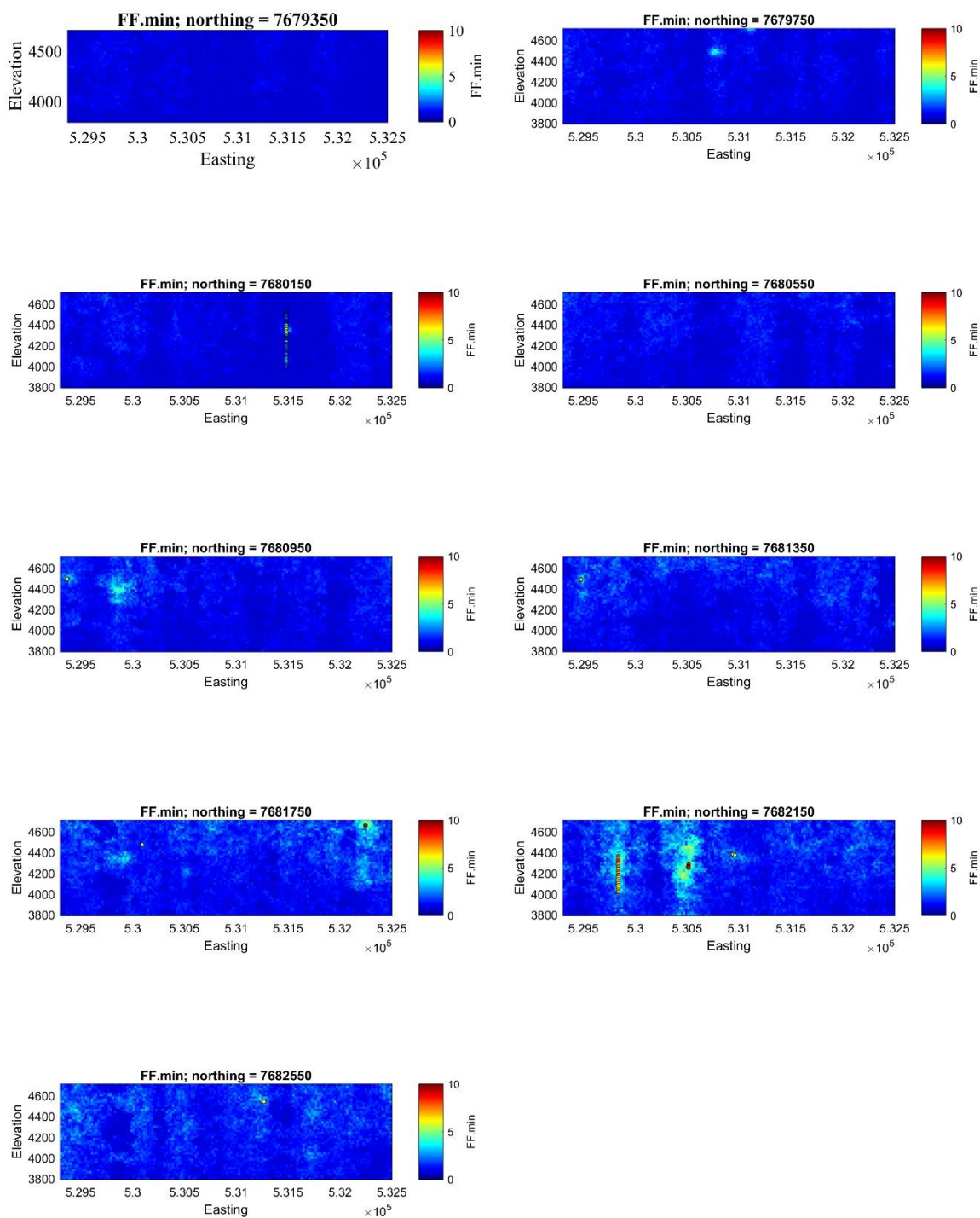


Ilustración 58: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el mínimo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.

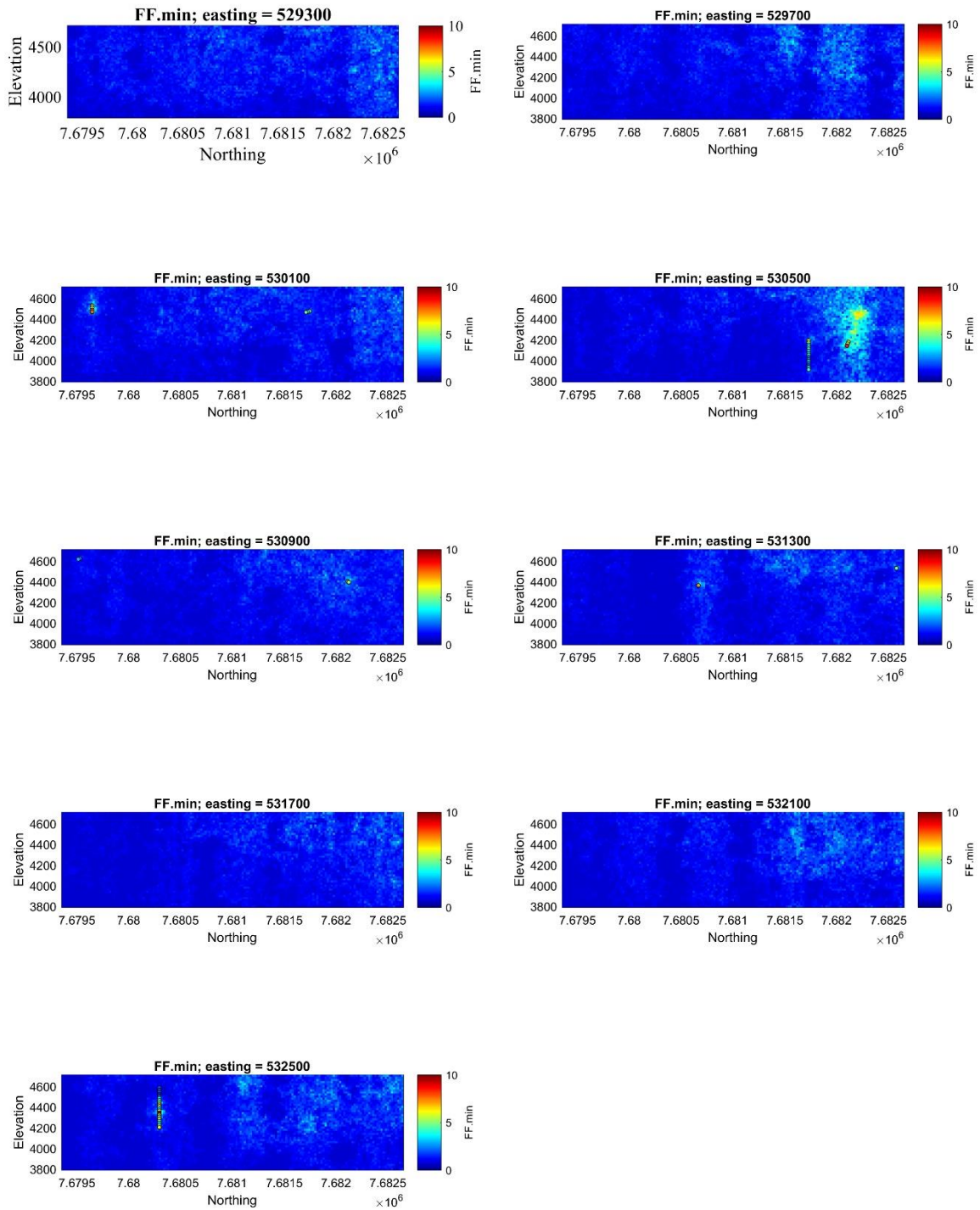


Ilustración 59: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el mínimo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.

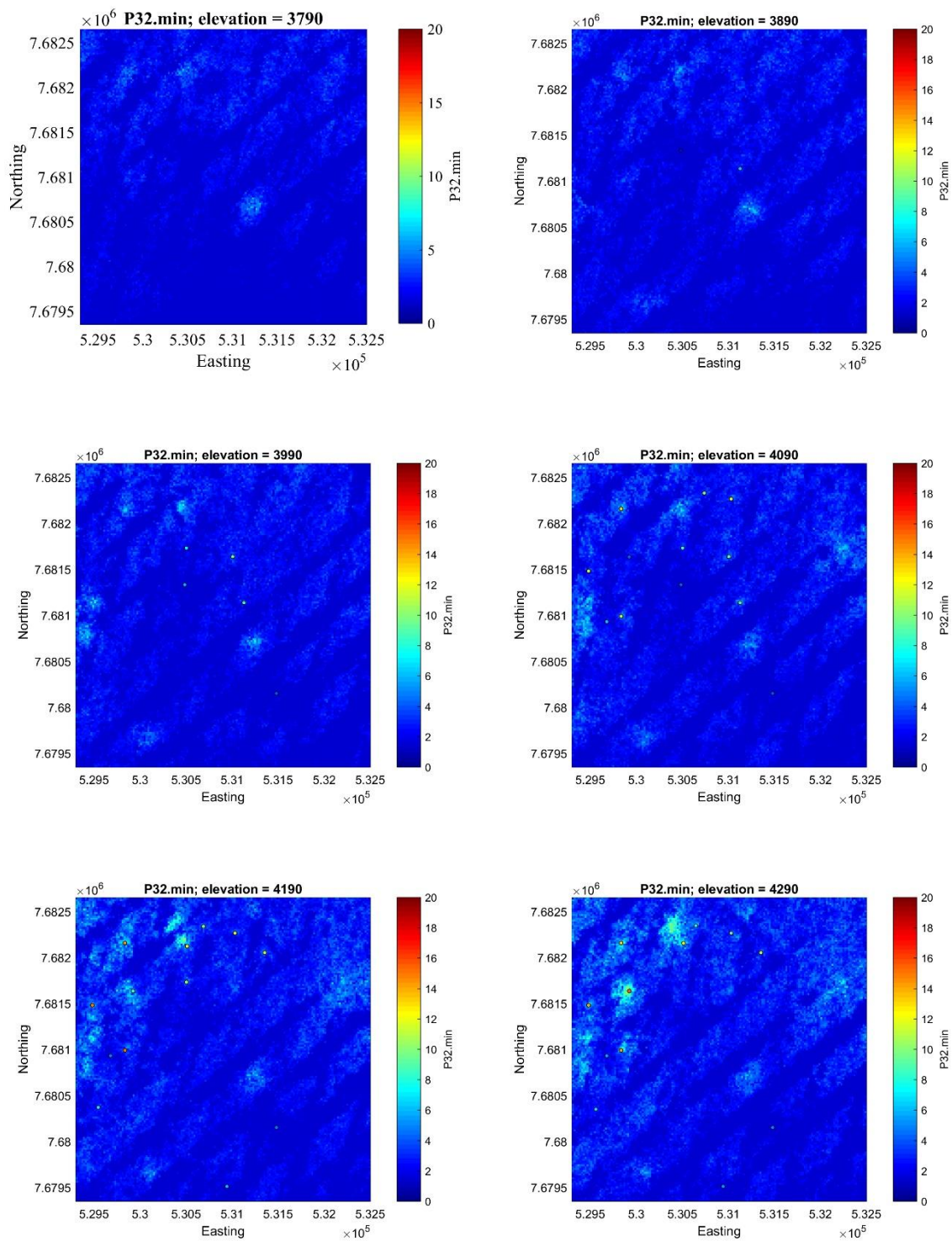


Ilustración 60: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el mínimo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia

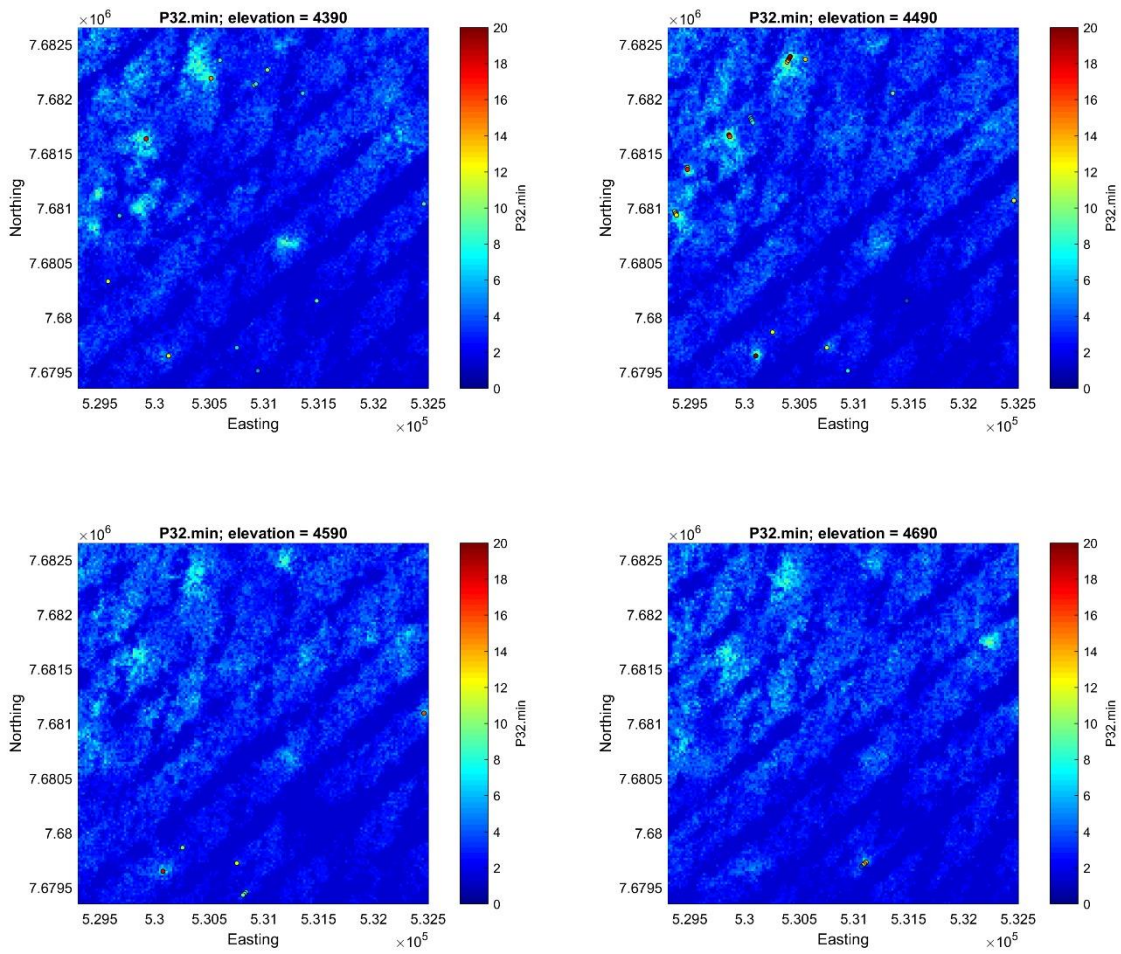


Ilustración 61: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para el mínimo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia

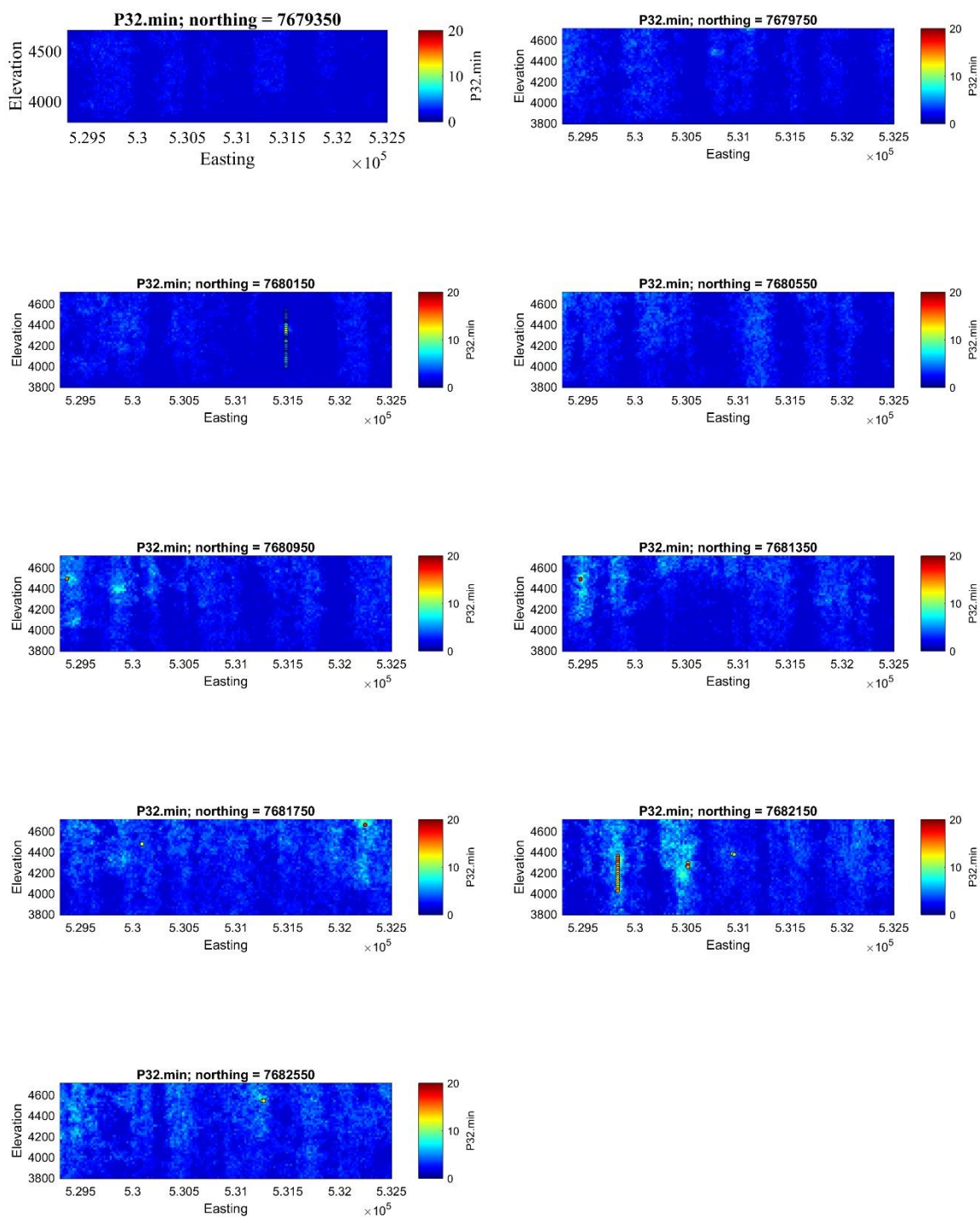


Ilustración 62: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el mínimo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia

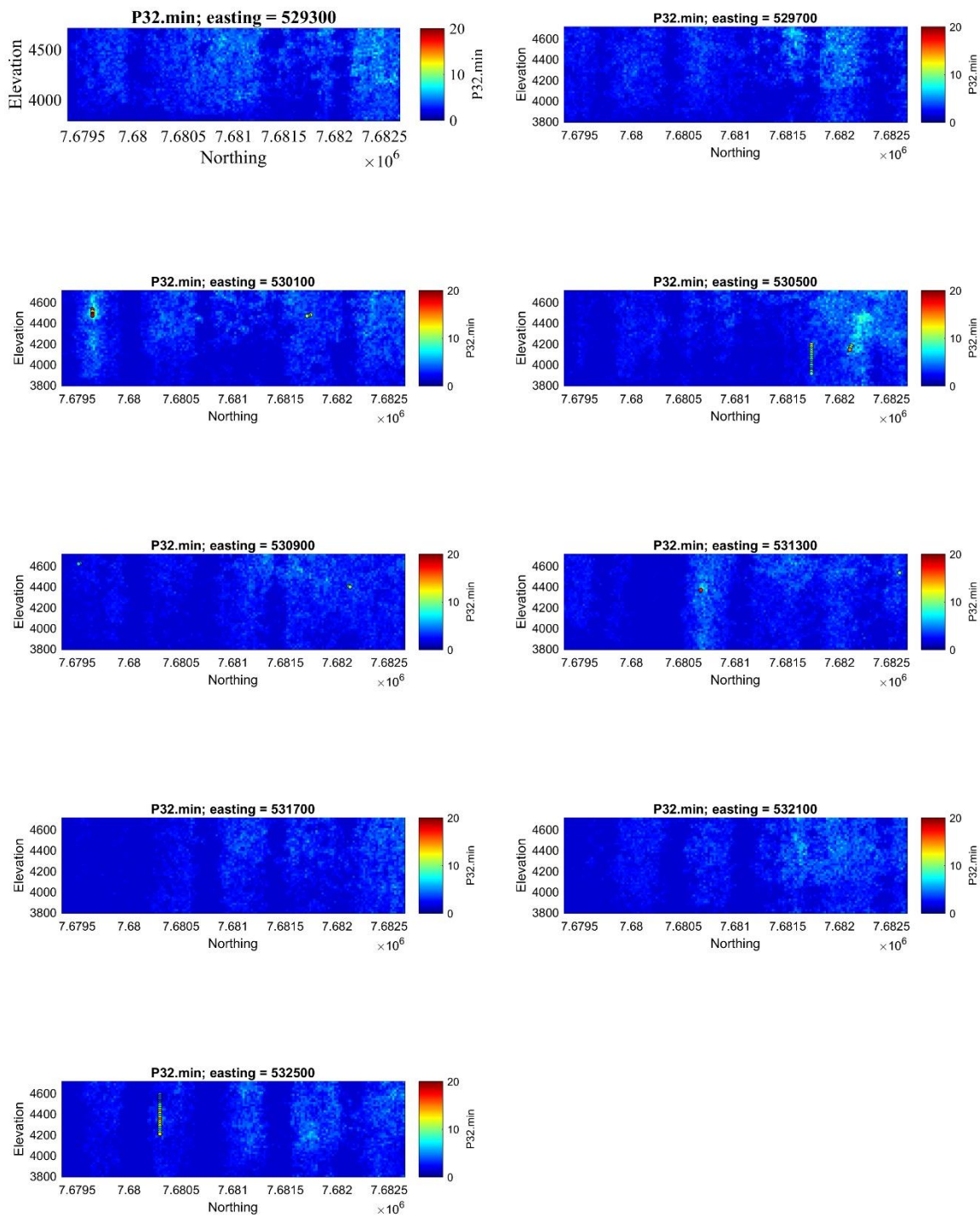


Ilustración 63: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el mínimo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.

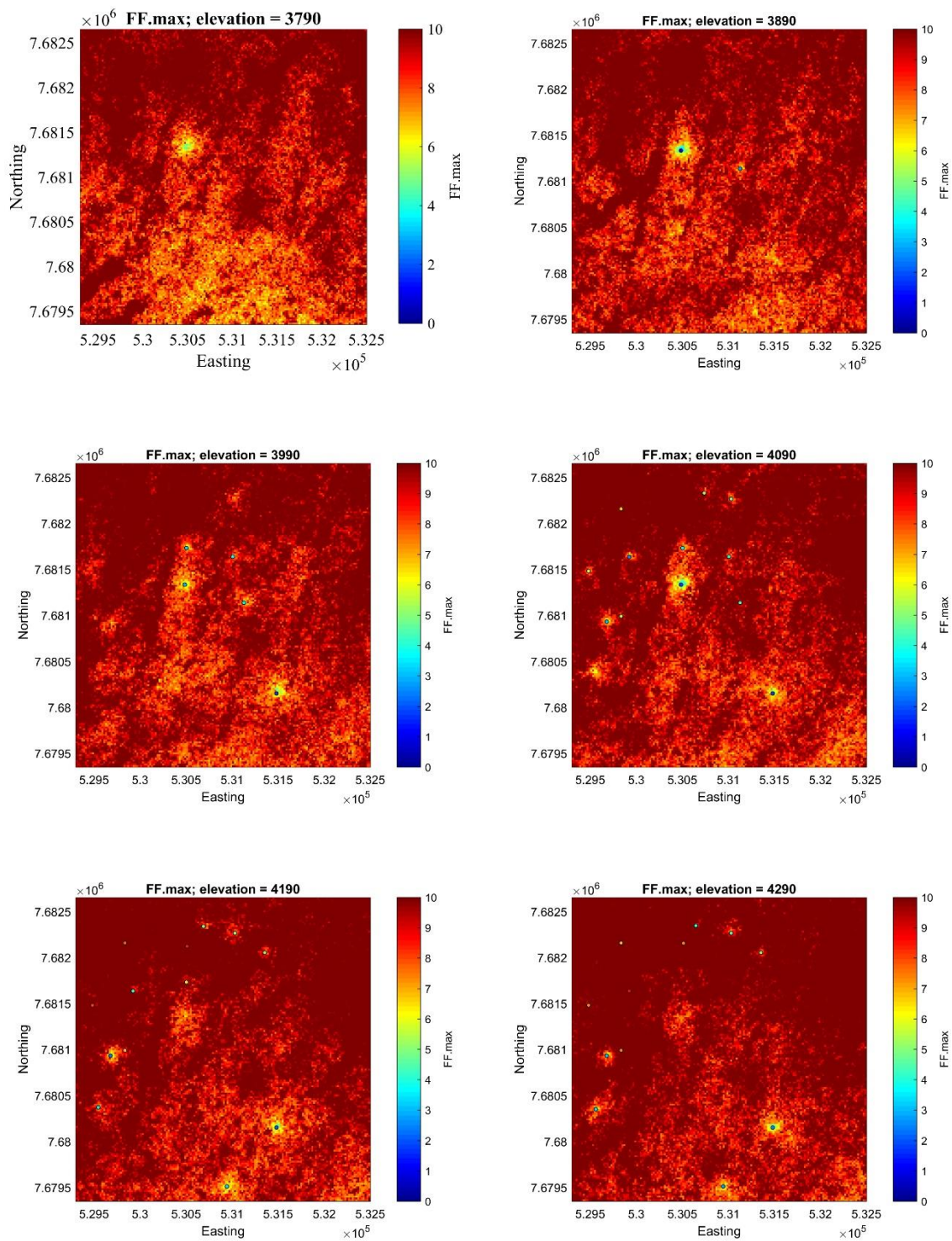


Ilustración 64: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el máximo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia

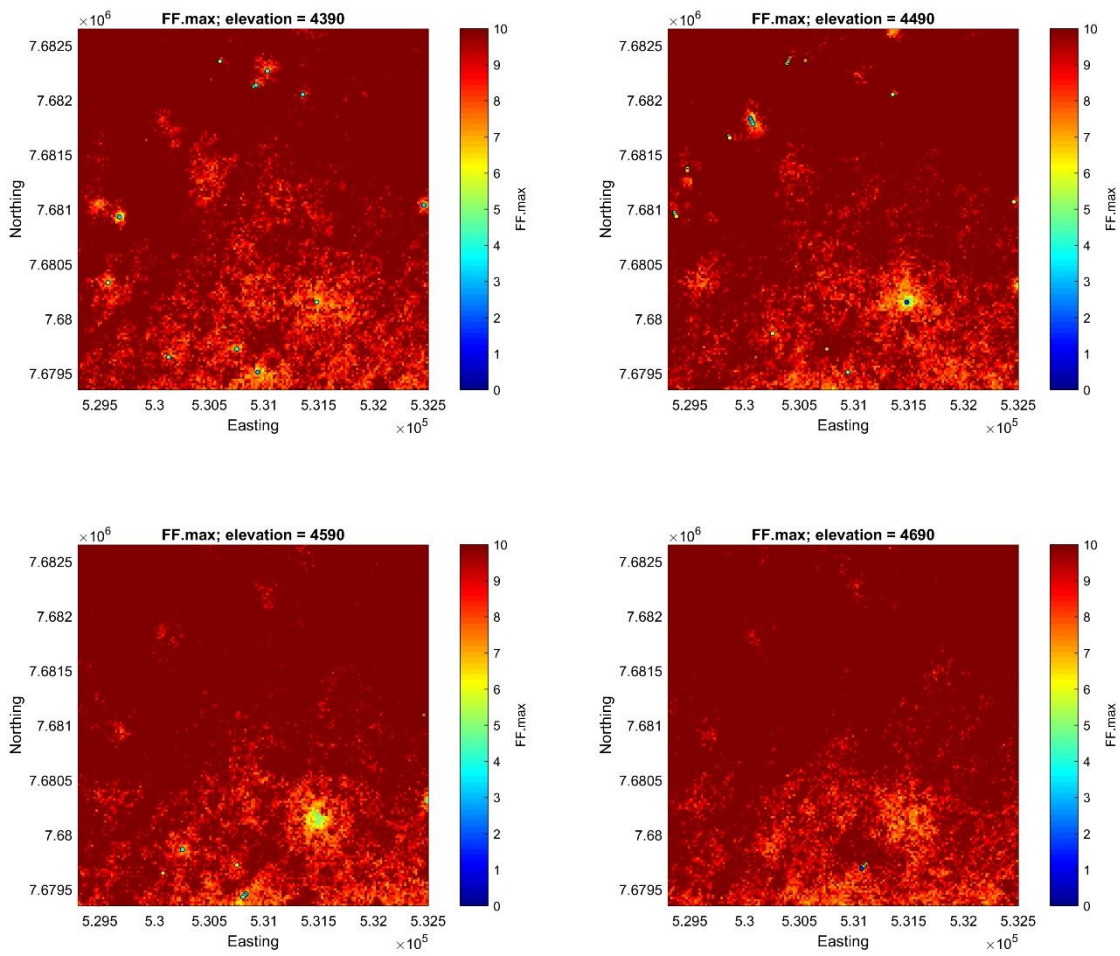


Ilustración 65: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para el máximo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia

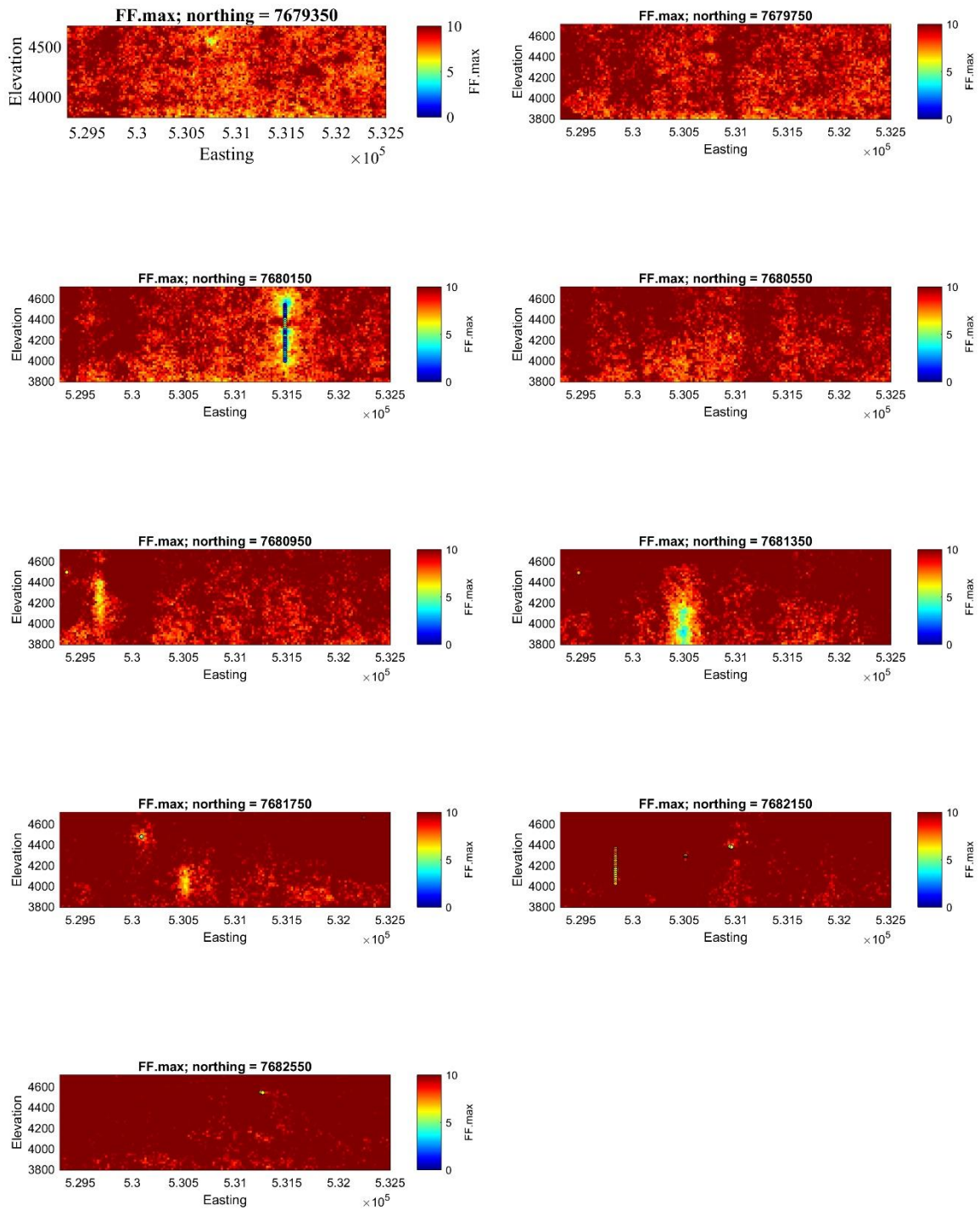


Ilustración 66: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el máximo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia

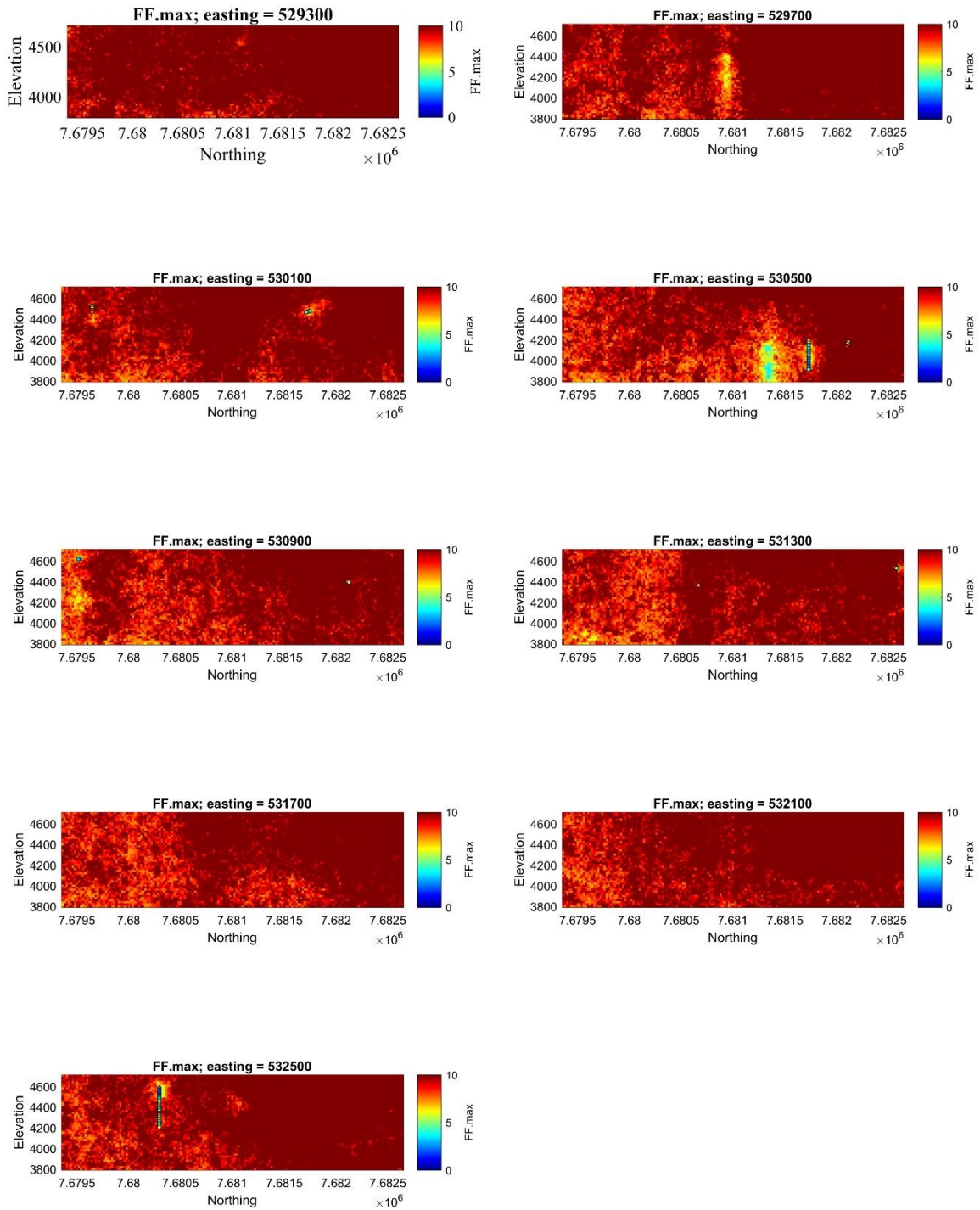


Ilustración 67: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el máximo de cien realizaciones de FF. Elaboración propia.

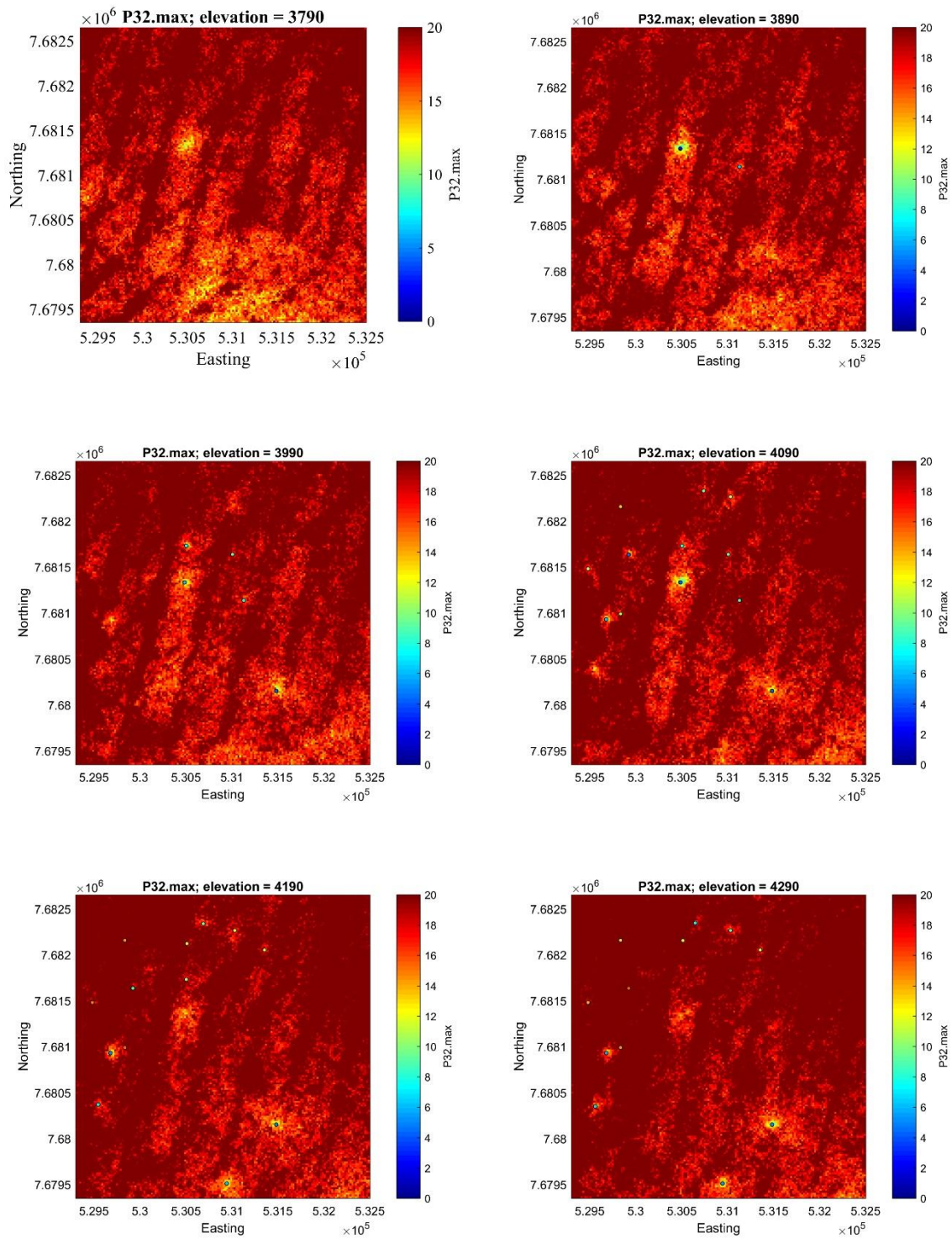


Ilustración 68: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el máximo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.

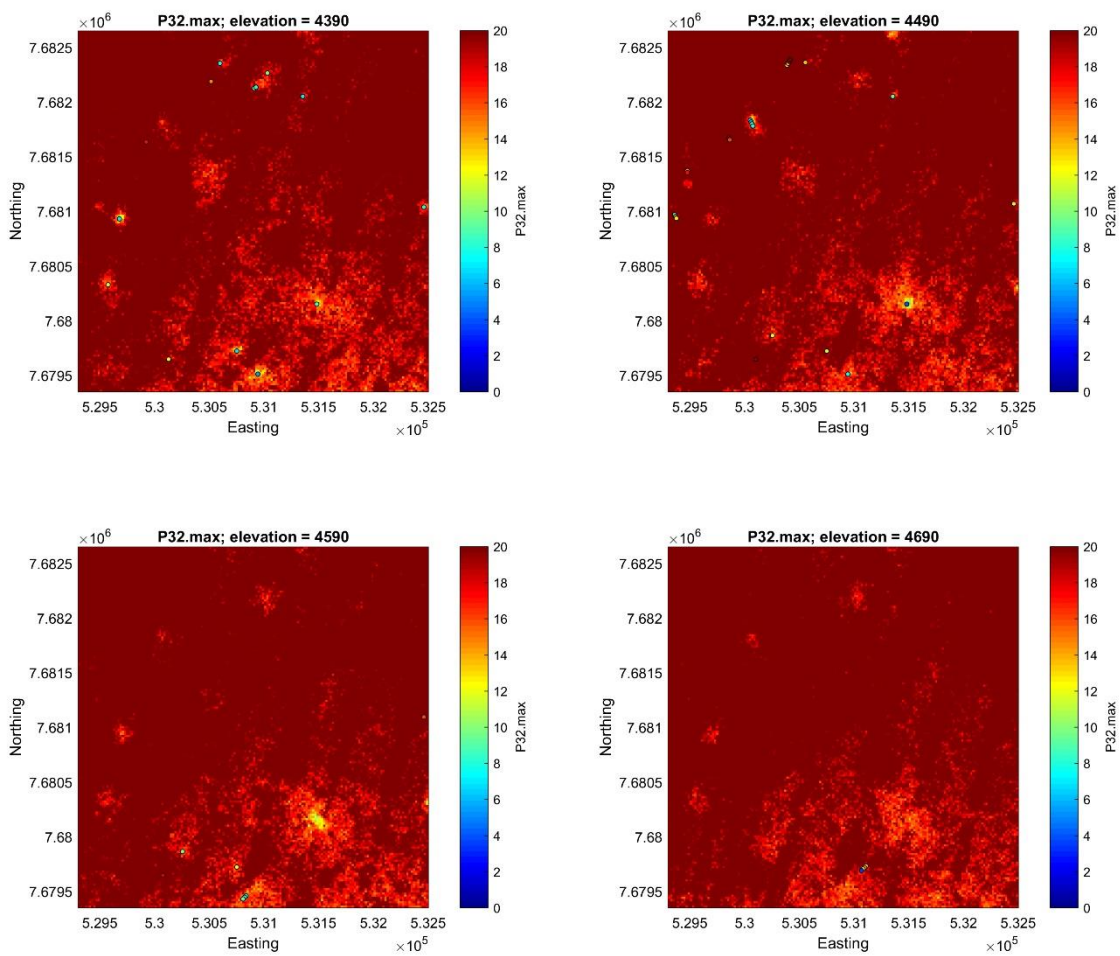


Ilustración 69: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para el máximo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.

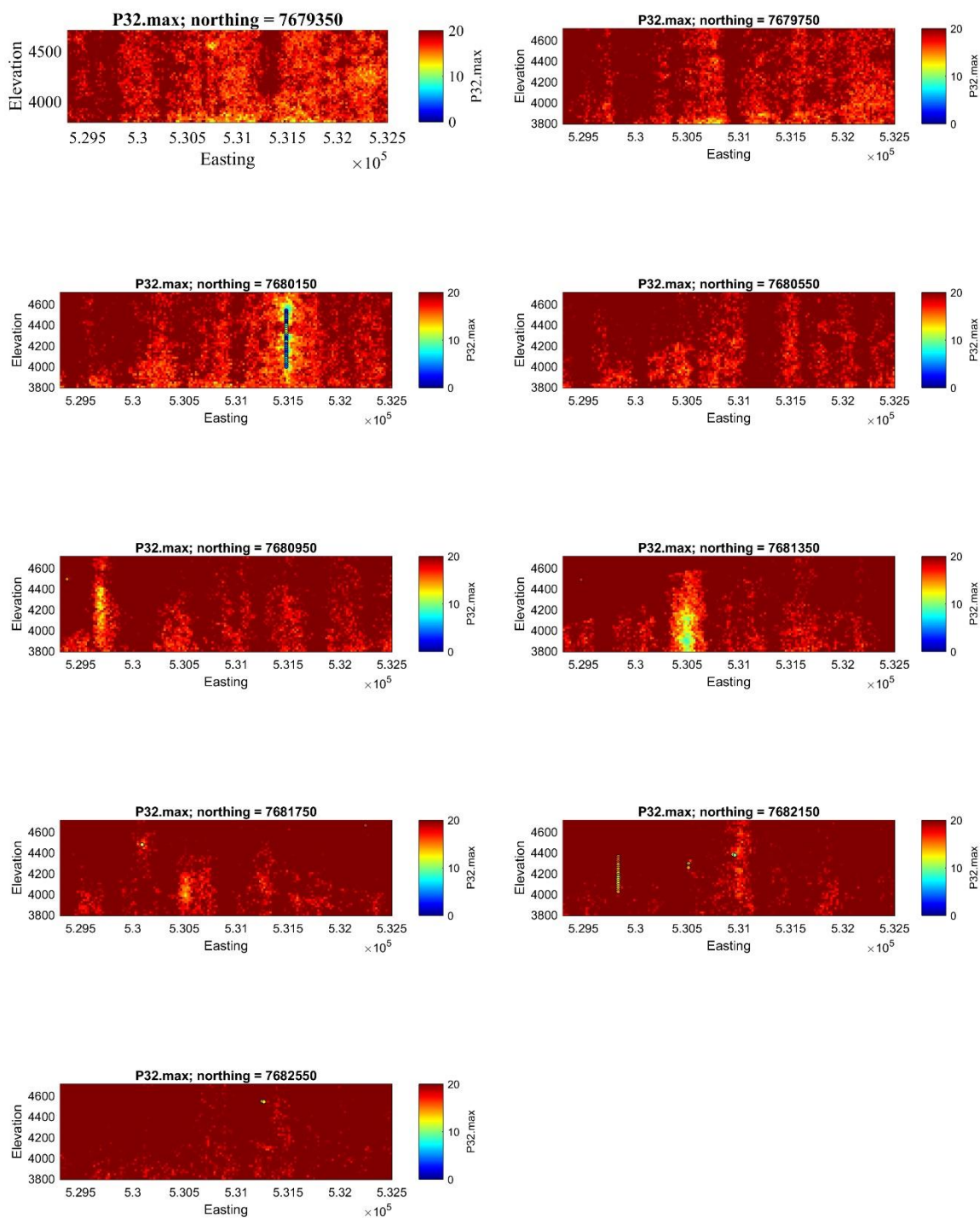


Ilustración 70: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el máximo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia

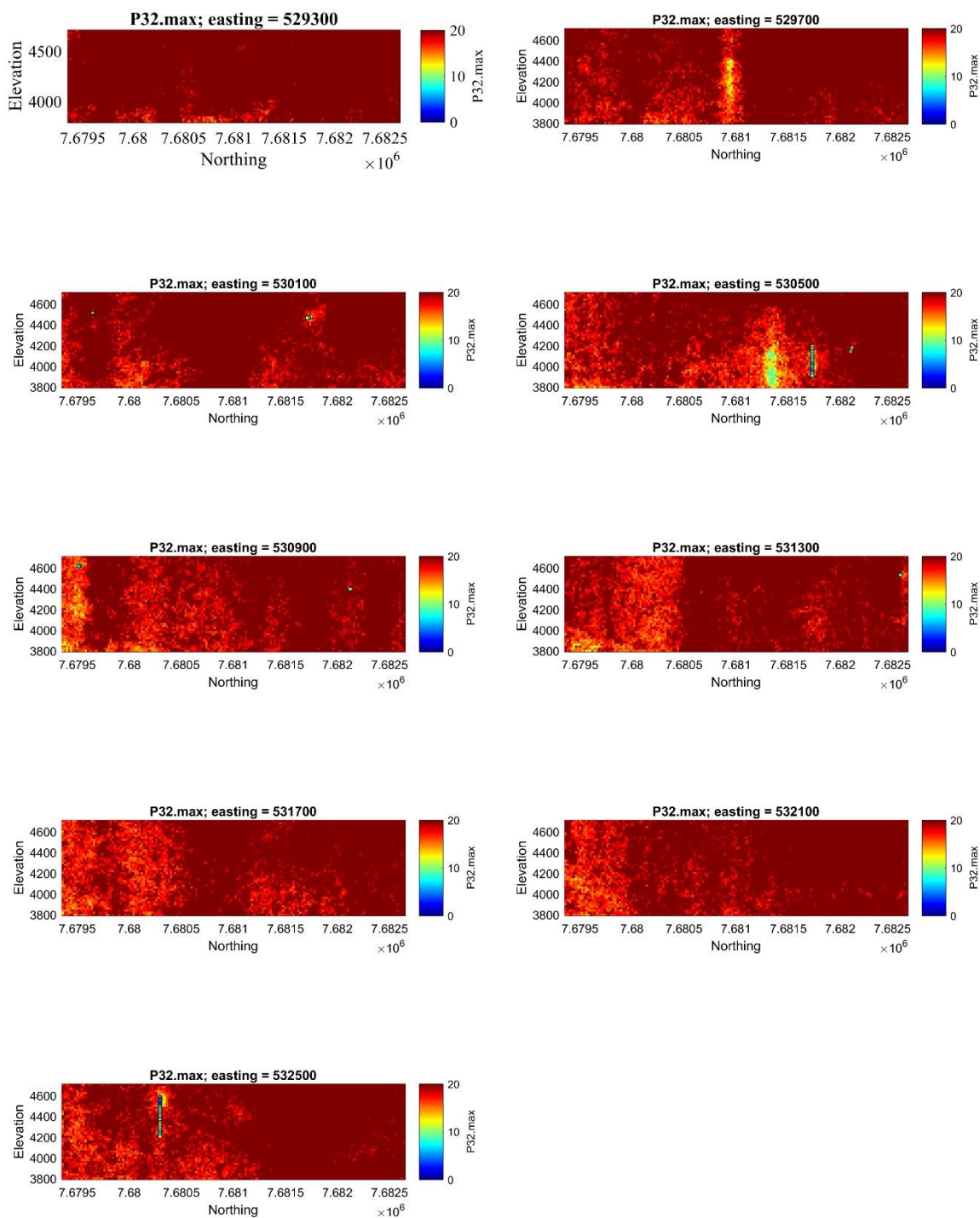


Ilustración 71: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el máximo de cien realizaciones de P32. Elaboración propia.

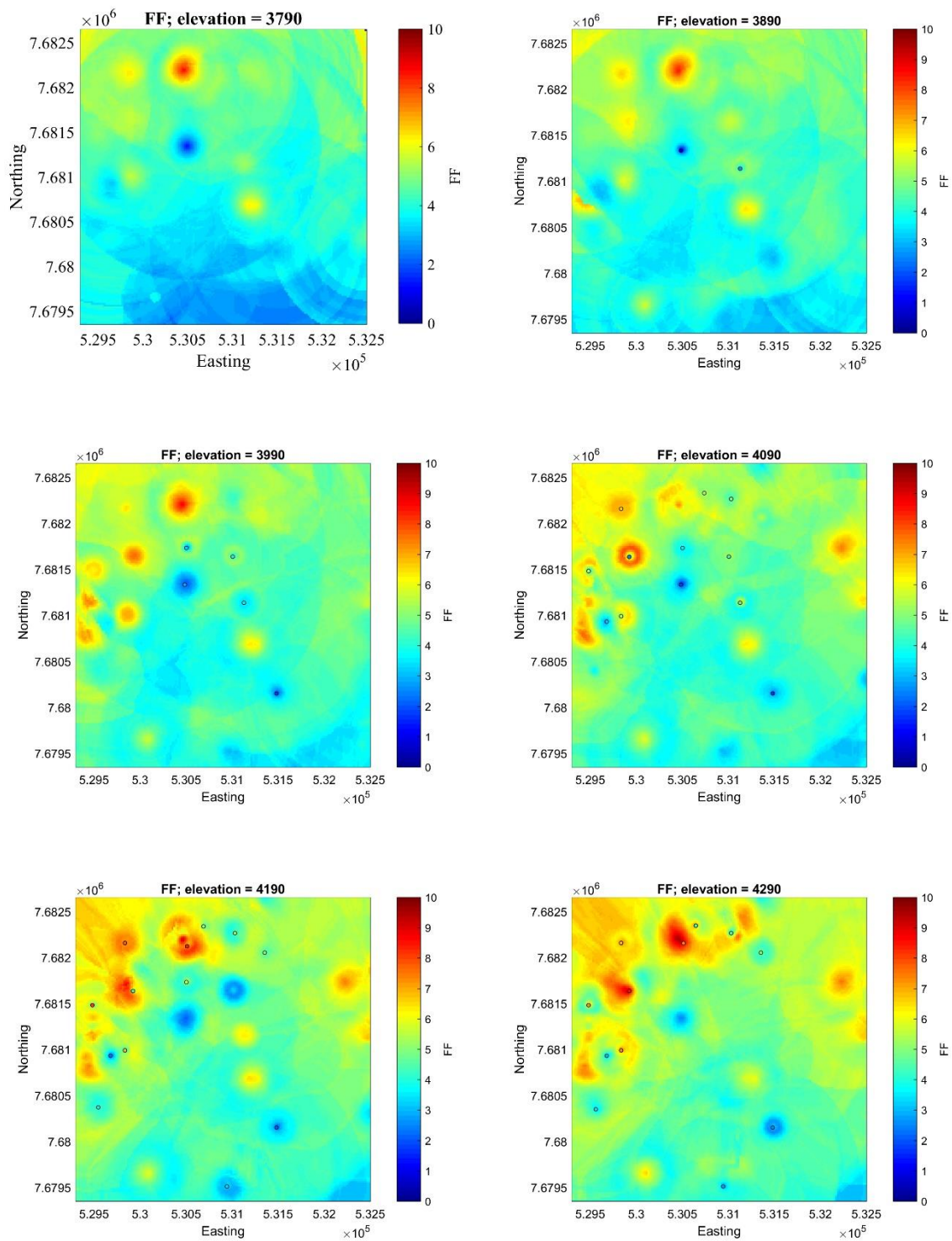


Ilustración 72: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el cokriging de FF. Elaboración propia.

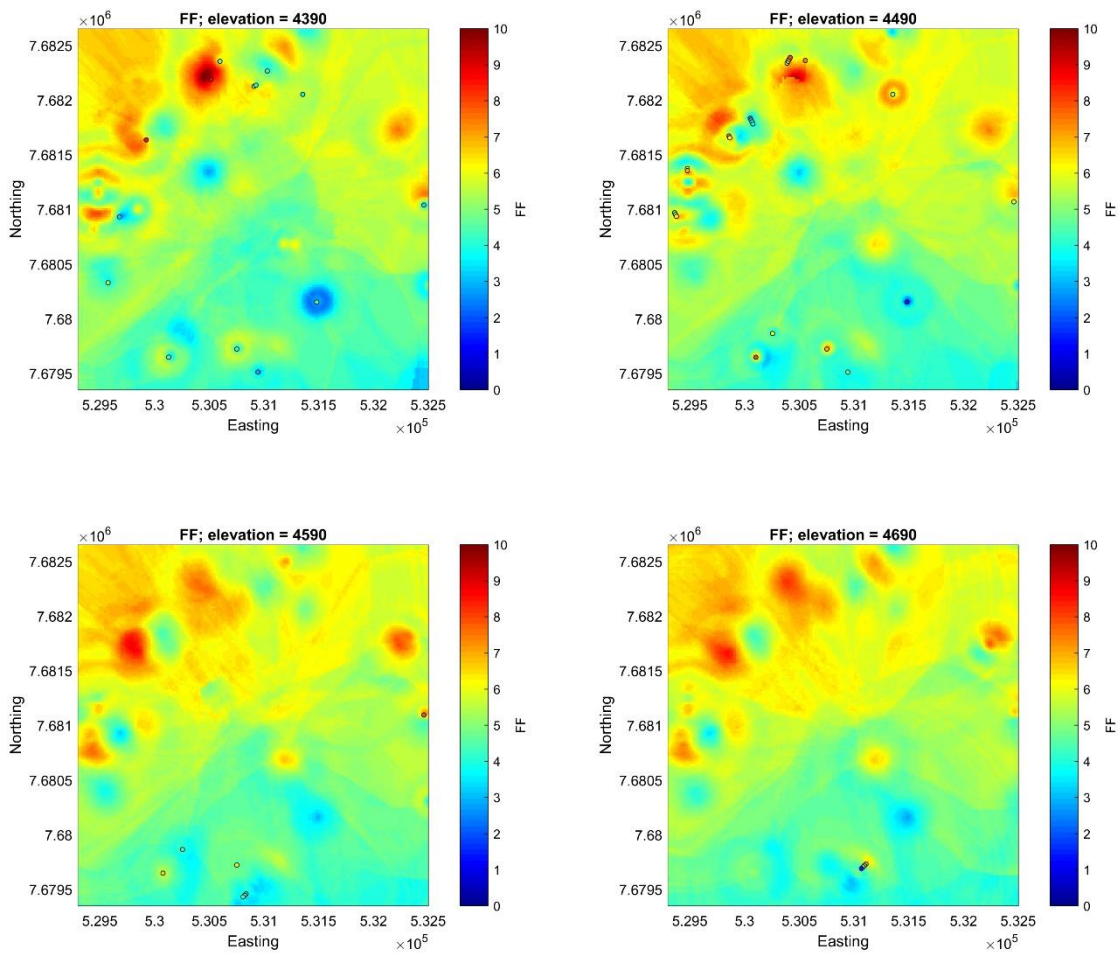


Ilustración 73: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m el cokriging de FF. Elaboración propia.

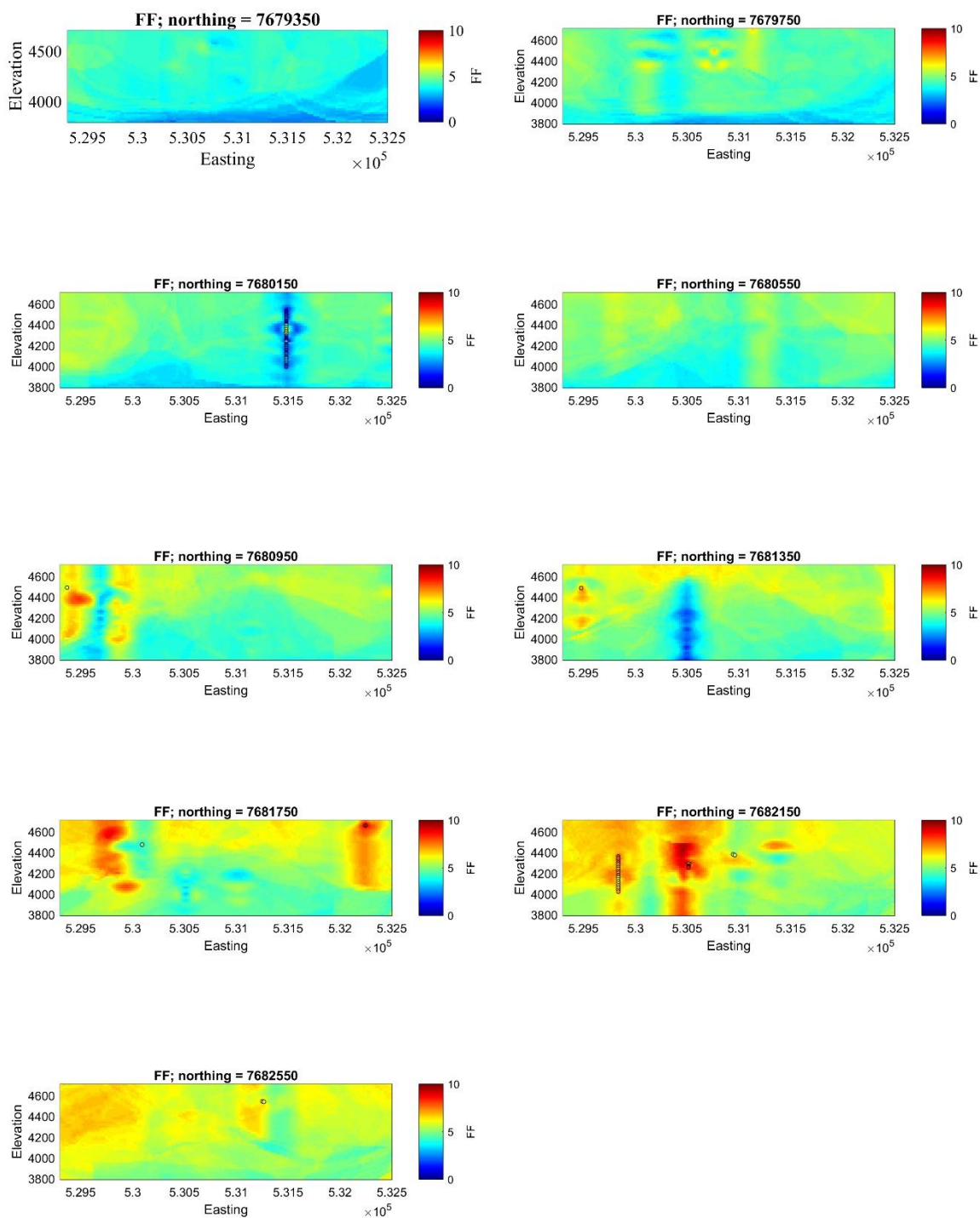


Ilustración 74: Cortes Este-Cota para Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el cokriging FF de. Elaboración propia

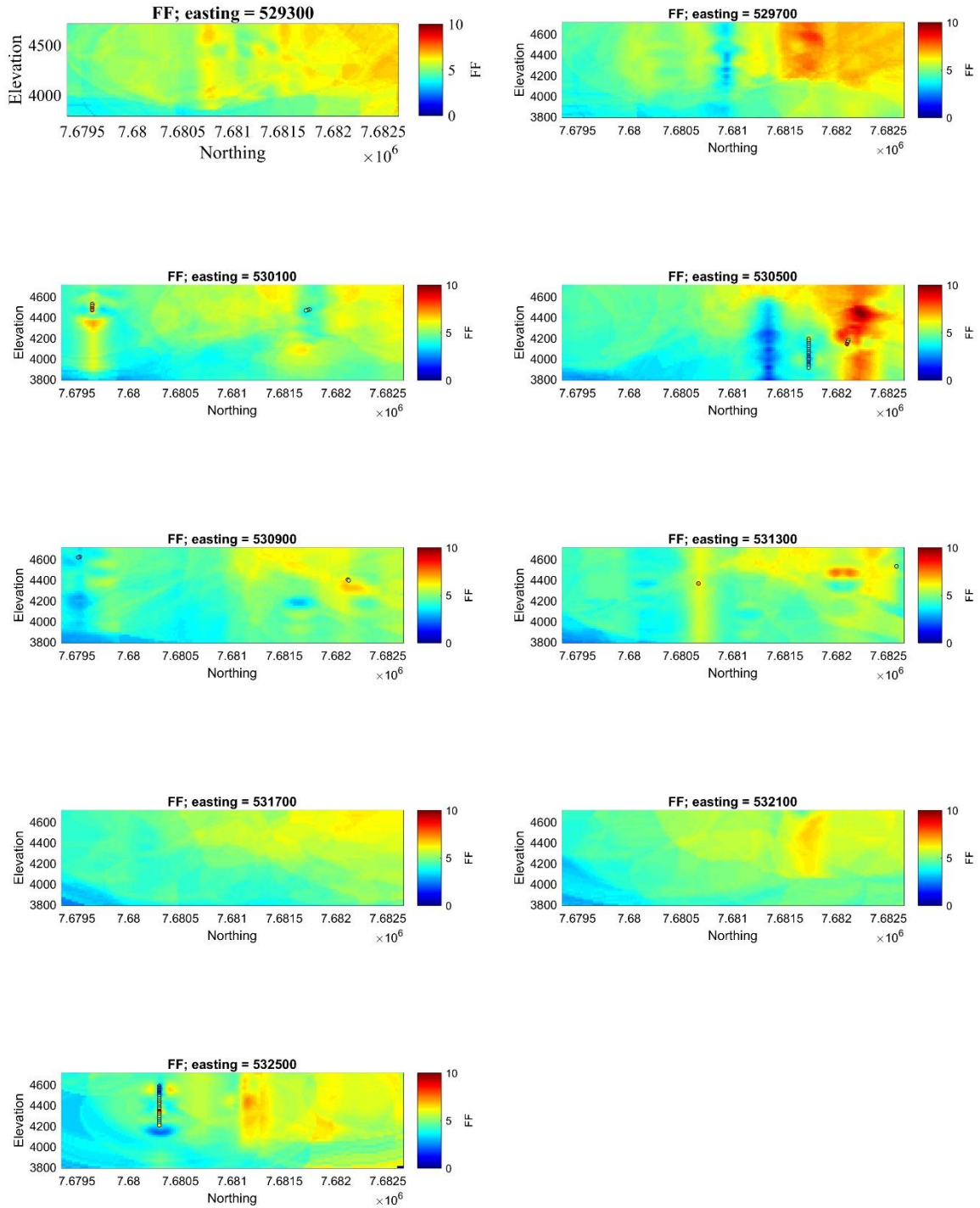


Ilustración 75: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el cokriging de FF. Elaboración propia.

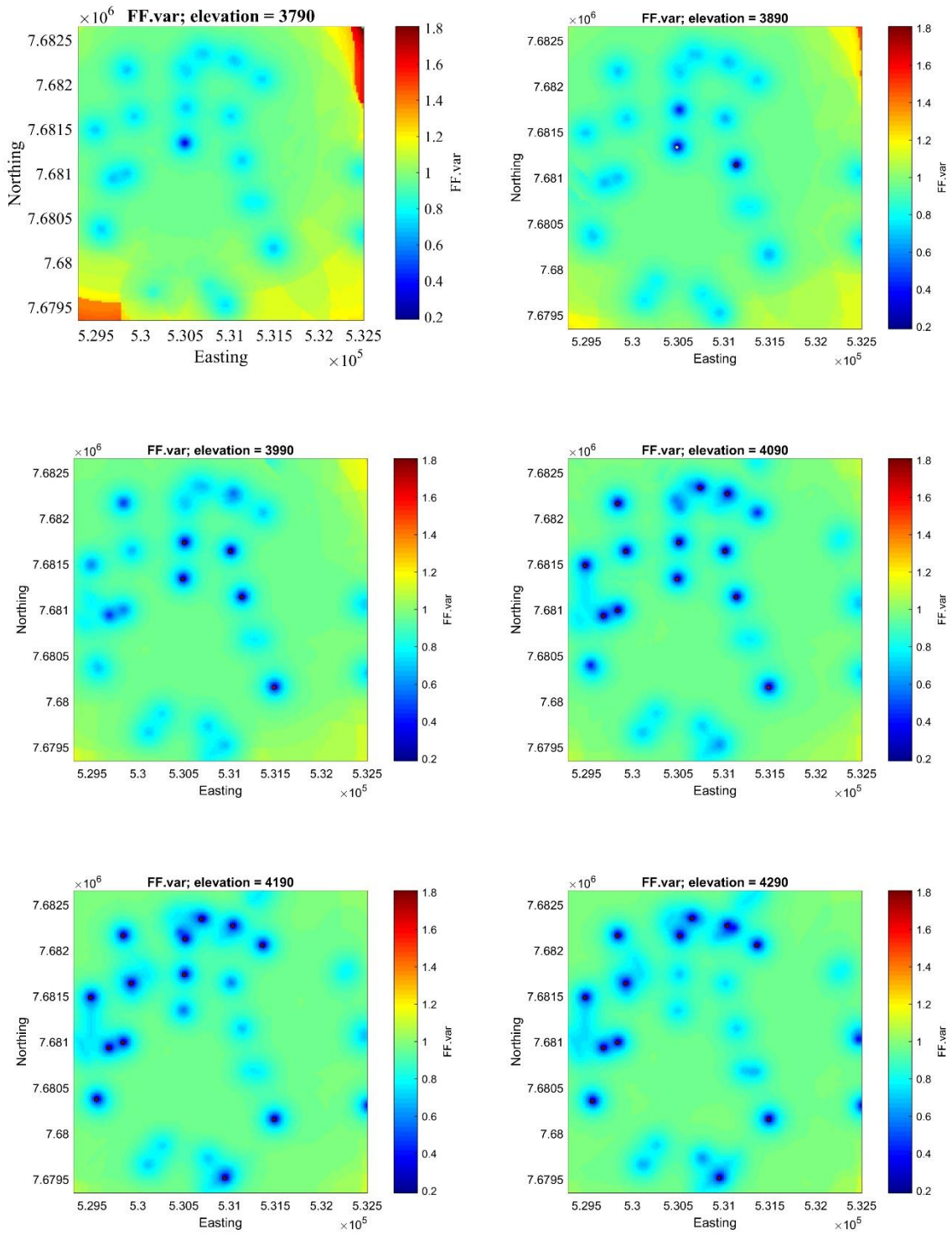


Ilustración 76: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para la varianza de cokriging de FF. Elaboración propia.

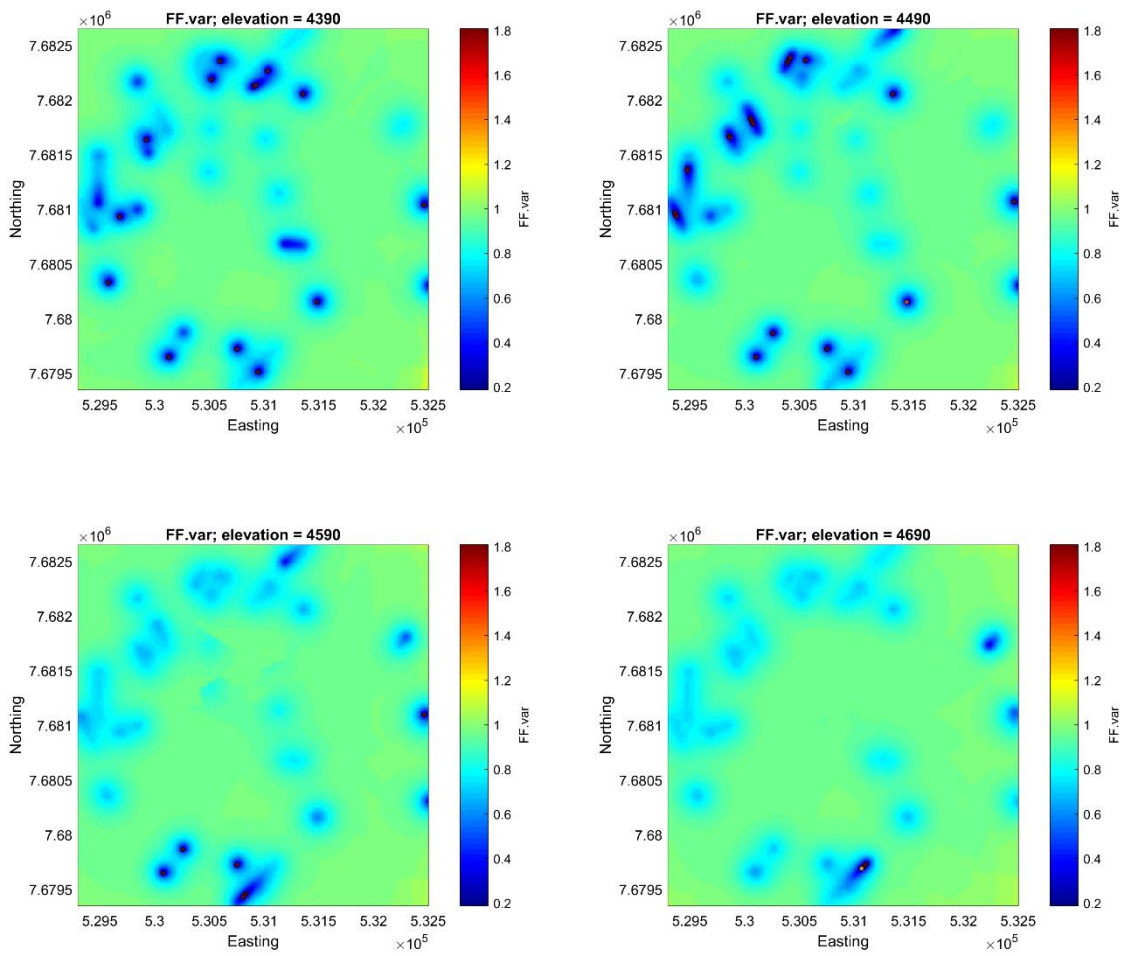


Ilustración 77: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para la varianza de cokriging de FF. Elaboración propia.

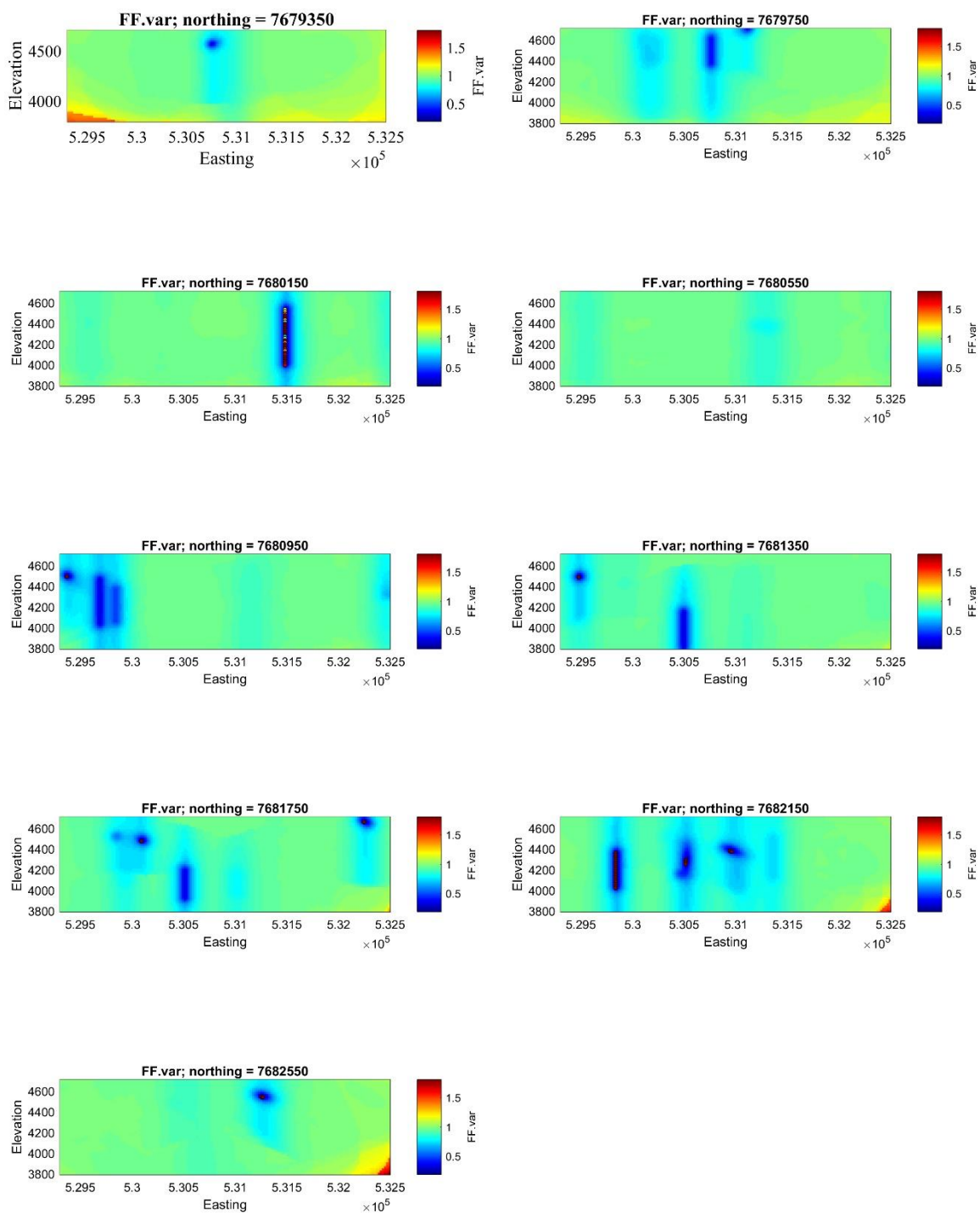


Ilustración 78: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para la varianza de cokriging de FF. Elaboración propia.

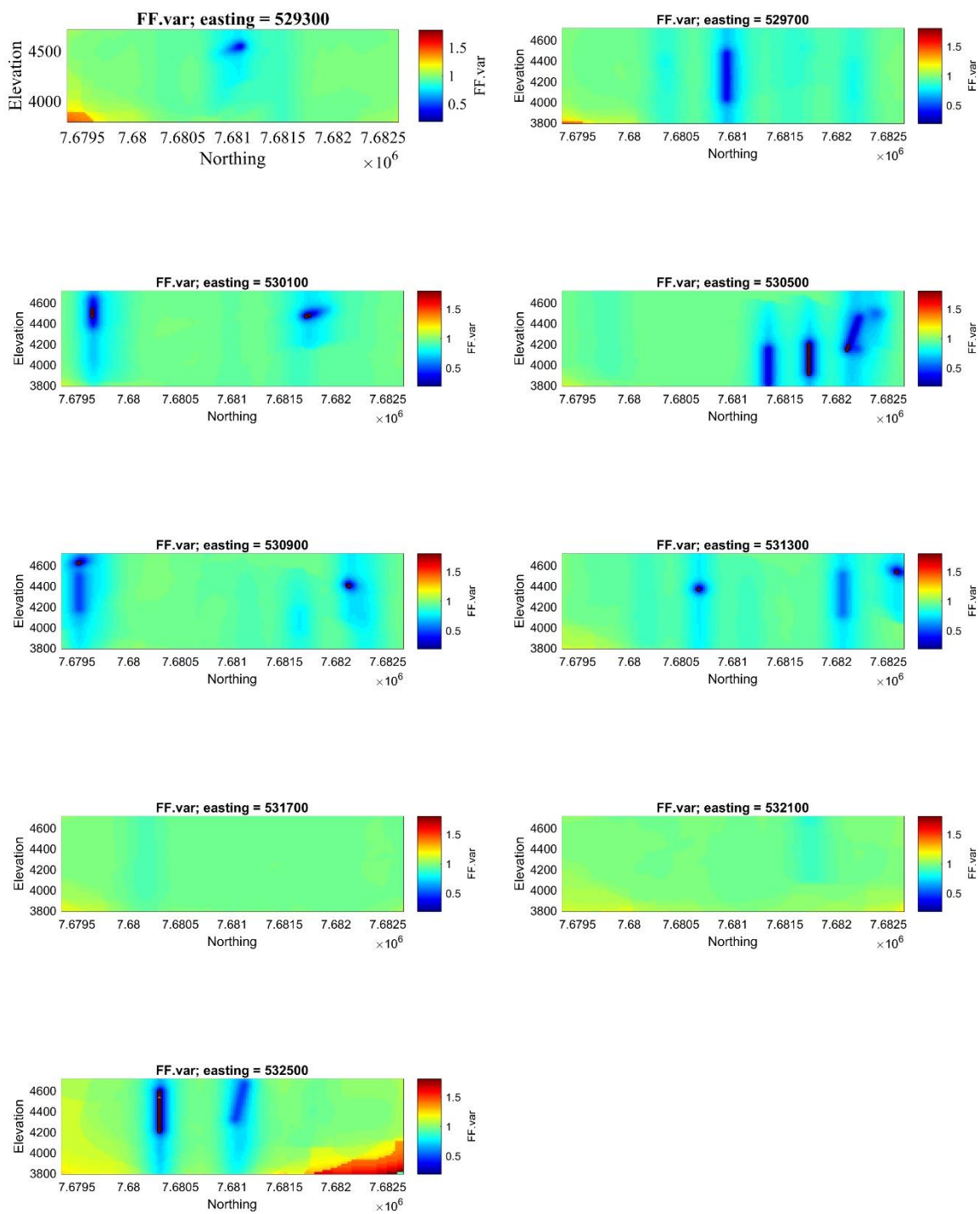


Ilustración 79: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para la varianza de cokriging de FF. Elaboración propia.

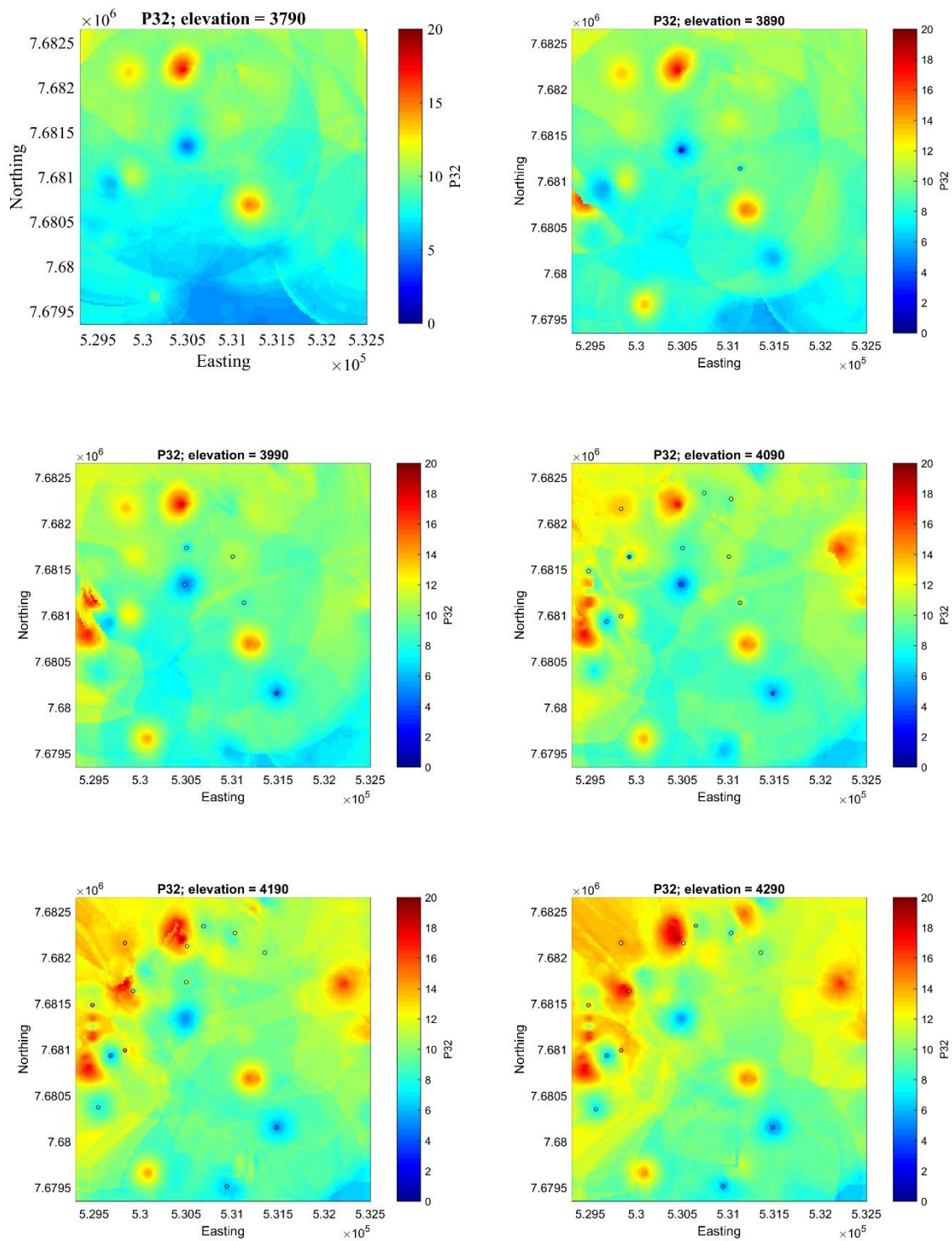


Ilustración 80: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para el cokriging de P32. Elaboración propia.

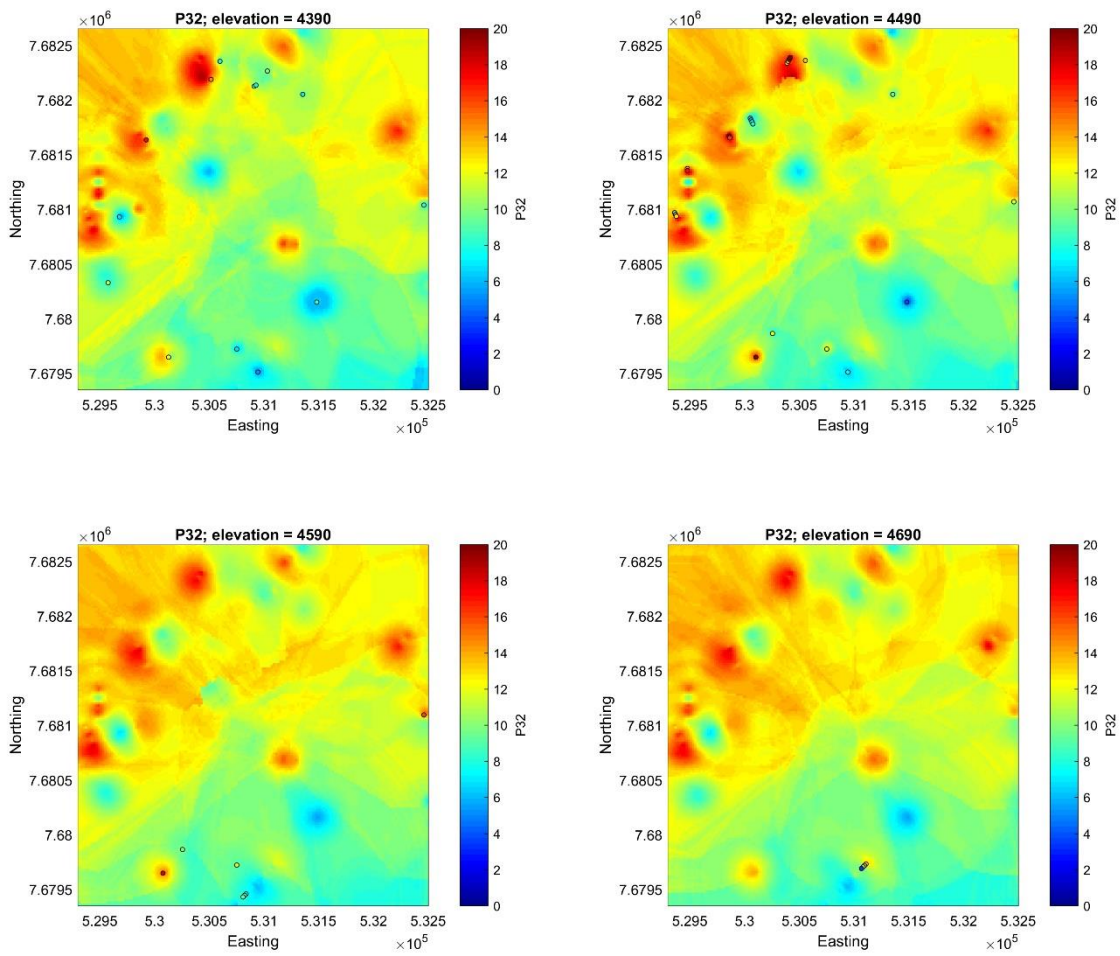


Ilustración 81: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para el cokriging de P32. Elaboración propia.

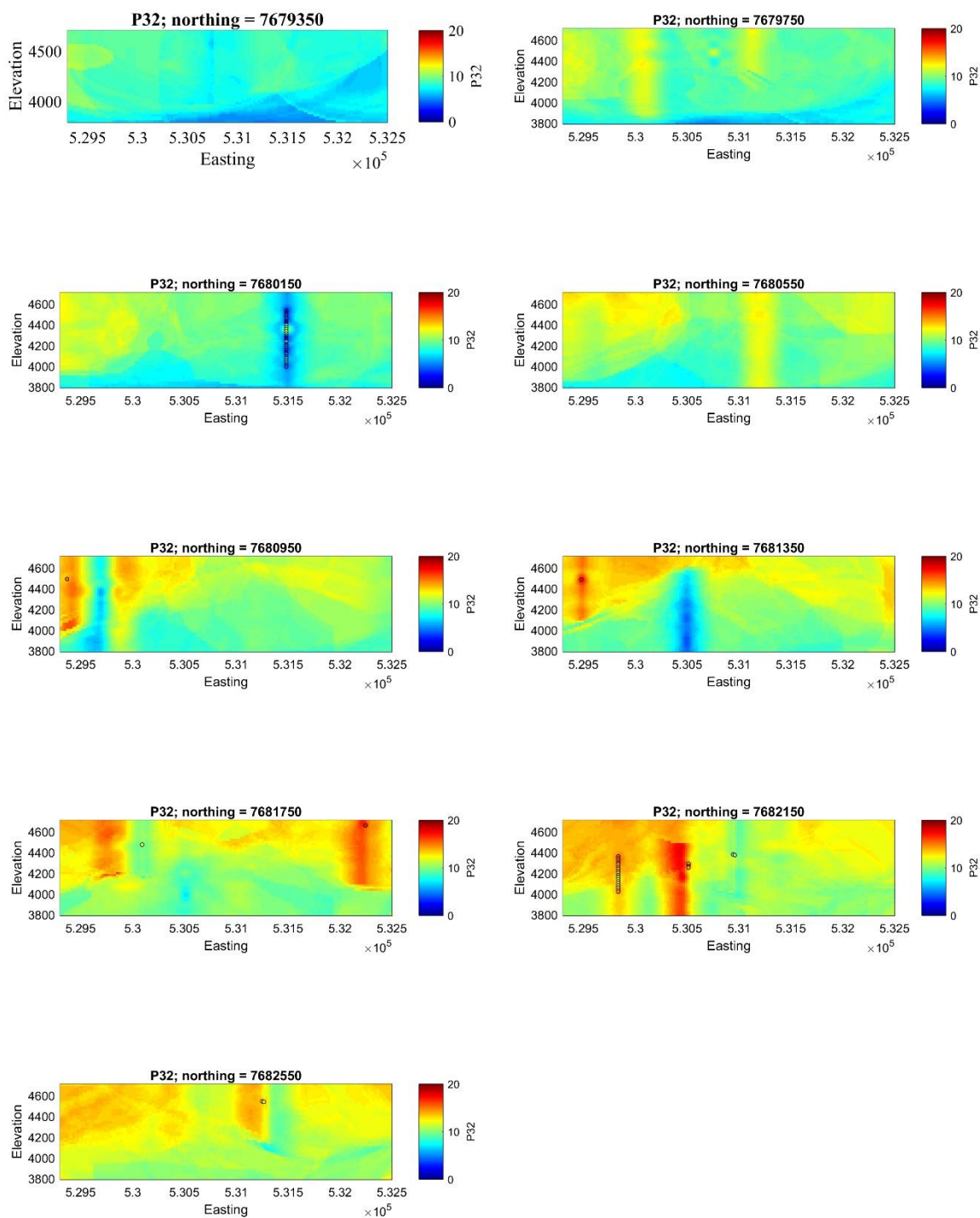


Ilustración 82: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para el cokriging de P32. Elaboración propia

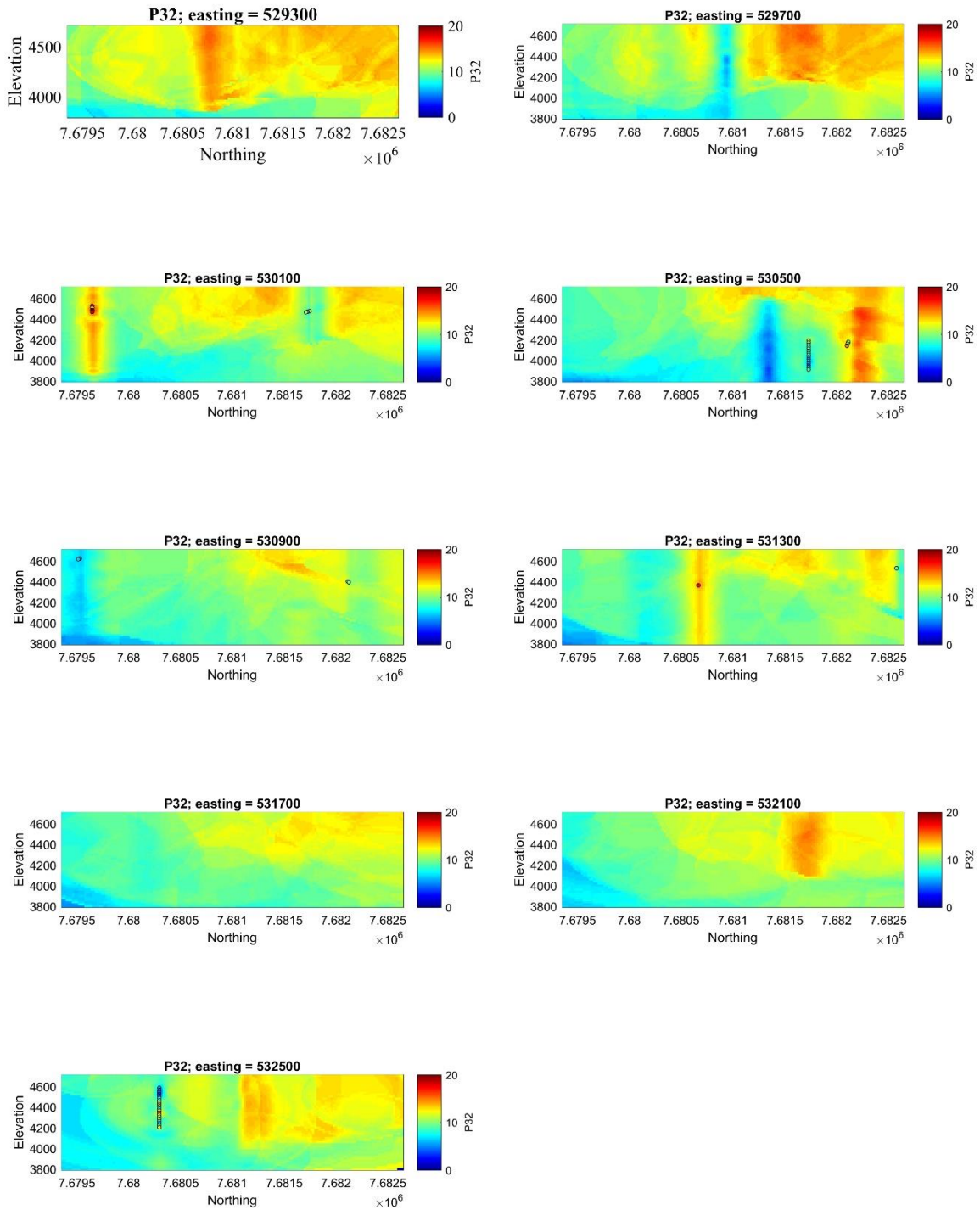


Ilustración 83: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para el cokriging de P32. Elaboración propia.

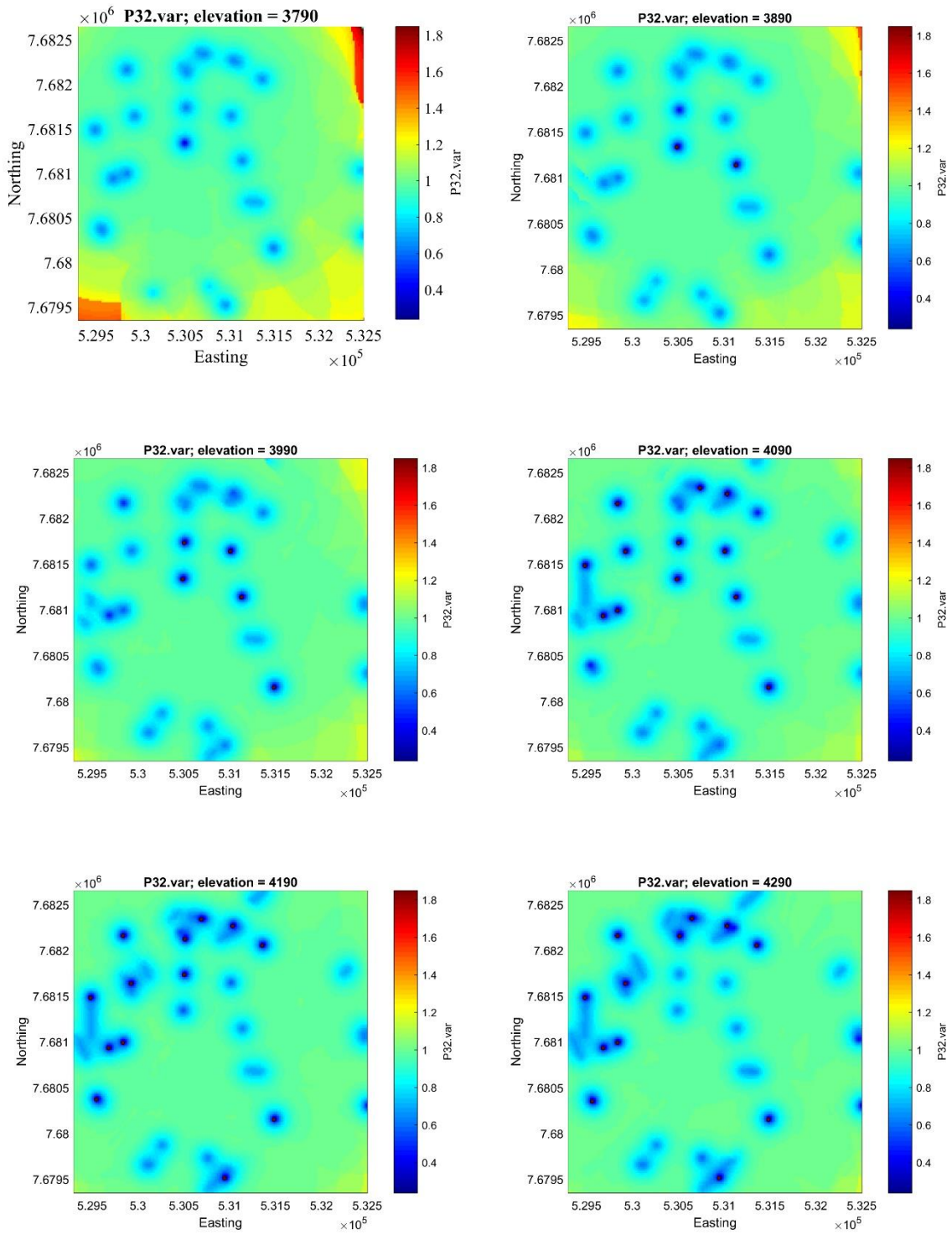


Ilustración 84: Cortes Norte-Este en Cotas 3790m a 4290m para varianza de cokriging de P32. Elaboración propia.

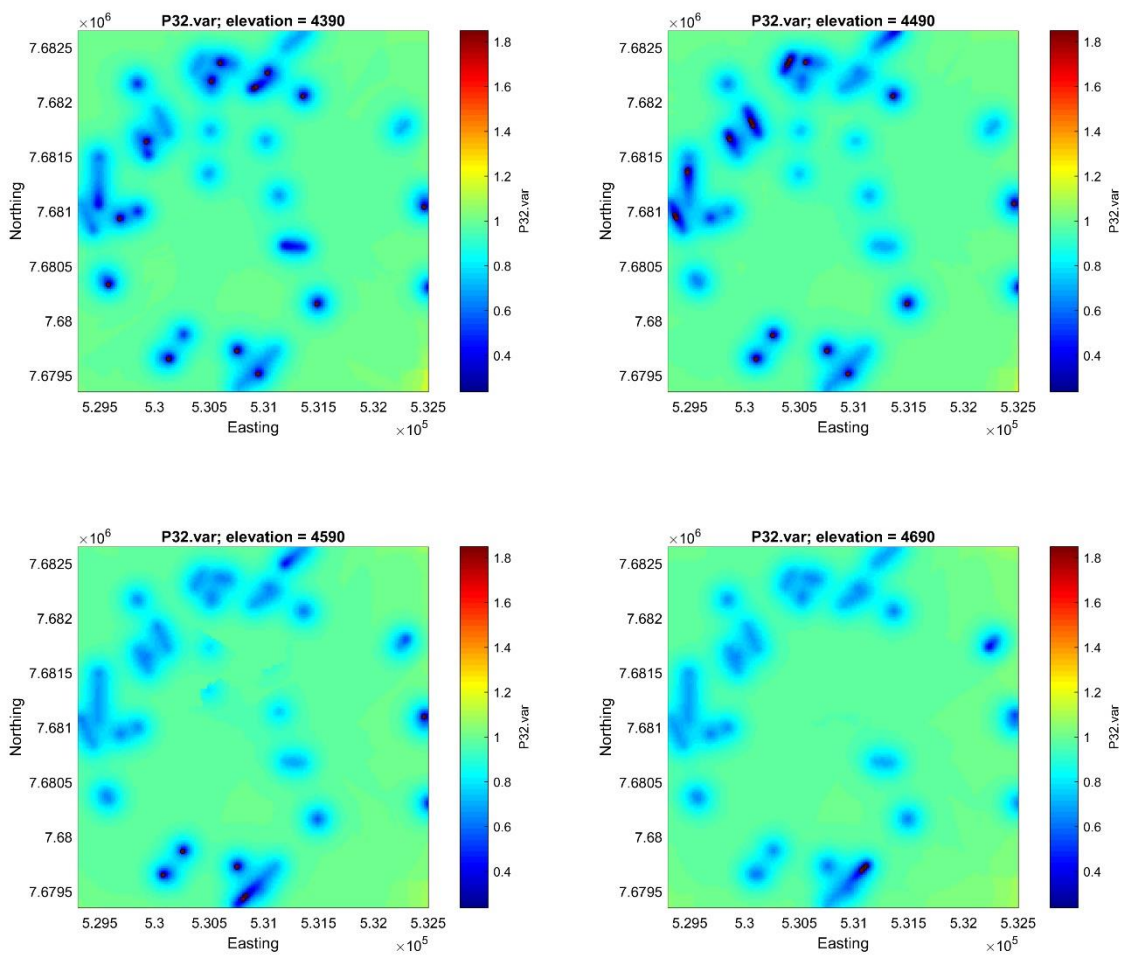


Ilustración 85: Cortes Norte-Este en Cotas 4390m a 4690m para la varianza de cokriging de P32. Elaboración propia.

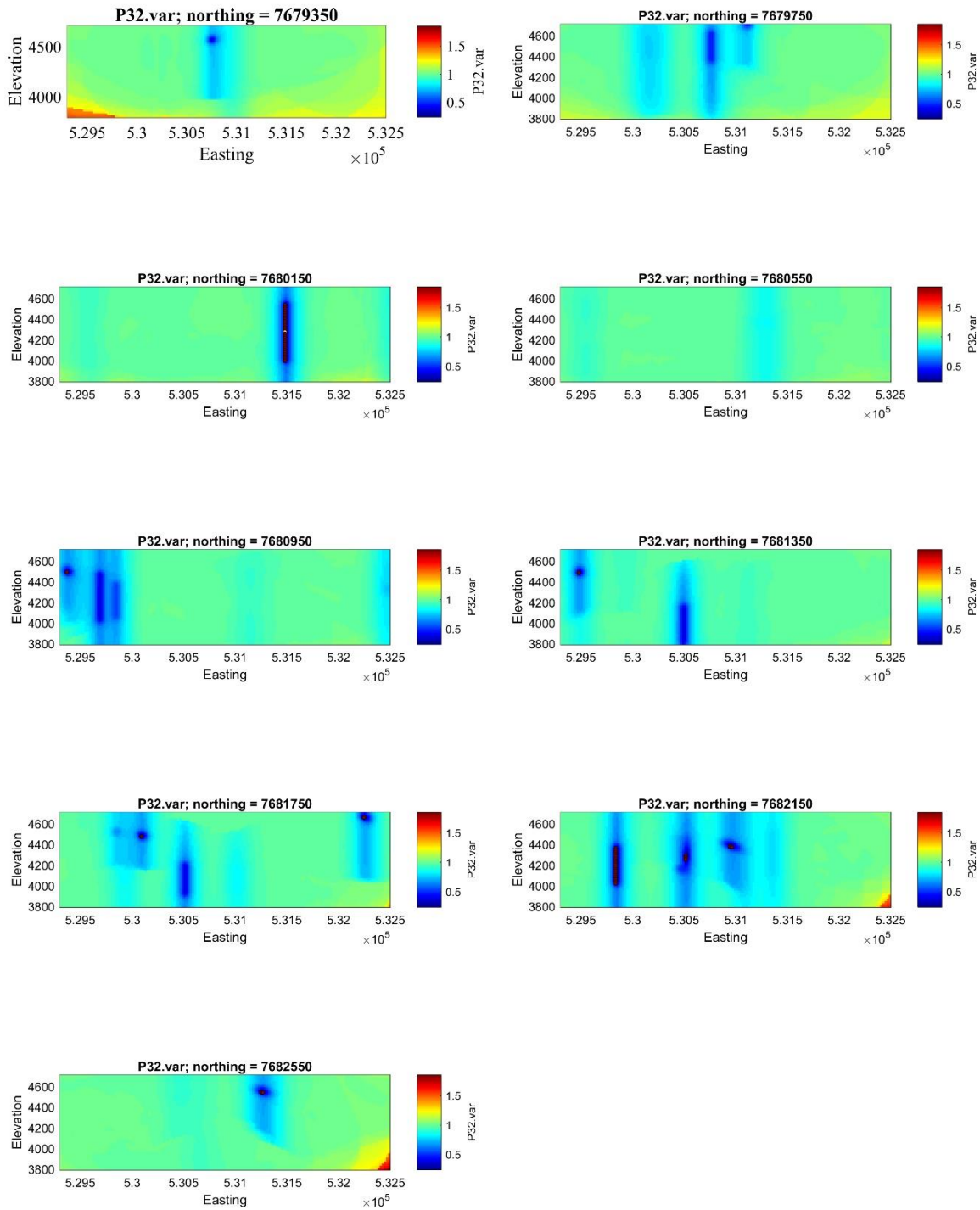


Ilustración 86: Cortes Este-Cota en Coordenadas Norte 7.679.350m a 7.682.550m para la varianza de cokriging de P32. Elaboración propia

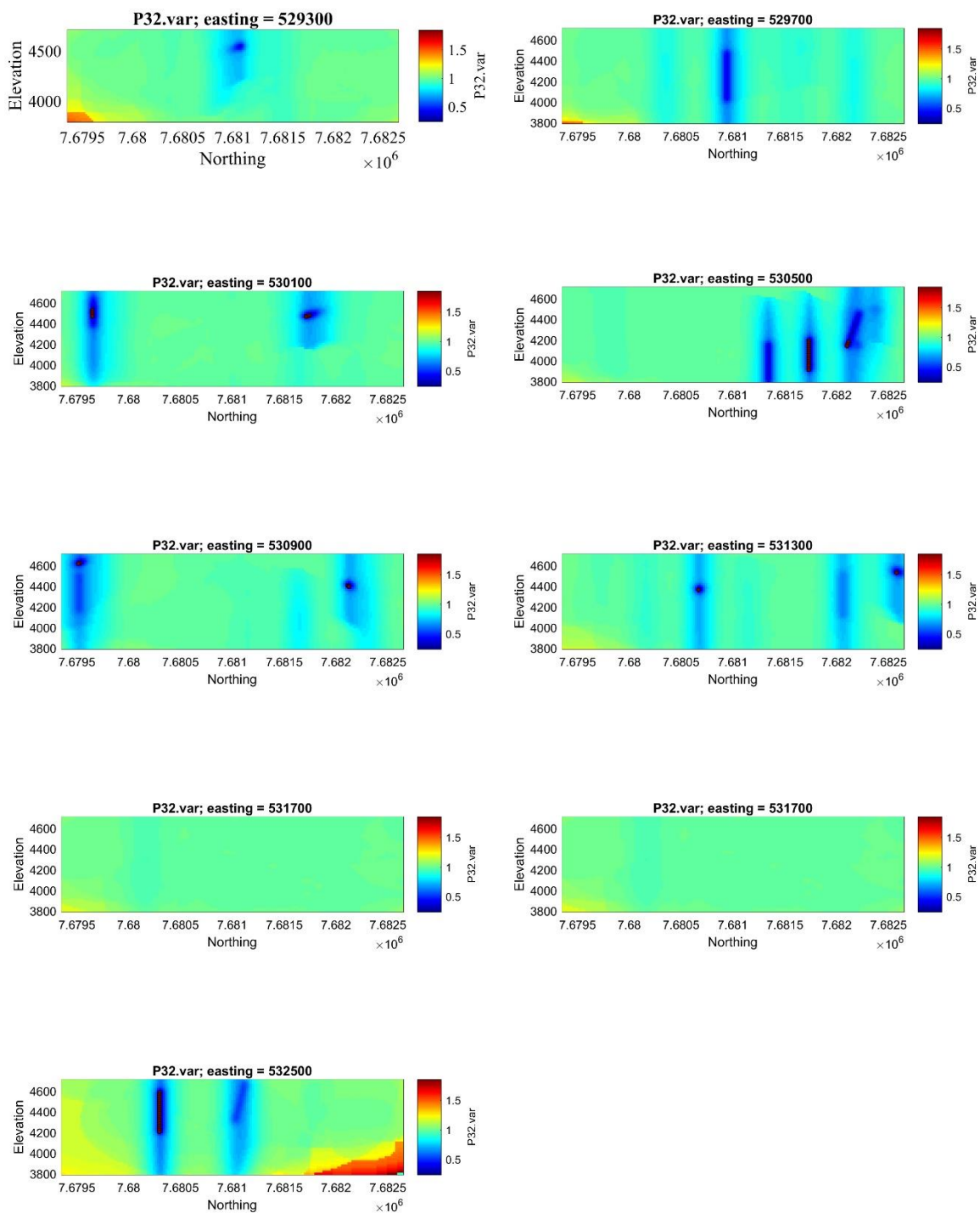


Ilustración 87: Cortes Este-Cota en Coordenadas Este 529.300m a 532.500m para la varianza de cokriging de P32. Elaboración propia.